(6) имеет место и для несимметричных отрицательно определенных матриц A. Сохранение подобного свойства при любых $\tau>0$ в случае метода (4) обеспечивает, например, выбор λ_i по правилу

$$\lambda_i=\lambda=(Ay, Ay)/(Ay, y), \; y\neq 0, \; i=1, 2, \ldots, m. \qquad (8)$$

В самом деле, при $y\neq 0$ непосредственно находим, что $(\hat{y}, \hat{y})=(y, y)s$, где $s=1+2\alpha\rho\tau^2+\beta\rho^2\tau>0$, $\alpha=(Ay, y)/(y, y)<0$, $\beta=(Ay, Ay)/(y, y)>0$. Легко проверить также, что в рассматриваемом случае $s<1$. Действительно, так как при любых конечных значениях λ и τ величина ρ положительна, то неравенство $s<1$ равносильно неравенствам $\rho\tau<-2\alpha/\beta$ или $1/\rho\tau>-\beta/(2\alpha)$. Поскольку $1/\rho\tau>-\lambda$, то при

$$\lambda\leqslant\beta/(2\alpha) \qquad (9)$$

неравенство $s<1$ заведомо будет выполняться. Сопоставление (8) и (9) доказывает высказанное утверждение.

В заключение заметим, что доказанные применительно к (6) свойства неявного метода (5), (7) имеют место и в варианте (5), (8), в то время как отмеченное здесь свойство явного метода (4), (8) с заменой (8) на (7) уже не сохраняется. Можно указать, однако, другие способы выбора λ_i в (4), которые позволяют не только сохранить это свойство, но и еще более повысить уровень согласованности дифференциальной и соответствующей разностной задач. Отметим также, что рассмотренные методы могут быть перенесены на системы неоднородных уравнений, связанные с (6), обобщены на случай устойчивых систем более общего вида (1), а также использованы при построении соответствующих нелинейных разностных схем в случае граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А. Теория разностных схем.— М., 1977.
2. Бобков В. В.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 3, с. 61.
3. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Начала теории вычислительных методов. Дифференциальные уравнения.— Минск, 1982.

Поступила в редакцию 24.02.83.

Кафедра вычислительной математики

УДК 519.24

Н. Н. ТРУШ

УМЕНЬШЕНИЕ СМЕЩЕНИЯ ПРИ ОЦЕНИВАНИИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ

Рассмотрим действительный стационарный случайный процесс x_t, $t\in Z$, со спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi=[-\pi, \pi]$. Вопросам построения оценки спектральной плотности $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, по наблюдениям за процессом x_t, $t\in Z$, посвящена обширная литература (см., например, библиографический указатель в монографии Д. Бриллинджера [4], а также [1—4]). В настоящей работе рассматривается метод уменьшения смещения оценки спектральной плотности $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$.

Будем предполагать, что если оценка $\hat{f}^T_{(k)}(\lambda)$ спектральной плотности $f(\lambda)$, построенная по T наблюдениям $x_0, \ldots, x_{T-1}$ за процессом x_t, $t\in Z$, является асимптотически несмещенной со смешением, убывающим как T^{-k}, то математическое ожидание такой оценки представимо в виде:

$$M\hat{f}^T_{(k)}(\lambda)=f(\lambda)+\sum_{j=k}^{\infty}\frac{a_j^{(k)}(\lambda)}{T^j}, \quad k=1, 2, \ldots, \qquad (1)$$

где $a_j^{(k)}(\lambda)$, $j=k, k+1, \ldots,$ — некоторые действительные функции, не зависящие от T, а $\lambda\in\Pi$.

Рассмотрим оценку $\hat{f}^T_{(1)}(\lambda)$. При решении практических задач представляется довольно интересным уменьшение величины смещения $\frac{a_1^{(1)}\lambda}{T}$ оценки $\hat{f}_{(1)}^T(\lambda)$. С этой целью в качестве оценки спектральной плотности $f(\lambda)$ рассмотрим статистику $\hat{f}_{(2)}^T(\lambda)$, задаваемую соотношением: $\hat{f}_{(2)}^T(\lambda) = T\hat{f}_{(1)}^T(\lambda) - \frac{T-1}{T}\sum_{i=0}^{T-1}\hat{f}_{(1),i}^{T-1}(\lambda)$, где $\hat{f}_{(1),i}^{T-1}(\lambda)$ — обозначает оценку $\hat{f}_{(1)}^T(\lambda)$ спектральной плотности $f_c(\lambda)$, построенную по $T-1$ наблюдениям (выброшено i-ое, $i=\overline{0,T-1}$, наблюдение из T наблюдений за процессом x_t, $t\in Z$).

Исследуем построенную оценку на насмещенность. Нетрудно видеть, что

$$M\hat{f}_{(2)}^T(\lambda) = f(\lambda) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(1)}(\lambda)\left[\frac{1}{T^{j-1}} - \frac{1}{(T-1)^{j-1}}\right] =$$

$$= f(\lambda) + \sum_{j=2}^{\infty}\frac{a_j^{(1)}(\lambda)}{T^j}b_j^{(1)}(T),$$

где $b_j^{(1)}(T) = T^j\left[\frac{1}{T^{j-1}} - \frac{1}{(T-1)^{j-1}}\right]$, $j=2,\ 3,\ \ldots.$

Найдем $\lim\limits_{T\to\infty} b_j^{(1)}(T)$, $j=2,\ 3,\ \ldots,$ $\lim\limits_{T\to\infty} b_j^{(1)}(T) = \lim\limits_{T\to\infty} T^j\left[\frac{(T-1)^{j-1}-T^{j-1}}{T^{j-1}(T-1)^{j-1}}\right] = -C_{j-1}^{j-2}$. Следовательно, оценка $\hat{f}_{(2)}^T(\lambda)$ является асимптотически несмещенной оценкой спектральной плотности $f(\lambda)$ со смещением, убывающим как T^{-2}.

Далее предположим, что оценка $\hat{f}_{k-1}^T(\lambda)$ удовлетворяет равенству (1), $k=3,\ 4,\ \ldots.$ Построим оценку

$$\hat{f}_{(k)}^T(\lambda) = \frac{1}{T^{k-1}-(T-1)^{k-1}}\cdot\left[T^{k-1}\hat{f}_{(k-1)}^T(\lambda) - \right.$$

$$\left. - \frac{(T-1)^{k-1}}{T}\sum_{i=0}^{T-1}\hat{f}_{(k-1),i}^{T-1}(\lambda)\right]. \tag{2}$$

Найдем $M\hat{f}_{(k)}^T(\lambda)$, $k=3,\ 4,\ \ldots.$ $M\hat{f}_{(k)}^T(\lambda) = f(\lambda) = \sum\limits_{j=k}^{\infty}\frac{a_j^{(k-1)}(\lambda)}{T^j}b_j^{(k-1)}(T)$,

где $b_j^{(k-1)}(T) = \frac{T^j}{T^{k-1}-(T-1)^{k-1}}\left[\frac{1}{T^{j-k+1}} - \frac{1}{(T-1)^{j-k+1}}\right]$, $j=k,\ k+1,\ \ldots.$

Заметим, что $\lim\limits_{T\to\infty} b_j^{k-1}(T) = -\frac{j-k+1}{k-1}$. Следовательно, оценка $\hat{f}_{(k)}^T(\lambda)$ является асимптотически несмещенной оценкой спектральной плотности $f(\lambda)$ со смещением, убывающим как T^{-k}.

Далее найдем вид коэффициентов $a_j^{(k)}(\lambda)$ в представлении (1), $j=k$, $k+1,\ \ldots,$ $k=2,\ 3,\ \ldots,$ при $T\to\infty$. Нетрудно видеть, что

$$\lim_{T\to\infty} a_j^{(k)}(\lambda) = \lim_{T\to\infty} a_j^{(k-1)}(\lambda)\cdot b_j^{(k-1)}(T) = (-1)^{k-1}C_{j-1}^{k-1}a_j^{(1)}(\lambda),$$

где $j=k,\ k+1,\ \ldots.$

Таким образом, имеет место следующая

Теорема. Если для оценки $\hat{f}_{(k-1)}^T(\lambda)$ спектральной плотности $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, выполняется соотношение (1), то для оценки $\hat{f}_{(k)}^T(\lambda)$, задаваемой выражением (2), справедливо соотношение

$$\lim_{T\to\infty}\left[M\hat{f}_{(k)}^T(\lambda) - \sum_{j=k}^{\infty}\frac{d_j^{(k)}(\lambda)}{T^j}\right] = f(\lambda),$$

где $d_j^{(k)}(\lambda) = (-1)^{k-1} a_j^{(1)}(\lambda) C_{j-1}^{k-1}$, $k = 2, 3, \ldots$.

Заметим, что существует несколько методов уменьшения величины смещения для параметрических оценок (см., например, [5, 6]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бенткус Р.— Литовский матем. сб., 1977, т. 14, № 4, с. 37.
2. Журбенко И. Г.— Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1978, № 4, с. 36.
3. Журбенко И. Г., Труш Н. Н.— Литовский матем. сб., 1979, т. 19, № 1, с. 65.
4. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория.— М., 1980.
5. Терпугов А. Ф. Математическая статистика.— Томск, 1974.
6. Кокс Д., Хинкли Д. Теоретическая статистика.— М., 1978.

Поступила в редакцию 18.02.83.

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

УДК 519.62

В. Н. ШАЛИМА

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Учет специфики решаемых задач позволяет указать методы их численного решения, более эффективные в сравнении с методами, предназначенными для решения задач более общего вида (см., например, [1, 2]). Рассмотрим один из способов построения таких методов для задач с начальными условиями в случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Пусть на отрезке $[t_0, T]$ необходимо численно решить следующую задачу Коши:

$$\dot{u}_k = a_k(t, \bar{u}) u_k + f_k(t, \bar{u}),\ u_k(t_0) = u_{k0},\ k = 1, 2, \ldots, s,\ \bar{u} = [u_1, \ldots, u_s], \quad (1)$$

где $a_k(t, \bar{u})$, $f_k(t, \bar{u})$, $k = 1, \ldots, s$ предполагаются достаточно гладкими в некоторой области изменения аргументов.

Непосредственно проверяется, что задача (1) эквивалентна следующей системе интегральных уравнений:

$$u_k(t) = u_k(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} a_k(\eta, \bar{u}(\eta))\, d\eta\right) + $$
$$+ \int_{t_0}^{t} \exp\left(\left(\int_{\eta}^{t} a_k(\xi, \bar{u}(\xi))\, d\xi\right) f_k(\eta, \bar{u}(\eta))\, d\eta. \quad (2)$$

Заменим отрезок интегрирования $[t_0, T]$ сеткой $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = t_0 + j\tau,\ j = 0, 1, \ldots, N,\ N\tau = T - t_0\}$ и предположим, что вычисления доведены до точки t_j, $0 \leqslant j < N$. Тогда на основании равенств (2) можно записать

$$u_k(t_{j+1}) = u_k(t_j) \exp\left(\tau \int_0^1 a_k(t_j + \alpha\tau, \bar{u}(t_j + \alpha\tau))\, d\alpha\right) +$$
$$+ \tau \int_0^1 \exp\left((1-\beta)\tau \int_0^1 a_k(\tilde{\gamma}, \bar{u}(\tilde{\gamma}))\, d\gamma\right) f_k(t_j + \beta\tau, \bar{u}(t_j + \beta\tau))\, d\beta, \quad (3)$$

где $\tilde{\gamma} = t_j + \beta\tau + (1-\beta)\tau\gamma$.

Воспользовавшись результатами работы [3], заменим интегралы в равенствах (3) квадратурными суммами; тогда получим

$$u_k(t_{j+1}) \approx u_k(t_j) \exp\left(\tau \sum_{l=1}^{q_0} A_l a_k(t_j + \alpha_l\tau, \bar{u}(t_j + \alpha_l\tau))\right(+$$