УДК 517.9

Б. С. КАЛИТИН

МИНИМАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(x,\ t), \tag{1}$$

где $x\in R^n$, n-мерному Евклидову пространству; f: $R^{n+1}\to R^n$ и $\forall\, t\in R$ $f(0,\ t)=0$. Пусть f непрерывна в цилиндре $D_H=B_H\times R$, $B_H=\{x\in R^n: \|x\|<H\}$, $H>0$, выполнены условия единственности решений $x(x_0,\ t_0,\ t)$, $x(x_0,\ t_0,\ t_0)=x_0$. Предположим, что $\forall\,\alpha\in\,]0,\ H[$ и $\forall\, t_0\in R\ \exists\, h(\alpha,\ t_0)>0$, для которого $\|x_0\|<h(\alpha,\ t_0)\Rightarrow\|x(x_0,\ t_0,\ t)\|<\alpha\ \forall\, t\geqslant t_0$, т. е. нулевое решение системы (1) устойчиво по Ляпунову [1]. Положим $h(t_0)=h(H,\ t_0)$ и введем

Определение 1. Нулевое решение системы (1) будем называть минимально устойчивым, если $\forall\, t_0\in R$ $\forall\,\delta\in\,]0,\ h(t_0)[\ \exists\ \varepsilon=\varepsilon(\delta,\ t_0)>0$ такое, что $\delta<\|x_0\|<h(t_0)\Rightarrow\|x(x_0,\ t_0,\ t)\|>\varepsilon\ \ \forall\, t\geqslant t_0$.

Если числа h, ε можно выбрать не зависящими от $t_0\in I$, где I — интервал R, то будем говорить, что нулевое решение системы (1) равномерно минимально устойчиво по $t_0\in I$.

Заметим, что при условии отсутствия зависимости h от $t_0\geqslant 0$ устойчивость нулевого решения называют равномерной [2]. Если не требовать обязательным устойчивость, то определение 1 эквивалентно определению ε-ограниченности решений [3].

Определение 2. Будем говорить, что функция $V{:}D_H\to R$ допускает большой низший предел при $x\to 0$, если $\forall\, t\in R$ $V(0,\ t)=0$ и $\forall\, t_0\in R\ \forall\,\delta\in\,]0,\ h(t_0)[\ \exists\,\lambda=\lambda(\delta,\ t_0)>0$ такое, что $\delta<\|x\|<h(t_0)\Rightarrow V(x,\ t)>\lambda\ \ \forall\, t\geqslant t_0$.

Определение 3. Определенно положительная [1] функция $V{:}D_H\to R$ допускает определенный бесконечно малый высший предел при $x\to 0$, если существует непрерывная определенно положительная функция $U{:}B_H\to R$ такая, что $\forall\,(x,\ t)\in D_H$ $V(x,\ t)\leqslant U(x)$ и $U(0)=0$.

Теорема 1. Пусть нулевое решение системы (1) устойчиво по Ляпунову. Тогда для того, чтобы решение $x=0$ было минимально устойчивым необходимо и достаточно, чтобы для каждого $t_0\in R$ существовала функция $V{:}D_{h(t_0)}\to R$ со следующими свойствами:

1) V допускает большой низший предел при $x\to 0$;

2) V допускает определенный бесконечно малый высший предел при $x\to 0$;

3) V неубывает вдоль всякой траектории с начальным условием $(x_0,\ t_0)\in D_{h(t_0)}$.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть функция V удовлетворяет всем требованиям теоремы 1. Тогда на основании 1) $\forall\, t_0\in R$, $\forall\,\delta$, $0<\delta<h(t_0)$, можно определить число $\lambda=\lambda(\delta,\ t_0)>0$ такое, что при $\delta<\|x\|<h(t_0)$ будем иметь неравенство $V(x,\ t)>\lambda\ \forall\, t\geqslant t_0$. По числу λ

с учетом 2) и свойств функции U (см. определение 3) можно указать число ε, $0<\varepsilon<\delta$, для которого $\lambda\geqslant\sup\limits_{\|x\|=\varepsilon} U(x)$. Если $\delta<\|x_0\|<h(t_0)$, $t_0\in R$, то $V[x_0, t_0]\leqslant V[x(x_0, t_0, t), t]$ в силу 3) при $t\geqslant t_0$. Отсюда следует, что $\|x(x_0, t_0, t)\|>\varepsilon$ при $t\geqslant t_0$, так как в противном случае нашелся бы момент времени $t^*>t_0$, что $\|x(x_0, t_0, t^*)\|=\varepsilon$. Однако в этом случае имелось бы соотношение $V[x(x_0, t_0, t^*), t^*]\leqslant U[x(x_0, t_0, t^*)]\leqslant\lambda$, противоречащее определению числа λ. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть тривиальное решение системы (1) минимально устойчиво. Покажем, что в этом случае существует функция $V:D_{h(t_0)}\to R^+$, удовлетворяющая 1)—3).

Рассмотрим решения $x(x_0, t_0, t)$ системы (1), для которых в соответствии с определением минимальной устойчивости выполняются неравенства $\delta<\|x_0\|<h(t_0)$ и $\|x(x_0, t_0, t)\|>\varepsilon\ \forall\, t\geqslant t_0$. Определим функцию V в произвольной точке $(x_0, t_0)\in D_{h(t_0)}$ по правилу: $V(x_0, t_0)=\inf\limits_{t\geqslant t_0}\|x(x_0, t_0, t)\|$. Очевидно эта функция определена однозначно. Кроме того, $V(x_0, t_0)\leqslant\|x(x_0, t_0, t_0)\|\equiv U(x_0)$, поэтому с учетом произвольности выбора числа δ, $0<\delta<h(t_0)$, функция U удовлетворяет всем требованиям определения 3. Следовательно, выполнено также и 2).

Проверка требования 3) проводится аналогично доказательству требования 4 теоремы 3.1. [4] (см. необходимость).

Покажем, что выполняется 1). Действительно, поскольку при $\|x_0\|>\delta$ имеем $\|x(x_0, t_0, t)\|>\varepsilon=\varepsilon(\delta, t_0)$ для всех $t\geqslant t_0$, то для $\|x_0\|>\delta$ получим $V(x_0, t_0)=\inf\limits_{t\geqslant t_0}\|x(x_0, t_0, t)\|\geqslant\varepsilon$. Поэтому при $\lambda=0{,}5\varepsilon(\delta, t_0)$ функция V удовлетворяет определению 2, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Предположим, что тривиальное решение системы (1) устойчиво по Ляпунову. Пусть существуют скалярные функции $V:D_н\to R$, $\alpha:R\to R$, удовлетворяющие следующим требованиям: (i) V непрерывно дифференцируема, допускает определенный бесконечно малый высший предел при $x\to 0$ и $V(x, t)>0$ для $x\neq 0$ $(x, t)\in D_н$, (ii) α интегрируема при $t\geqslant t_0$ для всех $t_0\geqslant R$ и выполняется неравенство $\dot V(x, t)\geqslant\alpha(t)V(x, t)$, $(x, t)\in D_н$, (iii) существует конечное число $C=C(t_0)$ такое, что $\int\limits_{t_0}^{t}\alpha(\tau)\,d\tau\geqslant C(t_0)$ при $t\geqslant t_0$. Тогда решение $x=0$ системы (1) минимально устойчиво.

Доказательство. Из очевидного соотношения $\frac{dV}{V}=\frac{\dot V}{V}dt$ имеем $V[x(x_0, t_0, t), t]=V(x_0, t_0)\exp\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\dot V}{V}d\tau$ при $t\geqslant t_0$ и $x_0\neq 0$. Поэтому, учитывая (ii), будем иметь $V[x(x_0, t_0, t), t]\geqslant V(x_0, t_0)\exp\int\limits_{t_0}^{t}\alpha(\tau)\,d\tau$ для $t\geqslant t_0$ и $x_0\neq 0$. Теперь, принимая во внимание (i), (iii) (см. определение 3), получим неравенство $U[x(x_0, t_0, t)]\geqslant V(x_0, t_0)\exp C(t_0)$ для $t\geqslant t_0$ и $x_0\neq 0$. Но функция $U(x)$ определенно положительна, а $V(x_0, t_0)$ определенно положительна по x_0 при фиксированном t_0, поэтому по заданному числу $\delta>0$ всегда можно указать число $\varepsilon=\varepsilon(\delta, t_0)>0$ такое, что если $\|x_0\|>\delta$, то $\|x(x_0, t_0, t)\|>\varepsilon$ при всех $t\geqslant t_0$, что и требовалось.

Если число C можно выбрать вне зависимости от параметра $t_0\in I$, то теорема 2 гарантирует равномерную минимальную устойчивость по $t_0\in I$, (где I — неограниченный интервал R).

Теорема 3. Для того чтобы решение $x=0$ системы (1) было равномерно минимально устойчивым по $t_0\in R$, необходимо и достаточно существования функции V со следующими свойствами:

(i) V задана в шаре B_H,

(ii) V непрерывна в начале координат и $V(0)=0$,

(iii) V положительно определенная функция,

(IV) для всякой траектории $(x(x_0, 0, t), t)$, $\|x_0\|<h(0)$, системы (1) $V[x(x_0, 0, t)]\equiv V[x_0]$, $t\in R$.

Доказательство. Пусть тривиальное решение системы (1) равномерно минимально устойчиво по $t_0 \in R$. Тогда для любого числа $\alpha > 0$, $0 < \alpha < H$ существует число $h = h(\alpha) > 0$ и для всякого δ, $0 < \delta < h(t_0)$ найдется число $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ такое, что

$$\delta < \|x_0\| < h(\alpha) \Rightarrow \varepsilon < \|x(x_0, t_0, t)\| < \alpha, \quad \forall t \geqslant t_0. \tag{2}$$

Рассмотрим функцию $V(x_0) = \sup\limits_{t \leqslant 0} \|x(x_0, t, 0)\|$, $\|x_0\| < h(\alpha)$. Она однозначно определена и в силу (2) ограничена при $\|x_0\| < h(\alpha)$. Из правого неравенства (2) следует, что $V(x) \leqslant \alpha$ при $\|x\| < h(\alpha)$ и $V(0) = 0$, т. е. (ii) выполнено. Кроме того, с учетом (2) будем иметь $V(x_0) = \sup\limits_{t \leqslant 0} \|x(x_0, t, 0)\| \geqslant \alpha > 0$ при $\|x_0\| > h(\alpha)$. Значит, V определенно положительна.

Оставшийся пункт (IV) проверяется непосредственной подстановкой с помощью того, что $x[x(x_0, 0, t), t, 0] \equiv x_0$ $\forall t \geqslant 0$. Достаточность теоремы 3 следует из теоремы 1.

Легко видеть, что для линейных систем справедлива

Теорема 4. Тривиальное решение линейной системы $\dot{x} = Ax$ с постоянной матрицей A минимально устойчиво тогда и только тогда, когда все характеристические числа матрицы A имеют нулевые вещественные части и допускают лишь простые элементарные делители.

Аналогично этому имеет место

Теорема 5. Тривиальное решение системы $\dot{x} = A(t)x$ с непрерывной периодической матрицей $A(t)$ минимально устойчиво тогда и только тогда, когда все ее мультипликаторы ρ_i [5] лежат на окружности $|\rho_i| = 1$ и имеют лишь простые элементарные делители, если их рассматривать как собственные значения соответствующей матрицы монодромии.

Замечание. Метод построения функций Ляпунова в виде связки интегралов, предложенный Н. Г. Четаевым [6], всегда гарантирует минимальную устойчивость исследуемого положения равновесия. Этот факт вытекает непосредственно из теоремы 3.

Рассмотрим пример устойчивой системы, описанный Н. Н. Красовским [2, с. 57]. Один из вариантов его аналитической записи имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin^2 \dfrac{1}{x^2 + y^2}, \\ \dot{y} = x + y\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin^2 \dfrac{1}{x^2 + y^2}, \quad \text{если } x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$$

и $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ при $x^2 + y^2 = 0$.

Функция $V(x, y) = 0{,}5(x^2 + y^2)$ обладает непрерывной производной по времени $\dot{V}(x, y) = (x^2 + y^2)^{3/2} \cdot \sin^2 \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ при $x^2 + y^2 \neq 0$ ($\dot{V}(0, 0) = 0$). По теореме 1 такая система минимально устойчива, а в силу автономности системы и равномерно минимально устойчива по $t_0 \in R$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения.— М.— Л. 1950.
2. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения.— М., 1959.
3. Калитин Б. С. r-ограниченность решений дифференциальных систем.— Рукопись деп. в ВИНИТИ АН СССР, № 1571-78. Деп. от 11.05.78.
4. Зубов В. И. Лекции по теории управления.— М., 1975.
5. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости.— М., 1967.
6. Четаев Н. Г. Устойчивость движения: Работы по аналитической механике.— М., 1962.

Поступила в редакцию
14.04.80.

Кафедра МОУ