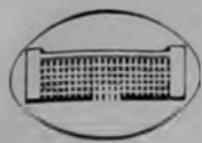


Вестник
БГУ

серия 1

1984

№ 1



ВЕСТНИК

*Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина*

СЕРИЯ I

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

1
—
1984

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

| | |
|---|----|
| Процко С. В., Ханох Б. Ю., Хапалюк А. П. Оптический отражатель в форме полного трехгранного угла ($\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/4$), имеющего малые деформации двухгранных углов, в автоколлимационной схеме | 3 |
| Прима А. М., Умрейко Д. С. Корреляция параметризаций методов расчета интенсивностей ИК полос по модели эффективных зарядов и по валентнооптической схеме | 6 |
| Терехович А. Б., Капалун В. А., Работягин В. А., Зеленкевич В. М. Использование машинных методов при разработке антенных обтекателей | 10 |
| Носилова В. А. Одночастичная оценка ядерного матричного элемента электрического монополя ядра ^{187}Au в модели Саксона — Вудса | 15 |
| Левокович А. Д., Перцев А. Н., Тарасенко И. П. Характеристики ^{239}Pu — Ве источника нейтронов типа «Сэндвич» | 18 |
| Ховратович Н. Н., Пушликова О. Н., Исокладнова Т. Н., Прокошина И. А. К вопросу о взаимодействии РЗЭ с глицином | 20 |
| Камава М. С., Кохан Е. К., Лукашевич М. Г. Изменение магнитосопротивления арсенида галлия в электрическом поле | 23 |

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

| | |
|---|----|
| Та Хонг Куанг, Русак В. И. Приближение функций рациональными операторами | 26 |
| Король И. А., Сопель Н. В. Автоматизированная система перевода ключевых слов (Сперкс-1) | 30 |
| Ицумович И. Ф. Вырожденные стационарные уравнения с законом площадей | 32 |
| Ибрагимов Э. Дж., Радико Я. В. О приближении функций на сфере в метриках $L_{p,d}(S)$ интегралами типа Джексона | 35 |
| Вахульчик П. А. Исследование сходимости метода Ньютона решения нелинейных разностных уравнений, аппроксимирующих смешанную задачу для квазилинейной гиперболической системы | 38 |
| Пилипчук Т. А. Алгоритм решения двухпродуктовой транспортной задачи с дополнительной матрицей ограничений прямым методом | 42 |
| Хвоцицкая Т. А. Замкнутое решение одной краевой задачи | 46 |

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

| | |
|--|----|
| Кожухарь А. Ю., Полонейчик И. Н., Жук И. И. Магнитные спектры эпитаксиальных феррит-гранатовых структур | 49 |
| Карих Е. Д., Унгер Ю. Ч. Поперечная диффузия неравновесных носителей заряда в гетеролазерах с полосковым контактом | 50 |
| Холоднырев С. В., Холоднырева С. Г. Определение оптимального времени измерения в режиме счета фотонов | 52 |
| Павлов В. И., Бичков Г. Л., Богуси А. К. Магнитосопротивление $\text{La}_{1-x}\text{Ca}_x\text{MnO}_3$ | 53 |
| Мазаник С. А. О некоторых инвариантах линейных дифференциальных систем | 55 |
| Биснюк И. И. О числе 3-циклов в графах с данными степенями вершин | 57 |
| Сурин Т. Т. Скалярные преобразования систем Лапко — Данилевского | 58 |
| Тазбино Т. О линейных дифференциальных системах с частичной изометрией | 60 |
| Биров Т. И., Гончаренок Н. И. Эффекты наведенной хиротропии в растворах сложных молекул | 61 |
| Шаромет А. А. Об абстрактных изоморфизмах разрешимых алгебраических групп | 63 |
| Аннотации депонированных статей | 66 |

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

| | |
|--|----|
| Николай Александрович Борисевич (К шестидесятилетию со дня рождения) | 74 |
|--|----|



ВЕСТНИК

*Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина*

НАУЧНО ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издаётся с 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ I

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

№ 1
ЯНВАРЬ

БІБЛІЯТЭКА
БЕЛАРУСЬСЬКАГО
УНІВЕРСІТЭТА
ІМЯ В. І. ЛЕНІНА

Главная редакционная коллегия журнала:

М. Д. ТИВО (*главный редактор*),
П. Н. БАРАНОВСКИЙ (*ответственный секретарь*),
И. И. ЖБАНКОВА, **В. Г. ИВАШИН**, **В. Г. РУДЬ** (*зам. главного редактора*), **А. Е. СУПРУН**, **И. Г. ТИЩЕНКО**

Редакционная коллегия серии:

Ю. С. БОГДАНОВ, **В. И. ВЕДЕРНИКОВ**, **Е. С. ВОРОПАП**,
Э. И. ЗВЕРОВИЧ, **Е. И. ИВАНОВ**, **Л. И. КОМАРОВ**,
А. И. КОМЯК, **Н. А. ЛЕПЕШНСКИЙ**, **И. А. ПРУСОВ**,
В. Ф. СТЕЛЬМАХ, **Б. Ю. ХАНОХ**, **А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ**,
С. С. ШУШКЕВИЧ

**ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. И. ЛЕНИНА**

Серия 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1

Редактор *И. П. Стрельченя*
Младший редактор *Г. М. Добыш*
Художественный редактор *С. В. Валенок*
Технический редактор и корректор *Г. И. Хмарун*

Сдано в набор 06.10.83. Подписано в печать 10.01.84. АТ 18511. Формат 70×108³/₁₆. Бумага типографская № 1. Высокая печать. Усл. печ. л. 7,0. Усл. кр.-отт. 7,52. Уч.-изд. л. 7,68. Тираж 1055 экз. Заказ 535. Цена 95 к.

Издательство «Университетское», 220048, Минск, проспект Машерова, 11.
Адрес редакции: 220080, Минск, Университетской городок, телефон 20-65-42.

Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП
Белоруссии, 220041, Минск, Ленинский пр., 79.

УДК 535.31

С. В. ПРОЦКО, Б. Ю. ХАНОХ, А. П. ХАПАЛЮК

**ОПТИЧЕСКИЙ ОТРАЖАТЕЛЬ В ФОРМЕ ПОЛОГО
ТРЕХГРАННОГО УГЛА ($\pi/2, \pi/2, \pi/4$),
ИМЕЮЩЕГО МАЛЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ДВУГРАННЫХ УГЛОВ,
В АВТОКОЛЛИМАЦИОННОЙ СХЕМЕ**

Оптические отражатели тетраэдрического типа, двугранные углы между отражающими плоскостями которых имеют небольшие отступления от прямого угла, нашли применение в трехкоординатных автоколлимационных системах [1, 2]. Поэтому целесообразно исследовать возможности использования для такой же цели других отражателей в форме трехгранного угла ($\pi/2, \pi/2, \pi/4$), у которых двугранные углы между отражающими плоскостями имеют небольшие отступления от углов $\pi/2, \pi/4$.

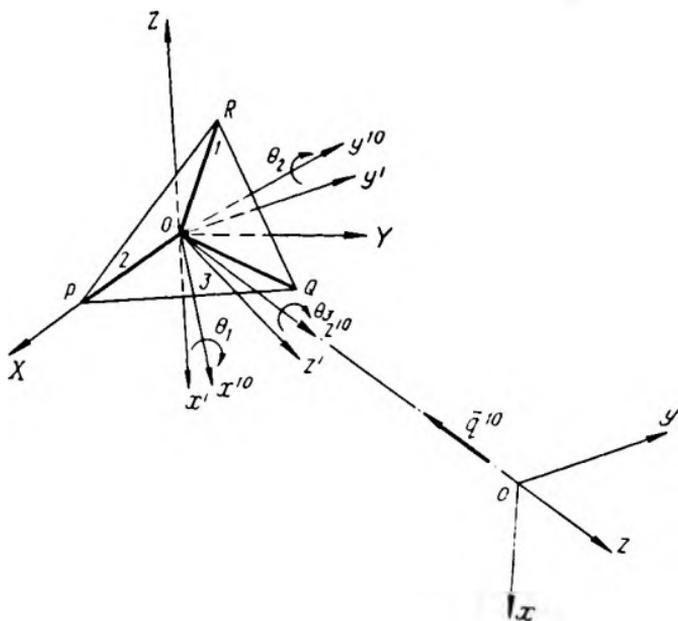
На рисунке показаны три отражающие плоские поверхности исследуемого отражателя: 1. ROQ , 2. ROP , 3. POQ . Предположим, что двугранный угол между плоскостями 1 и 2 равен $\pi/4 - \delta_{12}$, между плоскостями 1 и 3 — $\pi/2 - \delta_{13}$ и между плоскостями 2 и 3 — $\pi/2 - \delta_{23}$, где δ_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) — настолько малые углы, что $\sin \delta_{ik} \cong \delta_{ik}$, а $\cos \delta_{ik} \cong 1$. Плоскость XOY прямоугольной системы координат XYZ совпадает с отражающей плоскостью 3, а ось X совмещена с ребром OP . Предположим, что на эту отражательную систему падает коллимированный пучок оптических лучей, распространяющийся в направлении единичного вектора $\vec{q} = -(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$. За счет пятикратного отражения в различной последовательности от плоскостей 1, 2, 3 из этого пучка формируются десять отраженных пучков, попарно симметричных относительно падающего, образуя с ним малые углы. Матрицы отражения для каждого из десяти отраженных пучков в системе координат XYZ имеют следующий общий вид [3]:

$$B_j = \begin{pmatrix} -1 & (-1) \left[\frac{j-1}{5} \right] a_{12} & (-1) \left[\frac{j-1}{5} \right] a_{13} \\ -(-1) \left[\frac{j-1}{5} \right] a_{12} & -1 & (-1) \left[\frac{j-1}{5} \right] a_{23} \\ -(-1) \left[\frac{j-1}{5} \right] a_{13} & -(-1) \left[\frac{j-1}{5} \right] a_{23} & -1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

где $j = 1, 2, \dots, 10$; $a_{12} = -4\delta_{12}$; $a_{13} = 4\delta_{13} \cos \eta_j \cos \frac{\pi}{4} - 2\delta_{23} (\sin \eta_j - \cos \eta_j) + 4\delta_{23} \left| \cos \frac{\pi}{2} \right| \sin \eta_j$; $a_{23} = 4\delta_{13} \sin \eta_j \cos \frac{\pi}{4} + 2\delta_{23} (\sin \eta_j + \cos \eta_j) - 4\delta_{23} \left| \cos \frac{\pi}{2} \right| \cos \eta_j$; $\eta_j = \left[\left(j - \left[\frac{j-1}{5} \right] \right) / 2 \right] \frac{\pi}{2}$.

В автоколлимационных схемах интерес представляют изменения координат отраженных пучков при повороте отражателя, наблюдаемые в неподвижной системе координат, связанной с источником излучения. Ма-

тематически это сводится к определению явного вида матриц отражения (1) при повороте отражателя в неподвижной системе координат. Оказывается, наиболее простая функциональная зависимость между координатами отраженных пучков от отражателя и его ориентацией в пространстве относительно неподвижной системы координат xyz (см. рисунок)



Положение отражателя относительно систем координат

получается, если в исходном положении ось z неподвижной системы координат совпадает с оптической осью отражателя. Здесь это направление задается вектором $\vec{a} = \{\cos \pi/8, \sin \pi/8, \sin \pi/8\}$, который образует равные углы со всеми плоскостями отражателя и совпадает с линией пересечения бисекторных плоскостей его двугранных углов.

Для решения поставленной задачи введем новую систему координат $x'y'z'$, жестко связанную с отражателем, у которой в системе координат XYZ (см. рисунок) направление оси z' определяется вектором \vec{a} , а ось y' перпендикулярна к оси Z . Матрица перехода A из системы координат XYZ в $x'y'z'$ имеет вид:

$$A = \left(1 + \sin^2 \frac{\pi}{8}\right)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8} & \sin^2 \frac{\pi}{8} & -1 \\ -\sin \frac{\pi}{8} \left(1 + \sin^2 \frac{\pi}{8}\right) & \cos \frac{\pi}{8} \left(1 + \sin^2 \frac{\pi}{8}\right) & 0 \\ \cos \frac{\pi}{8} & \sin \frac{\pi}{8} & \sin \frac{\pi}{8} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

В системе координат $x'y'z'$ матрицы отражения C_i можно получить, воспользовавшись (1) и правилом перехода к новому базису [4]:

$$C_i = AB_i A^{-1}, \quad (3)$$

где A^{-1} — матрица, обратная матрице A . Очевидно, исходное положение системы координат $x'y'z'$ (обозначим его $x''y''z''$) отличается от системы xyz , в которой происходит наблюдение, только переносом ее начала параллельно оси z (обычно на фокусное расстояние f автоколлиматора).

Поэтому вращение отражателя, которое целесообразно выразить через три независимых угла поворота (углы Эйлера) θ_1, θ_2 (коллимационные углы) и θ_3 (угол скручивания), совпадает с вращением системы координат $x'y'z'$ относительно ее исходного положения.

Теперь при произвольной ориентации отражателя вектора направлений отраженных пучков в неподвижной системе координат равны:

$$\vec{q}_j = \{T^{-1}C_j T \vec{q}_j^0\}, \quad (4)$$

где T — матрица вращения; T^{-1} — матрица обратная ей, $\vec{q}_j^0 = \{0, 0, -1\}$ — единичный вектор направления исходного падающего пучка. Подставив в (4) из (3) явные выражения матриц C_i и T из [4], получим координаты отраженных пучков \vec{q}_j в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_j &= \{P_j \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cos^{-1} \Psi [F_j \sin(\theta_3 - \Psi) + K_j \cos(\theta_3 - \Psi)]\} f, \\ y_j &= \{P_j \sin \theta_2 + \cos \theta_2 [F_j \cos \theta_3 - K_j \sin \theta_3]\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Psi = \arctg(\tg \theta_1 \sin \theta_2)$;

$$\begin{aligned} P_j &= (-1)^{\left\lfloor \frac{l-1}{5} \right\rfloor} \left\{ 4\delta_{12} \sin \frac{\pi}{8} - 2(\sqrt{2} \delta_{13} + \delta_{23}) \sin \left(\eta_j - \frac{\pi}{8} \right) - 2\delta_{23} \left(1 - 2 \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left| \cos \frac{l\pi}{2} \right| \right) \cos \left(\eta_j - \frac{\pi}{8} \right) \right\} \left(1 + \sin^2 \frac{\pi}{8} \right)^{-\frac{1}{2}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_j &= (-1)^{\left\lfloor \frac{l-1}{5} \right\rfloor} \left\{ 4\delta_{12} + 2(\sqrt{2} \delta_{13} + \delta_{23}) \sin \frac{\pi}{8} \sin \left(\eta_j - \frac{\pi}{8} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2\delta_{23} \left(1 - 2 \left| \cos \frac{l\pi}{2} \right| \right) \sin \frac{\pi}{8} \cos \left(\eta_j - \frac{\pi}{8} \right) \right\} \left(1 + \sin^2 \frac{\pi}{8} \right)^{-\frac{1}{2}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_j &= (-1)^{\left\lfloor \frac{l-1}{5} \right\rfloor} \left\{ 2(\sqrt{2} \delta_{13} + \delta_{23}) \cos \left(\eta_j - \frac{\pi}{8} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - 2 \left| \cos \frac{l\pi}{2} \right| \right) 2\delta_{23} \sin \left(\eta_j - \frac{\pi}{8} \right) \right\}. \end{aligned}$$

При рассмотрении тетраэдрического отражателя в качестве автоколлимационного датчика угловых отклонений важно установить условия существования однозначной и достаточно простой связи координат отраженных пучков x и y с углами поворота θ_1, θ_2 и θ_3 . Из (5) следует, что при

$$F_j = 0, K_j = 0, \text{ либо } P_j = 0, F_j = 0 \quad (6)$$

обеспечиваются условия независимого и более точного определения коллимационных углов, либо угла скручивания по положению сечения отраженного пучка (изображения) в плоскости анализа xOy .

Условия (6) сводятся к установлению оптимальных соотношений между отступлениями двугранных углов δ_{ik} , при которых достигается наиболее эффективное использование исследуемого отражателя в качестве автоколлимационного датчика угловых отклонений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ханюх Б. Ю. Оптические отражатели тетраэдрического типа в активных системах. — Минск, 1982.
2. Мусьяков В. Л., Панков Э. Д. Об одном способе определения взаимного раворота объектов (скручивания). — Известия вузов СССР, Приборостроение, 1975, т. 18, № 4, с. 105.
3. Процко С. В., Ханюх Б. Ю., Хапалюк А. П. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1983, № 3, с. 3.
4. Кори Г., Кори Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М., 1974.

КОРРЕЛЯЦИЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ИНТЕНСИВНОСТЕЙ ИК ПОЛОС ПО МОДЕЛИ ЭФФЕКТИВНЫХ ЗАРЯДОВ И ПО ВАЛЕНТНООПТИЧЕСКОЙ СХЕМЕ

В настоящее время выполнено большое количество работ, посвященных расчету электрооптических параметров и интенсивностей в инфракрасных спектрах соединений различных классов на основе валентно-оптической теории [1—5] и теории интенсивностей Маянца — Авербуха [6, 7]. Результаты ряда из них представлены в монографии [5]. Трудности выполнения полуэмпирических расчетов заключаются в неоднозначности выбора знаков производных дипольного момента молекулы по нормальным координатам, большим числом параметров и недостаточной точностью вычисления силовых постоянных. Все это вызывает необходимость применения разнообразных методов исследования и схем расчета. Большое значение при разрешении упомянутых неопределенностей имеет применение методов квантовой механики для вычисления, по крайней мере, части параметров, определяющих интенсивности. Вместе с тем основное значение имеют все же полуэмпирические методы расчета электрооптических параметров по экспериментальным значениям интенсивностей. В работе [8] получена формула для дипольного момента молекулы на основе схемы молекулярных орбиталей в рамках приближенного метода NDDO, из которой следует полуэмпирический способ расчета интенсивностей по модели эффективных атомных зарядов. Представляет интерес рассмотреть схему расчета производных дипольного момента молекулы по нормальным координатам по модели эффективных зарядов применительно к *sp* гибридизации. В частном случае органических соединений такой подход будет более точно отражать свойства электронной плотности молекулы с использованием базисных функций типа Фока — Петрашнев. На основе полученных результатов представляет интерес вывести аналитические выражения для производных дипольного момента молекул типа U_2V_6 симметрии D_{3d} по нормальным координатам. Такой структурой характеризуются молекулы этана, дисилана и дигермана и их дейтеропроизводные. Молекулы этих практически важных соединений могут иметь геометрию с валентными углами, отклоняющимися от тетраэдрических. Сопоставление с производными дипольного момента этих молекул по нормальным координатам, полученными Л. М. Свердловым и сотрудниками [5] на основе параметризации по валентно-оптической теории, дает возможность получить формулы для основных параметров валентно-оптической теории μ , и $\partial\mu_i/\partial q_i$ как функций параметров квантово-механического метода по модели эффективных атомных зарядов ζ_i , δ_i и их производных по колебательным координатам [8].

1. Метод расчета производных дипольного момента молекул по нормальным координатам. Характерные особенности интенсивности ИК полос определяются производными дипольного момента молекулы $\bar{\mu}$ в основном электронном состоянии по нормальной координате Q_i , который выражается формулой [8]

$$\bar{\mu} = \sum_k e(Z_k - \omega_k) \bar{R}_k - 2e \sum_v \bar{q}_v(\bar{r}) \bar{r} \bar{q}_v(\bar{r}) dv, \quad (1)$$

где \bar{R}_k — радиус-вектор k -го ядра с порядковым номером Z_k ; ω_k — число электронов на внутренних оболочках этого ядра; \bar{q}_v — валентная молекулярная орбиталь однодетерминантной волновой функции, молекулы; \bar{r} — радиус-вектор электрона. Целесообразно функции \bar{q}_v представить в виде разложения по базисным атомным орбитальям $\chi_{\nu k}(r_k)$ как функций координат с началом на k -ом ядре

$$\varphi(r) = \sum_k \sum_{\mu} c_{\mu k} \chi_{\mu k}(r_k). \quad (2)$$

Подстановка выражения (2) в (1), пренебрежение двухатомным дифференциальным перекрытием в рамках приближенного метода *NDDO* и применение подстановки $\vec{r}_h = \vec{R}_h + \vec{r}_k$, где \vec{r}_k — радиус-вектор электрона относительно k -го ядра, приводят при наличии *sp* гибридизации в молекулярных орбиталях к выражению для дипольного момента молекулы в виде суммы двух слагаемых

$$\mu = \mu_1 + \mu_2. \quad (3)$$

Первое слагаемое составляют члены с эффективными зарядами ζ_k

$$\vec{\mu}_1 = \sum_k \zeta_k \vec{R}_k. \quad (4)$$

Введя обозначение электронной плотности на k -ом атоме, обусловленной валентными электронами,

$$Q_k = \sum_{\nu} 2 \sum_{\mu} c_{\mu k}^{-} c_{\mu k},$$

видим, что эффективные заряды в (4) принимают следующее выражение: $\zeta_k = e(Z_h - \omega_h - Q_k)$.

Второе слагаемое в (3) представляет собой вектор

$$\mu_2 = \sum_k \sum_{\nu} -\frac{4e}{\sqrt{3}} c_{\nu, ns, k} \begin{pmatrix} c_{\nu, np_x, k} \\ c_{\nu, np_y, k} \\ c_{\nu, np_z, k} \end{pmatrix} \int R_{n0}(r_k) r_k^3 R_{n1}(r_k) dr_k, \quad (5)$$

где $R_{nl}(r_k)$ — радиальные функции базисных орбиталей $\chi_{\mu k}$ при главном квантовом числе n . Коэффициенты $c_{\nu, np_x, k}, \dots, c_{\nu, np_z, k}$ выражают направленность ν -ой молекулярной орбитали в равновесной конфигурации молекулы. Известно, что для σ связей они пропорциональны направляющим косинусам вектора, направленного вдоль связи. Обычно каждая валентная $\varphi_{\nu}(r)$ ассоциируется с определенной связью. Этот факт означает, что коэффициенты при функциях атомов этой связи в данной молекулярной орбите достаточно велики. На этом основании рассматриваем векторы

$$\vec{d}_{kl} = \sum_{\nu} -\frac{4e}{\sqrt{3}} c_{\nu', ns, k} \begin{pmatrix} c_{\nu', np_x, k} \\ c_{\nu', np_y, k} \\ c_{\nu', np_z, k} \end{pmatrix} \int R_{n0} r_k^3 R_{n1} dr_k, \quad (6)$$

где индекс ν' включает только орбитали, ассоциированные с одной связью между атомами k и l . В результате получим, что сумма по ν в выражении (5) представляет собой сумму векторов, направленных вдоль связей.

$$\vec{\mu}_2 = \sum_k \sum_l \vec{d}_{kl} = \sum_{(kl)} (\vec{d}_{kl} + \vec{d}_{lk}),$$

где суммирование по сочетаниям атомов k, l , образующих связь. Векторы \vec{d}_{kl} и \vec{d}_{lk} коллинеарны и составляют вектор $\vec{d}_{kl} = \vec{d}_{kl} + \vec{d}_{lk}$. Нумеруя связи индексом m и обозначая единичные векторы связей \vec{e}_m , имеем $\vec{d}_{kl} = \delta_m \vec{e}_m$, поэтому дипольный момент молекулы выражается формулой

$$\vec{\mu} = \sum_k \zeta_k \vec{R}_k + \sum_m \delta_m \vec{e}_m. \quad (7)$$

Можно принять в достаточно высоком приближении, что модули векторов d_{kl} , определяемых выражением (6), не изменяются при нормальных колебаниях. В случае водородоподобных базисных функций χ_2 и χ_{2p} , имеющих одинаковый показатель экспоненты $Z'/2$, имеем

$$\int R_{20} r_k^3 R_{21} dr_k = -\frac{31}{2} a_0. \quad (8)$$

В соответствии с теорией малых колебаний изменение длины связей при колебаниях молекул малы в сравнении с длинами самих связей. На основании вариационного квантовомеханического метода, в котором в качестве варьируемых параметров берутся показатели экспонент базисных функций и длины связей, можно заключить, что показатели экспонент базисных функций сохраняют постоянное значение при нормальных колебаниях. Поэтому интегралы типа (8) не изменяются при нормальных колебаниях. Аналогичным образом в соответствии с теорией малых колебаний модуль вектора с компонентами $C_{\nu, n\rho, k}$, $C_{\nu, n\rho, k}$, $C_{\nu, n\rho, k}$ и коэффициент $C_{\nu, ns, k}$ остаются постоянными. Поэтому векторы \vec{d}_k в выражении (6) практически остаются постоянными по модулю при нормальных колебаниях. Согласно (7), изменение дипольного момента состоит из трех частей

$$\Delta \vec{\mu} = \sum_k \zeta_k^{(0)} \Delta R_k + \sum_k \Delta \zeta_k \vec{R}_k^{(0)} + \sum_m \delta_m^{(0)} \Delta \vec{e}_m. \quad (9)$$

В работе [9] дипольный момент молекулы рассматривается только как сумма произведений эффективных атомных зарядов на радиусы-векторы ядер и изменение дипольного момента молекулы состоит из двух частей. Обозначая x_1, x_2, \dots естественные колебательные координаты и вводя в качестве параметров производные эффективных зарядов по колебательным координатам, получаем формулу расчета производных дипольного момента молекул по Q_k :

$$\frac{\partial \vec{\mu}}{\partial Q_s} = \sum_k \zeta_k^{(0)} \frac{\partial \vec{R}_k}{\partial Q_s} + \sum_k \left(\sum_j \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial Q_s} \right) \vec{R}_k^{(0)} + \sum_m \delta_m^{(0)} \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial Q_s}, \quad (10)$$

которая дает расчетную схему полуэмпирического метода расчета интенсивностей. Учитывая условие нормировки молекулярных орбиталей, получаем $\sum_k Q_k = n$, где n — число валентных электронов. Поэтому эффективные заряды подчинены следующему условию:

$$\sum_k \zeta_k = 0. \quad (11)$$

Условие (11) и следствия из него следует присоединить к уравнению (10).

2. Расчет производных дипольного момента молекул типа этана U_2V_6 симметрии D_{3d} по нормальным координатам. Согласно дополненному методу, основанному на модели эффективных атомных зарядов, производная дипольного момента μ по нормальной координате представляет собой сумму трех слагаемых

$$\left(\frac{\partial \vec{\mu}}{\partial Q_r} \right)^S = \left(\frac{\partial \vec{\mu}^{(1)}}{\partial Q_r} \right)^S + \left(\frac{\partial \vec{\mu}^{(2)}}{\partial Q_r} \right)^S + \left(\frac{\partial \vec{\mu}^{(3)}}{\partial Q_r} \right)^S, \quad (12)$$

где S — обозначение типа симметрии колебания. Обозначим через $\zeta_v^{(0)}$ и $\vec{a}_v^{(r)}$ эффективный заряд и смещение атома с индексом v при r -ом нормальном колебании соответственно. Для данных молекул имеем

$$\left(\frac{\partial \vec{\mu}^{(1)}}{\partial Q_r} \right)^S = \sum_{i=1}^6 \zeta_v^{(0)} \vec{a}_i^{(r)} + \sum_{i=1}^2 \zeta_u^{(0)} \vec{a}_{u_i}^{(r)}. \quad (13)$$

Выражение (13) определяется значениями эффективных зарядов $\zeta_v^{(0)}$ и $\zeta_u^{(0)}$ в равновесной конфигурации молекулы. Для нейтральной молекулы имеем

$$3\zeta_v^{(0)} + \zeta_u^{(0)} = 0. \quad (14)$$

Применяя обозначения $\vec{R}_k^{(0)}$ и x_k соответственно для радиуса-вектора для i -го ядра и колебательной координаты, получаем

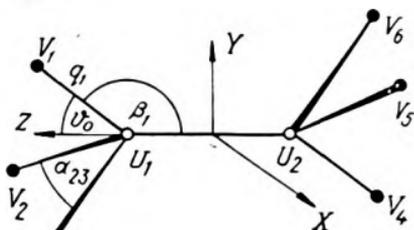
$$\left(\frac{\partial \vec{\mu}^{(2)}}{\partial Q_r}\right)^S = \sum_k \left[\sum_{i=1}^6 \vec{R}_{v_i}^{(0)} \frac{\partial \vec{z}_{v_i}}{\partial x_k} + \vec{R}_{u_i}^{(0)} \frac{\partial \vec{z}_{u_i}}{\partial x_k} + \vec{R}_{u_i} \frac{\partial \vec{z}_{u_i}}{\partial x_k} \right] \frac{\partial x_k}{\partial Q_r}. \quad (15)$$

Формула (15) описывает изменение дипольного момента молекулы вследствие изменения эффективных зарядов при нормальном колебании. Третий член в сумме (1) обусловлен гибридизацией базисных орбиталей, участвующих в молекулярных орбиталях. В результате дипольный момент δ_{uv} может быть направлен приблизительно вдоль связи $u-v$. Он не изменяется по модулю при растяжении связи и вносит вклад в интенсивность только в результате поворота этой связи при колебании, поэтому треть слагаемое суммы (12) имеет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \vec{\mu}^{(3)}}{\partial Q_r}\right)^S &= \sigma_{uv}^{(0)} \delta_{uv}^{(0)} \sum_{i=1}^3 \left[\vec{a}_{v_i}^{(r)} - \vec{a}_{u_i}^{(r)} - \vec{e}_{uv_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_r} \right] + \\ &+ \sigma_{uv}^{(0)} \delta_{uv}^{(0)} \sum_{i=4}^6 \left[\vec{a}_{v_i}^{(r)} - \vec{a}_{u_i}^{(r)} - \vec{e}_{uv_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_r} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где \vec{e}_{uv_i} — единичные векторы связей $u-v$; $\sigma_{uv}^{(0)}$ — обратная величина длины связи. В качестве параметров геометрии равновесной конфигурации молекулы приняты длины связей $S_{uv}^{(0)}$ и острый угол θ_0 между осью

молекулы и связью $u-v$. Введенные колебательные координаты представлены на рисунке. В инфракрасном спектре активны две и три частоты типов симметрии соответственно A_{2u} и E_u . Методика расчета производных дипольного момента молекул по нормальным координатам включает применение координат симметрии как функций смещений ядер и условий Экарта. В дальнейшем производится переход во всех слагаемых суммы (12) к координатам симметрии как функциям колебательных координат.



Введенные естественные колебательные координаты молекул U_2V_6 симметрии D_{3d}

Применяя координаты симметрии как функции смещений атомов в формулах (13)–(16), условия Экарта и (14), переходя затем к координатам симметрии как функциям естественных колебательных координат, по формуле (12) получаем производные дипольного момента молекулы по нормальным координатам.

Тип симметрии A_{2u} :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mu_x}{\partial Q_r}\right)^{A_{2u}} &= \sqrt{6} \left\{ \cos \theta_0 X^{A_{2u}} \frac{\partial q^{A_{2u}}}{\partial Q_r} + S_{uv}^{(0)} \sin \theta_0 Y^{A_{2u}} \frac{\partial \beta}{\partial Q_r} \right\}, \\ X^{A_{2u}} &= \zeta_v^{(0)} + S_{uv}^{(0)} \frac{\partial \vec{z}_{v_1}}{\partial q_1} + 2S_{uv}^{(0)} \frac{\partial \vec{z}_{v_2}}{\partial q_2}, \\ Y^{A_{2u}} &= \zeta_v^{(0)} + \sigma_{uv}^{(0)} \delta_{uv}^{(0)} + \operatorname{ctg} \theta_0 \left[\frac{\partial \vec{z}_{v_1}}{\partial \beta_1} + 2 \frac{\partial \vec{z}_{v_2}}{\partial \beta_2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\sqrt{3} \cos \theta_0}{1 + 3 \cos^2 \theta_0} \left(\frac{\partial \vec{z}_{v_3}}{\partial \alpha_{23}} + 2 \frac{\partial \vec{z}_{v_4}}{\partial \alpha_{12}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Тип симметрии E_u :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mu_y}{\partial Q_r}\right)^{E_u} &= \sqrt{3} \left\{ \sin \theta_0 X^{E_u} \frac{\partial q^{E_u}}{\partial Q_r} - 2S_{uv}^{(0)} \cos \theta_0 Y^{E_u} \frac{\partial \beta^{E_u}}{\partial Q_r} + \right. \\ &\quad \left. + S_{uv}^{(0)} \sqrt{\frac{1 + 3 \cos^2 \theta_0}{3}} Z^{E_u} \frac{\partial \alpha^{E_u}}{\partial Q_r} \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 X^{E_u} &= \zeta_v^{(0)} + S_{uv}^{(0)} \frac{\partial \zeta_{v_1}^{(0)}}{\partial q_1} - S_{uv}^{(0)} \frac{\partial \zeta_{v_2}^{(0)}}{\partial q_2}, \\
 Y^{E_u} &= \zeta_v^{(0)} + \sigma_{uv}^{(0)} \delta_{uv}^{(0)} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta_0 \left(\frac{\partial \zeta_{v_1}^{(0)}}{\partial \beta_1} - \frac{\partial \zeta_{v_2}^{(0)}}{\partial \beta_2} \right), \\
 Z^{E_u} &= \zeta_v^{(0)} + \sigma_{uv}^{(0)} \delta_{uv}^{(0)} + \sin \theta_0 \sqrt{\frac{3}{1 + 3 \cos^2 \theta_0}} \left(\frac{\partial \zeta_{v_1}^{(0)}}{\partial \alpha_{23}} - \frac{\partial \zeta_{v_2}^{(0)}}{\partial \alpha_{13}} \right).
 \end{aligned}$$

Сопоставление линейных комбинаций параметров $X^{A_{2u}}, Y^{A_{2u}}, X^{E_u}, Y^{E_u}, Z^{E_u}$ с соответствующими линейными комбинациями параметров, полученных в соответствии с валентнооптической теорией [5] при $\cos \theta_0 = 1/3$, приводит к следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mu_{uv_1}}{\partial q_1} &= \zeta_v^{(0)} + S_{uv}^{(0)} \frac{\partial \zeta_{v_1}^{(0)}}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \mu_{uv_2}}{\partial q_2} = S_{uv}^{(0)} \frac{\partial \zeta_{v_2}^{(0)}}{\partial q_2}, \\
 \frac{1}{S_{uv}^{(0)}} \mu_{uv}^{(0)} &= \zeta_v^{(0)} + \sigma_{uv}^{(0)} \delta_{uv}^{(0)}, \\
 \frac{1}{S_{uv}^{(0)}} \frac{\partial \mu_{uv_1}}{\partial \beta_1} &= \frac{\partial \zeta_{v_1}^{(0)}}{\partial \beta_1}, \quad \frac{1}{S_{uv}^{(0)}} \frac{\partial \mu_{uv_2}}{\partial \alpha_{13}} = \frac{\partial \zeta_{v_2}^{(0)}}{\partial \alpha_{13}},
 \end{aligned} \tag{19}$$

причем $i=1, 2$.

Таким образом, для молекул углеводородов и других соединений имеется взаимосвязь по формулам (19) параметризации по валентнооптической теории и параметризации по модели эффективных атомных зарядов и их производных по колебательным координатам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волькенштейн М. В., Ельяшевич М. А., Степанов Б. И. Колебания молекул.— М.— Л., 1949, т. 2.
2. Волькенштейн М. В.— Докл. АН СССР, 1941, т. 32, с. 185; ЖЭТФ, 1941, т. 11, с. 642.
3. Волькенштейн М. В., Грибов Л. А., Ельяшевич М. А., Степанов Б. И. Колебания молекул.— М., 1972.
4. Свездлов Л. М.— Оптика и спектроскопия, 1961, т. 10, с. 76, 371.
5. Свездлов Л. М., Ковнер М. А., Крайнов Е. П. Колебательные спектры многоатомных молекул.— М., 1972.
6. Маянц Л. С., Двербух Б. С. Теория и расчет интенсивностей в колебательных спектрах молекул.— М., 1971.
7. Mayants L. S., Averbukh V. S.— J. Mol. Spectrosc., 1967, v. 22, p. 197.
8. Прима А. М., Прима В. М., Ковриков А. Б., Умрейко Д. С.— Вестн. МН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1981, № 1, с. 89.
9. Decius J. C.— J. Mol. Spectrosc., 1975, v. 57, p. 348.

Поступила в редакцию
25.02.82.

ИИИ ФФП

УДК 621.396.67.012.12

А. Б. ТЕРЕХОВИЧ, В. А. КАПЛУН,
В. А. РАБОТЯГИН, В. М. ЗЕЛЕНКЕВИЧ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАШИННЫХ МЕТОДОВ ПРИ РАЗРАБОТКЕ АНТЕННЫХ ОБТЕКАТЕЛЕЙ

Эксплуатация радиоэлектронных систем (РЭС) совместно с обтекателями (укрытиями) приводит к необходимости рассмотрения единой системы «антенна — обтекатель». Высокие требования, предъявляемые к тактико-техническим характеристикам систем «антенна — обтекатель», требуют уже на стадии раннего проектирования всестороннего анализа большого числа возможных технических решений [1]. В настоящее время уровень развития вычислительной техники и программирования позво-

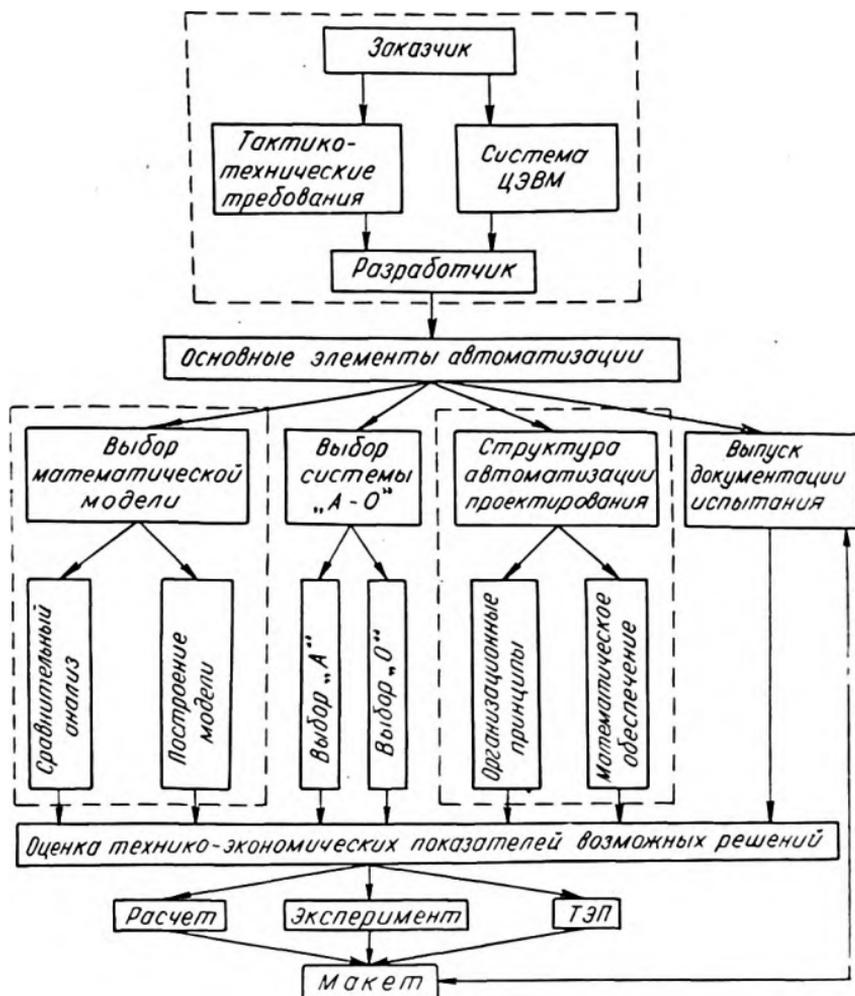


Рис. 1.

ляет эффективно использовать при разработке систем «антенна — обтекатель» машинные методы [2, 3].

Проектирование излучающих систем «антенна — обтекатель» является сложным итеративным процессом, содержащим несколько этапов: а) выбор структуры системы «антенна — обтекатель», разбивка ее на функционально законченные части, выработка критериев проектирования. Этот этап практически не формализуется;

б) анализ процессов в системе «антенна — обтекатель», разработка математического описания, выбор метрического пространства, варьируемых параметров. Этот этап частично формализуется и может быть сведен к задачам машинного моделирования и анализа излучающих систем «антенна — обтекатель»;

в) этап технического конструирования и выпуска технической документации на машинных носителях (перфокарты, перфоленты и др.) или выдача результатов на АЦПУ.

В общем случае структурная схема автоматизации электродинамического расчета систем «антенна — обтекатель» может быть представлена в виде элементарных блоков (рис. 1).

Одним из самых ответственных этапов проектирования излучающих систем «антенна — обтекатель» является разработка технического задания, в результате которой определяется группа элементарных требований, которые затем формализуются в виде целевых функций или ограничений. В общем случае задачи подобного типа формулируются следующим образом: в пространстве варьируемых параметров X найти вектор A , доставляющий некоторой целевой функции $F(X)$ минимум или максимум при выполнении ряда условий $R_i(X) \leq R_{oi}$. Методология поиска решения является специальным вопросом, частично описываемым в разделах современной математики и прикладной электродинамики [4, 5].

Важнейшим этапом автоматизации проектирования систем «антенна — обтекатель», базирующейся на машинном моделировании, является выбор и обоснование математической модели. Однако изучение и управление такими сложными системами, как излучающие системы «антенна — обтекатель», требуют создания электродинамических моделей высокого уровня [6], что, к сожалению, не обеспечивается имеющимися ЭВМ. Следует отметить, что не во всех случаях необходимо при моделировании стремиться к условиям высокой точности, поэтому возможно создание более выгодных, упрощенных моделей с повышенным быстродействием. Существующие затруднения могут быть решены созданием многоуровневой структуры электродинамических моделей [7].



Рис. 2.

В общем случае структурная схема построения модели системы «антенна — обтекатель» может быть представлена в следующем виде (рис. 2). Сравнительный анализ различных математических моделей, их эффективности позволяет выбрать базовую математическую модель для автоматизации проектирования систем «антенна — обтекатель». Целесообразно воспользоваться математическими моделями на интегральных преобразованиях Фурье, Френеля, свертке или их комбинациях. Такие математические модели позволяют быстро и эффективно обрабатывать большие массивы входной информации, так как используют алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ) и цифровой фильтрации [8, 9].

Сложность задач, выдвигаемых автоматизацией проектирования излучающих систем «антенна — обтекатель» требует применения системного подхода к разработке программного и методологического обеспечения, который может характеризоваться основными общесистемными принципами: включения, системного единства, развития, совместимости и т. д. [10]. Системный подход к проектированию антенных обтекателей обеспечивается комплексной разработкой технических и методологических средств вычислительной техники, разработкой не отдельных алгоритмов, а целой совокупности средств, обеспечивающих максимальное

использование ЭВМ на всех этапах проектирования излучающих систем «антенна — обтекатель».

Элементы автоматизации проектирования систем «антенна — обтекатель» можно представить в виде структуры (рис. 3), основной частью которой является комплекс прикладных программ для машинного моделирования и исследования систем «антенна — обтекатель». Характерной особенностью комплекса прикладных программ является его многоуровневый характер (рис. 4). На первом уровне обычно располагаются основные вычислительные и сервисные программы, а на более высоких уровнях — управляющие программы, осуществляющие автоматическое взаимодействие частей нижнего уровня. Назначение некоторых из них заключается в следующем: «управляющая программа» задает последовательность вызова модулей и процессов передачи массива данных; диспетчер «Управление» предназначен для вызова модулей, обработки сообщений, поступающих от модулей и передачи управления в управляющую программу после окончания работы модуля; диспетчер «Технические решения» определяет функциональные назначения модулей, участвующих в решении рассматриваемой задачи; «информатор» предназначен для информационного ознакомления пользователя с правилами работы с пакетом прикладных программ.

При разработке такого специализированного комплекса прикладных программ необходимо решить две основные задачи: а) разработать структуру и провести классификацию излучающих систем «антенна — обтекатель»; б) стандартизировать и унифицировать как сами обтекатели, так и методы их анализа и синтеза.

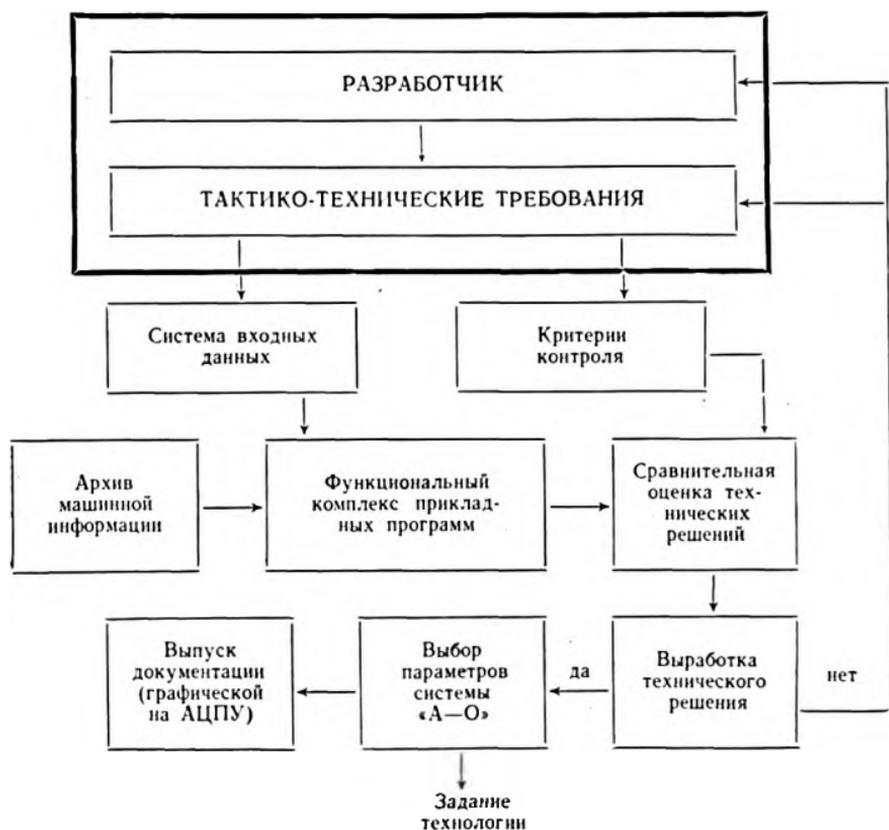


Рис. 3.

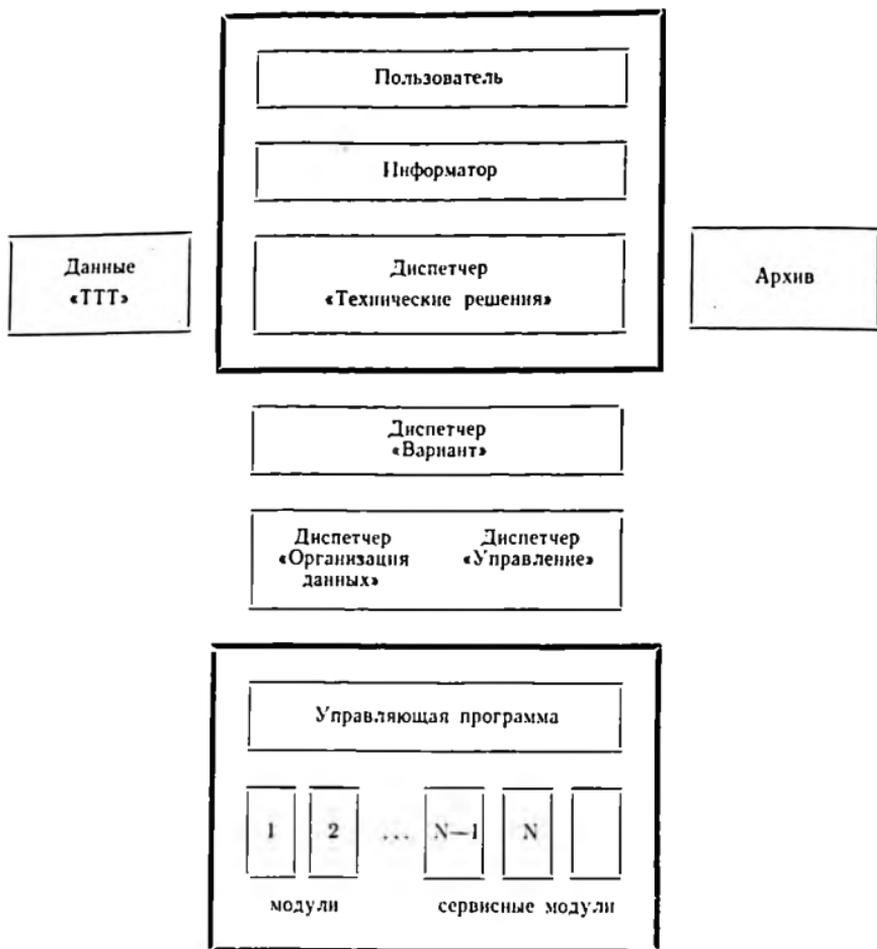


Рис. 4.

На наш взгляд, перечисленные задачи могут быть разрешены при разработке иерархических моделей стандартных проектных операторов (СПО), которые объединены в специализированную библиотеку стандартных проектных операторов (БСПО) для машинного моделирования и исследования излучающих систем «антенна — обтекатель». Такой подход позволит систематически улучшать детализацию и вычислительную сложность отдельных операторов и всей библиотеки в целом. Полная и достоверная реализация библиотеки стандартных проектных операторов возможна лишь при наличии комплексов вариантов СПО и математического обеспечения к ним. При синтезе проектных решений с применением ЭВМ с помощью различных сочетаний стандартных проектных операторов, в соответствии с типом задач и стадиями проектирования, можно получить оптимальное решение для систем различного класса и назначения. Использование таких операторов в автоматизированной системе, при наличии соответствующего математического аппарата, дает возможность сконцентрировать поиск на ограниченном участке возможных решений и выбрать единственно целесообразное, при данных условиях, путем многовариантного поиска.

Дальнейшая разработка и уточнение формализуемых требований и стандартных проектных операторов позволит вплотную приблизиться к

формализации самой творческой части процесса проектирования — разработке и принятия технического решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каплун В. А. Обтекатели антенн СВЧ.— М., 1974.
2. Зеленкевич В. М., Терехович А. Б., Уланов Р. Т. Численное моделирование диаграммы направленности СВЧ антенн при наличии защитного обтекателя.— Тез. докл. на респ. НТК: Проблемы применения современных радиофизических методов для повышения эффективности производства и автоматизации научных исследований. Минск, 1981.
3. Замятин В. И., Ключников А. С., Швецов В. И. Антенные обтекатели.— Минск, 1980.
4. Анго А. Математика для электро- и радионинженеров.— М., 1964.
5. Митра Р. Вычислительные методы электродинамики.— М., 1977.
6. Никольский В. В. Методы построения моделей электродинамического уровня в машинном проектировании устройств СВЧ.— В сб.: Машинное проектирование устройств и систем СВЧ. Тбилиси, 1979.
7. Никольский В. В. и др. Система машинного проектирования устройств СВЧ.— В сб.: Машинные методы проектирования СВЧ-устройств. М., 1976.
8. Бахрах Л. Д., Курочкин А. П. Голография в микроволновой технике.— М., 1979.
9. Зеленкевич В. М., Ключников А. С.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 2, с. 11.
10. Жук К. Д. Методы системного проектирования как основа разработки САПР.— Препринт 76—1, ИК АН УССР, Киев, 1976.

Поступила в редакцию
20.09.82.

Кафедра физики

УДК 539.16

В. А. НОСИЛОВСКАЯ

ОДНОЧАСТИЧНАЯ ОЦЕНКА ЯДЕРНОГО МАТРИЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МОНОПОЛЯ ЯДРА ^{197}Au В МОДЕЛИ САКСОНА — ВУДСА

Опубликовано небольшое число работ, в которых экспериментально изучались $E0$ переходы в нечетных ядрах [1—3]. В работе [2], в частности, изучен переход $191 \text{ кэВ } ^{197}\text{Au}(1/2^+ \rightarrow 1/2^+)$ мультипольности $E0 + M1 + E2$, а также дана экспериментальная оценка верхней границы ядерного матричного элемента электрического монополя ядра ^{197}Au $\text{Рексп}(E0)$.

Целью данной работы является получение теоретической одночастичной оценки ядерного матричного элемента электрического монополя ядра ^{197}Au . Последнее обычно относят к сферическим ядрам, поэтому в работе применяется метод получения ядерных волновых функций в аналитическом виде, развитый, например, в работах [4, 5]. Ядерный потенциал выбирался в виде:

$$V(r) = V_{S-w}(r) + V_{S-o}(r) + V_C(r) + V_{u.o.}(r),$$

где потенциал Саксона-Вудса $V_{S-w}(r) = V_0 \left\{ 1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{\eta}\right) \right\}^{-1}$, а явный вид спин-орбитального члена $V_{S-o}(r)$, члена, учитывающего кулоновское взаимодействие $V_C(r)$, и центробежного члена $V_{u.o.}(r)$ можно найти, например, в [4—6]. Параметры, входящие в ядерный потенциал, применительно к рассматриваемому случаю найдены согласно оценке Немировского и Чепурнова [7]:

| V_0 , МэВ | $\kappa (f^2)$ | $\eta (f)$ | $R_0 (f)$ |
|-------------|----------------|------------|-----------|
| 59,610 | 0,367 | 0,66 | 6,9824 |

Здесь κ — константа спин-орбитального взаимодействия; η — параметр диффузности края ядерной поверхности; R_0 — эквивалентный радиус ядра.

Волновую функцию нечетного протона можно записать следующим образом:

$$\Psi_{nif}^2 = R_n \cdot Y_{if}^2, \quad (1)$$

где радиальную часть R_n этой функции, получаемую с помощью рассматриваемого потенциала, согласно [4, 5], можно представить в виде

$$R_n \cdot r = N_n (dS/dr)^{-1/2} \exp(-S^2/2) H_n(S). \quad (2)$$

Корректирующая функция $S(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_{-1/\sqrt{E}}^S (E - \delta^2)^{1/2} d\delta = \int_{r_1}^r p(\xi) d\xi, \quad (3)$$

где $p(\xi) = \sqrt{2M_p/\hbar^2(E - V(\xi))}$ — квазиклассический импульс протона; r_1 — точка поворота; функция $S(r)$ выбирается таким образом, чтобы она обращалась в нуль одновременно с $p(\xi)$; N_n — нормировочная константа; n — число узлов радиальной волновой функции, $H_n(S)$ — полиномы Чебышева — Эрмита.

Спин-угловая функция Y_{if}^2 равна (см., например, [8]):

$$Y_{if}^2 = \sum_{\Sigma = -1/2}^{+1/2} \langle 11/2 \Lambda \Sigma | j \Omega \rangle Y_{1\Lambda}(\Theta, \Phi) |\Sigma\rangle. \quad (4)$$

Здесь Ω — проекция полного углового момента j , $\langle 11/2 \Lambda \Sigma | j \Omega \rangle$ — коэффициенты Клебша — Гордана; $|\Sigma\rangle$ — собственная функция оператора спина протона.

Уравнение (3) для корректирующей функции $S(r)$ можно решить только численно с помощью ЭВМ. При получении нами такого решения для начального и конечного состояний значения E полагались равными экспериментальным значениям энергий рассматриваемых уровней перехода [9]. Согласно [4], $S(r)$ можно аппроксимировать следующим образом:

$$S = \begin{cases} b_1 \ln(r/a) & r \leq a, \\ b \ln(r/a) & r \geq a, \end{cases} \quad (5)$$

где a — точка, в которой $S(r)$ обращается в нуль. Множитель $(dS/dr)^{-1/2}$, входящий в (2) можно считать постоянным, учитывая тот факт, что $S(r)$ практически линейна в области, где волновая функция принимает наибольшие значения, т. е.

$$\left(\frac{dS}{dr}\right)^{-1/2} \approx \text{const} = d. \quad (6)$$

Значения полученных нами параметров a , b_1 , b и нормировочных постоянных N для начального i и конечного f состояний приведены в таблице.

Коэффициенты корректирующей функции $S(r)$ и нормировочные коэффициенты для начального и конечного состояний

| Состояние | a | b_1 | b | d | N |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| i | 0,817 | 3,103 | 3,834 | 0,476 | 0,456 |
| f | 0,833 | 3,311 | 4,105 | 0,231 | 0,972 |

Норму радиальных волновых функций, вычисленную согласно обычному определению с использованием явного вида полиномов Чебышева — Эрмита и заменой переменных $r \rightarrow S$, удобно представить в виде:

$$N_{i,f}^{-2} = d_{i,f}^2 \cdot a_{i,f} \sum_{l=1}^6 A_l I_l(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i),$$

$$\text{где } A_1 = \frac{64}{b_{1,i,l}}; A_2 = -\frac{192}{b_{1,i,l}}; A_3 = \frac{144}{b_{1,i,l}}; A_4 = \frac{64}{b_{1,i,l}}; A_5 = -\frac{192}{b_{1,i,l}},$$

$$A_6 = \frac{144}{b_{1,i,l}}; \nu_1 = \nu_4 = 7; \nu_2 = \nu_5 = 5; \nu_3 = \nu_6 = 3; \beta_i (i = 1, \dots, 6) = 1; \gamma_1 =$$

$$= \gamma_2 = \gamma_3 = \frac{1}{b_{1,i,l}}; \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = \frac{1}{b_{1,i,l}}.$$

Интегралы $I_i(\nu_i, \beta_i, \gamma_i)$ равны (см., напр., [10, 11]):

$$I_i(\nu_i, \beta_i, \gamma_i) = \int_0^{\infty} S^{\nu_i-1} \exp(-\beta_i S^2 - \gamma_i S) dS =$$

$$= (2\beta_i)^{-\frac{\nu_i}{2}} \Gamma(\nu_i) \exp\left(\frac{\gamma_i^2}{8\beta_i}\right) D_{-\nu_i}\left(\frac{\gamma_i}{\sqrt{2\beta_i}}\right). \quad (7)$$

Здесь $D_p(z)$ — функция параболического цилиндра, вычислять которую удобно, используя рекуррентные соотношения, приведенные в [4]. Для однопотонных переходов приведенный ядерный матричный элемент электрического монополя $\rho(EO)$ [12]:

$$\rho(EO) = \frac{M(EO)}{R_0^2} = \int \Psi_i^* \left(\frac{r_p}{R_0}\right)^2 \Psi_i d\tau, \quad (8)$$

где Ψ_i, Ψ_f — волновая функция протона в начальном и конечном состояниях. Поскольку интегрирование по угловым переменным в (8) дает единицу, то $M(EO) = M_r(EO)$.

Для радиальной части матричного элемента $M_r(EO)$, используя (2) и (5), можно получить:

$$M_r(EO) = N_i N_f d_i d_f \left\{ \frac{\alpha^2}{b_{1i}} \exp\left(-\frac{\bar{b}_1^2}{2}\right) \sum_{i=1}^6 A_i I_i(\nu_i, \beta_i, \gamma_i) + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha^2}{b_i} \exp\left(-\frac{\bar{b}^2}{2}\right) \sum_{i=1}^6 B_i I_i(\nu_i, \alpha_i, \eta_i) \right\}, \quad (9)$$

$$\text{где } A_1 = 64 \frac{b_{1f}^2}{b_{1i}^3}; A_2 = 192 \frac{b_{1f}^2}{b_{1i}^2} \bar{b}_1; A_3 = 96 \frac{b_{1f}}{b_{1i}} \left\{ 2\bar{b}_1^2 - 1 - \frac{b_{1f}^2}{b_{1i}^2} \right\}; A_4 =$$

$$= 32 \bar{b}_1 (2\bar{b}_1^2 - 3); A_5 = -144 \frac{b_{1f}}{b_{1i}} (2\bar{b}_1^2 - 1); A_6 = -48 \bar{b}_1 (2\bar{b}_1^2 - 3); \nu_1 =$$

$$= 7; \nu_2 = 6; \nu_3 = 5; \nu_4 = 4; \nu_5 = 3; \nu_6 = 2; \beta_k = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b_{1f}^2}{b_{1i}^2} \right); \gamma_k =$$

$$= \frac{3}{b_{1i}} - \frac{b_{1f}}{b_{1i}} \bar{b}_1; \alpha_k = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b_f^2}{b_i^2} \right); \eta_k = \frac{b_f}{b_i} \bar{b} - \frac{3}{b_i}; k = 1, 2, \dots, 6.$$

Для получения коэффициентов B_i , необходимо в выражениях для A_i произвести замену $b_{1i} \rightarrow b_i, b_{1f} \rightarrow b_f, \bar{b}_1 \rightarrow \bar{b}$. В (9) коэффициенты $a_i, a_f, b_{1i}, b_{1f}, b_i, b_f, d_i, d_f, N_i, N_f$ задаются таблицей, а интегралы I_i определены в (7). Вычисление $M(EO)$ с помощью (9) и (7) дает следующий результат: $M(EO) = 1,032 \bar{f}^2$. Окончательно $\rho(EO) = 0,021$ при $R_0 = 6,9824$. Верхняя граница $\rho_{\text{ксп}}(EO)$, указанная в [2], для этого случая равна $|\rho_{\text{ксп}}(EO)| < 0,068$. Как видим, результат укладывается в эту оценку.

Автор выражает благодарность профессору Л. А. Борисоглебскому за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воинова Н. А. и др. — Изв. АН СССР. Сер. физ., 1978, т. 42, с. 2278.
2. Бякин И. и др. — Изв. АН СССР. Сер. физ., 1977, т. 41, с. 2152.

3. Бен Брахман А. и др. Изв. АН СССР. Сер. физ., 1978, т. 43, с. 918.
4. Калинин Б. Н. и др.—Acta Physica Polonica, 1966, v. 30, p. 999.
5. Гареев Ф. А. и др.—Acta Physica Polonica, 1967, v. 32, p. 461.
6. Петрашень М. И.—Уч. зап. ЛГУ. Сер. физ., 1949, т. 120, с. 60.
7. Немировский Н. Е., Челурнов В. А.—Ядерная физика, 1966, т. 3, с. 998.
8. Ситенко А. Г., Тартаковский В. К. Лекции по теории ядра.— М., 1972.
9. Roberts L., Thomson J.—Phys. Rev., 1963, v. 129, p. 664.
10. Church E., Wenner J.—Phys. Rev., 1956, v. 103, p. 1035.
11. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции.— М., 1968.
12. Грандштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М., 1963.

Поступила в редакцию
22.10.82.

Кафедра теоретической физики

УДК 539.172.84

А. Д. ЛЕВКОВИЧ, А. И. ПЕРЦЕВ, Н. П. ТАРАСЕНКО

ХАРАКТЕРИСТИКА ^{239}Pu - ^9Be ИСТОЧНИКА НЕЙТРОНОВ ТИПА «СЭНДВИЧ»

Изотопный плутоний-бериллиевый источник нейтронов широко применяется с тех пор, как стало доступным получение в больших количествах трансураниевых элементов. Обычно такой источник представляет собой однородную смесь плутония с бериллием в виде интерметаллического соединения, помещенного в герметическую ампулу из нержавеющей стали. Использование стационарных источников нейтронов этого типа требует соответствующего санитарно-радиационного обеспечения. В данной работе рассматривается радиационно-безопасный разборный источник нейтронов, состоящий из набора промышленных α -источников (^{239}Pu) и бериллиевых фольг («Сэндвич»). В литературе отсутствует описание свойств нейтронных источников в геометрии «Сэндвич», наиболее интенсивная α -линия ^{239}Pu (72,5 %) имеет энергию 5157 кэВ, высота кулоновского барьера у ядра ^9Be для α -частиц 4 МэВ, поэтому выход реакции $^9\text{Be}(\alpha, n)^{12}\text{C}$ зависит от потери энергии α -частицы в веществе подложки. По данным работ различных авторов [1—5], исследовавших спектры нейтронов Pu — Be источников, максимальная энергия нейтронов 10,5—10,9 МэВ, средняя энергия 4,3—5 МэВ, а максимальный удельный выход $(1.8\text{—}2.2) \cdot 10^6$ нейтрон/с·Ки (один нейтрон на $2 \cdot 10^4$ α -частицы).

Для изучения нейтронного источника применялась экспериментальная установка (рис. 1). Регистрация нейтронов производилась методом протонов отдачи с использованием водородсодержащего сцинтиллятора — кристалла стибьена 40×40 мм. «Сэндвич» состоял из 4 α -источников с суммарной активностью в угол 2π $7,68 \cdot 10^6$ α -частиц/с и 4 бериллиевых фольг; площадь активной поверхности каждого α -источника и каждой фольги — 40 см^2 . Градуировка спектрометра производилась с помощью γ -линий ^{22}Na , ^{54}Mn , ^{137}Cs по краю комптоновского распределения; пере-

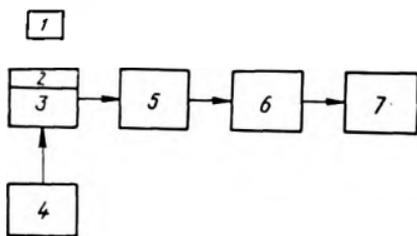


Рис. 1. Блок-схема установки:

1 — источник; 2 — кристалл стибьена; 3 — ФЭУ-85; 4 — источник высокого напряжения; 5 — усилитель БУС2-47; 6 — многоканальный анализатор АП-256; 7 — цифрочет БЗ-15

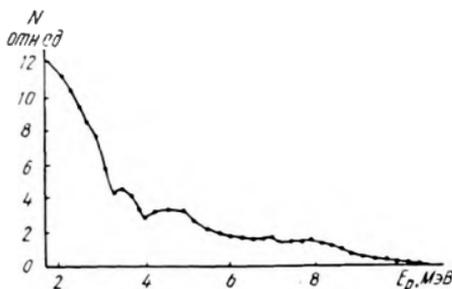


Рис. 2. Энергетическое распределение протонов отдачи, создаваемое нейтронами ^{239}Pu - ^9Be источника

ход к протонам осуществлялся путем учета P/e -отношения для кристалла стильбена [1]. Измеренное энергетическое распределение протонов отдачи представлено на рис. 2 (фон вычтен). Полученное с погрешностью 5 % значение граничной энергии нейтронов (10,6 МэВ) хорошо согласуется с теоретическими и экспериментальными данными [2, 4, 6].

При определении абсолютного выхода нейтронов эффективность регистрации для геометрии плоский источник — цилиндрический детектор рассчитывали оригинальным методом, предложенным в [7]. Расчеты проводили в приближении однократного рассеяния (согласно [1, 8]), отклонение эффективности, рассчитанной в приближении однократного рассеяния нейтронов, от эффективности регистрации с учетом других взаимодействий, для энергий ниже 12 МэВ составляют менее 0,5 %. Численные расчеты с помощью ЭВМ показали, что средний путь нейтрона в кристалле стильбена, испущенного из любой точки источника, равен 3,1 см, а средний телесный угол — 0,08; средняя эффективность регистрации составила 2,1 % (при погрешности 3 %; главный вклад в погрешность дают значения макроскопических сечений рассеяния). Абсолютный выход нейтронов составил (330 ± 10) нейтрон/с (или один нейтрон на $2,4 \cdot 10^4$ α -частиц, что хорошо согласуется с литературными данными для сплавных источников).

Восстановление энергетического спектра нейтронов осуществлялось по формуле [1]:

$$\frac{dN(E_n)}{dE_n} = - \frac{d}{dE} \left[\frac{dN_p(E_p)}{dE_p} \cdot \frac{dP}{dE} \right]_{E_n=E_p} \cdot \frac{E_n}{\epsilon} \cdot \frac{1}{\beta},$$

где $\frac{dN(E_n)}{dE_n}$ и $\frac{dN_p(E_p)}{dE_p}$ — энергетические распределения нейтронов

и протонов отдачи; $\frac{dP}{dE}$ — нелинейность световых выходов кристалла от энергии протонов; E_n — энергия нейтронов; ϵ — эффективность регистрации нейтронов с энергией E_n ; β — поправка на многократные рассеяния нейтронов в кристалле и краевой эффект. Энергетический спектр нейтронов находили методом сглаживающего дифференцирования [9], существенно понижающим требования к статистической точности эксперимента. Значение β определяли с помощью эмпирической формулы [6]. Расчеты выполнены на ЭВМ ЕС-1022 с использованием языка Фортран (рис. 3); просматриваются 6 пиков с максимумами при энергиях 3,1; 4; 5,4; 7,4; 8,4; 9,3 МэВ. Результаты измерений дифференциальных сечений реакции ${}^9\text{Be}(\alpha, n){}^{10}\text{C}$ [5, 10], а также теоретические расчеты кинематики этой реакции [2, 3, 4] позволяют утверждать, что при бомбардировке ${}^9\text{Be}$ альфа-частицами ${}^{239}\text{Pu}$ образуются группы нейтронов с энергией от 5,5 до 10,6 МэВ при образовании ядра ${}^{12}\text{C}$ в основном состоянии, и группы нейтронов с энергией от 1,9 до 6,2 МэВ при образовании ядра ${}^{12}\text{C}$ с возбуж-

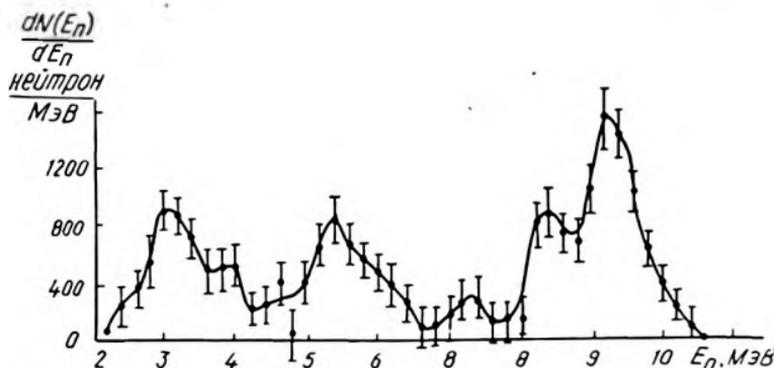


Рис. 3. Энергетический спектр нейтронов ${}^{239}\text{Pu}$ - ${}^9\text{Be}$ источника типа «Сэндвич»

денем первого уровня. В нашем случае дополнительные измерения γ -излучения нейтронного источника при помощи спектрометра полного поглощения (кристалл NaJ—Tl 100×120 мм) указывают на образование ядра ^{12}C и во втором возбужденном состоянии (энергия возбуждения 7,66 МэВ). Кроме того, в полученном спектре нейтронов относительный вклад высокоэнергетических групп нейтронов больше по сравнению с приводимыми в литературе спектрами для сплавных плутоний-бериллиевых источников [3, 11].

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что плутоний-бериллиевый источник типа «Сэндвич» с использованием промышленных α -источников имеет характеристики (максимальная энергия нейтронов, выход нейтронов, энергетический спектр нейтронов), хорошо согласующиеся с литературными данными для сплавных источников нейтронов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кухтевич В. И., Трыков О. А., Трыков Л. А. Однокристалльный сцинтилляционный спектрометр.— М., 1971.
2. Stewart L.— Phys. Rev., 1955, v. 98, p. 740.
3. Brock H. W., Anderson G. E.— Rev. Scient. Instrum., 1960, v. 31, p. 1063.
4. Anderson M. E., Bond W. H.— Nucl. Phys., 1963, v. 43, p. 330.
5. Risser J. R., Price J. E.— Phys. Rev., 1956, v. 105, p. 1288.
6. Егоров Ю. А. Сцинтилляционный метод спектрометрии гамма-излучения и быстрых нейтронов.— М., 1963.
7. Grosjean C. C.— Nucl. Instrum. and Methods, 1962, v. 17, p. 289.
8. Злотухин В. Г., Ефименко Б. А. Расчет амплитудных распределений импульсов в однокристалльном сцинтилляционном спектрометре быстрых нейтронов.— В сб.: Метод Монте-Карло в проблеме переноса излучений / Под ред. Г. И. Марчука, М., 1967, с. 149.
9. Танцощ К. Практические методы прикладного анализа / Пер. с англ.— М., 1961.
10. Romain F. A., Bonner T. W., Manna J.— Phys. Rev., 1962, v. 126, p. 1794.
11. Ciafella C. M., Deranney J. A.— Nucl. Instrum. and Methods, 1968, v. 60, p. 269.

Поступила в редакцию
16.12.82.

Кафедра ядерной физики и мирного
использования атомной энергии

УДК 541.49+546.65+547.47

Н. Н. ХОВРАТОВИЧ, О. И. ПУПЛИКОВА,
Л. Н. НЕОКЛАДНОВА, Н. А. ПРОКОШИНА

К ВОПРОСУ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ РЗЭ С ГЛИЦИНОМ

Комплексные соединения глицина с редкоземельными элементами (РЗЭ), полученные из кислых и щелочных растворов, описаны ранее [1, 2]. Получение диглицинатов РЗЭ ставилось под сомнение [1]. В то же время в работе [3] указывалось на существование диглицината неодима в водном растворе. Литературные данные относительно характера связи кислорода карбоксильной группы с металлом противоречивы. Спорным является также участие азота глицина в координации.

Применение соединений РЗЭ в качестве терапевтических препаратов в сельском хозяйстве [4, 5] делает интересным изучение комплексообразования их при физиологических значениях рН.

Нами выделены в твердом состоянии из нейтральных водных растворов комплексные соединения РЗЭ: La (лантана), Pr (празодима), Nd (неодима), Eu (европия), Gd (гадолиния), Y (иттрия) с глицином в стехиометрических соотношениях 1:1, 1:2, 1:3 по методике, аналогичной [6]. Соединения высушивались в эксикаторе над хлористым кальцием. Химический анализ полученных соединений приведен в таблице. Данные анализа глицинатов РЗЭ, неоднократно синтезированных и перекристаллизованных из воды, показывают, что мы имеем индивидуальные соединения. Дериватографические исследования свидетельствуют о наличии мо-

лекул воды в комплексах. Удаление воды при различных температурах позволило предположить ее двойной характер: внешнесферный (кристаллизационный) и внутрисферный (координационный) [7].

С целью выяснения характера связывания РЗЭ с различными функциональными группами глицина исследованы колебательные спектры поглощения полученных соединений в области 4000—400 см⁻¹. ИК спектры сняты на приборе UR-20 с использованием методики прессования в КВг. Отнесение полос в глицине сделано с учетом литературных данных [8—10].

Данные химического анализа глицинатов лантана, празеодима, неодима, гадолиния, европия

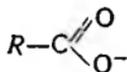
| Соединение | Соотношение глицин в растворе | Металл, % | | Хлор, % | | Вода, % | |
|---|-------------------------------|-----------|-----------|---------|-----------|---------|-----------|
| | | найдено | вычислено | найдено | вычислено | найдено | вычислено |
| LaCl ₃ ·Gl·3H ₂ O | 1 : 1 | 37,60 | 37,3 | 27,00 | 28,40 | 13,35 | 12,93 |
| LaCl ₃ ·Gl ₂ ·H ₂ O | 1 : 2 | 33,07 | 33,63 | 23,80 | 25,60 | 4,50 | 4,35 |
| LaCl ₃ ·Gl ₃ | 1 : 3 | 30,09 | 29,60 | 22,77 | 22,77 | — | — |
| PrCl ₃ ·Gl·H ₂ O | 1 : 1 | 38,03 | 39,0 | 25,30 | 31,10 | 4,90 | 5,20 |
| PrCl ₃ ·Gl ₂ ·2H ₂ O | 1 : 2 | 32,30 | 32,50 | 25,80 | 24,50 | 7,50 | 7,80 |
| PrCl ₃ ·Gl ₃ ·H ₂ O | 1 : 3 | 27,40 | 27,70 | 22,06 | 21,60 | 3,00 | 3,67 |
| NdCl ₃ ·Gl·2H ₂ O | 1 : 1 | 46,40 | 39,80 | 24,00 | 29,20 | 9,60 | 10,40 |
| NdCl ₃ ·Gl ₂ ·2H ₂ O | 1 : 2 | 32,35 | 33,00 | 25,80 | 26,60 | 6,66 | 6,27 |
| NdCl ₃ ·Gl ₃ ·H ₂ O | 1 : 3 | 28,50 | 29,20 | 21,09 | 20,80 | 3,60 | 3,60 |
| GdCl ₃ ·Gl·H ₂ O | 1 : 1 | 43,49 | 44,10 | 29,09 | 29,70 | 5,00 | 5,05 |
| GdCl ₃ ·Gl ₂ ·H ₂ O | 1 : 2 | 37,04 | 36,40 | 25,02 | 24,59 | 3,93 | 4,17 |
| GdCl ₃ ·Gl ₃ ·H ₂ O | 1 : 3 | 29,10 | 28,90 | 22,20 | 19,60 | 9,600 | 9,95 |
| EuCl ₃ ·Gl·3H ₂ O | 1 : 1 | 39,19 | 39,30 | 27,30 | 27,39 | 13,20 | 13,90 |
| EuCl ₃ ·Gl ₂ ·2H ₂ O | 1 : 2 | 34,52 | 34,30 | 23,78 | 23,87 | 8,50 | 8,30 |
| EuCl ₃ ·Gl ₃ ·3H ₂ O | 1 : 3 | 27,76 | 28,13 | 21,50 | 19,58 | 13,00 | 10,07 |

Из рассмотрения спектральных данных следует, что наиболее существенные изменения в спектре глицина при комплексообразовании с РЗЭ происходят в области валентных и деформационных колебаний ионогенных групп глицина. В спектрах всех полученных соединений наблюдается изменение полосы валентных колебаний карбоксильной группы по сравнению со свободным глицином, что указывает на участие кислорода этой группы в координации с металлом. Известно, что включение карбоксильной группы в комплекс с РЗЭ различно в зависимости от природы лиганда и состава комплекса [11]. Так, исследования кристаллической структуры кислого глицината неодима состава 1:3 рентгеноструктурным методом [12] показали, что две карбоксильные группы являются бидентантно-мостиковыми и одна троевязанно мостиково-циклической. Таким образом, даже в одной молекуле комплекса карбоксильная группа может быть различным образом координирована.

В спектрах изученных нами глицинатов РЗЭ характер полос поглощения карбоксильных групп довольно сложен. У всех комплексов прослеживаются полосы валентных асимметричных и симметричных колебаний ионизированной карбоксильной группы при 1610 см⁻¹ и 1420 см⁻¹, аналогичные полосам глицина. Это свидетельствует о наличии ионной связи между атомами металла и двумя эквивалентными атомами кислорода карбоксилата [13]. Структура полос сложная, что указывает на неравноценность связанных карбоксильных групп в комплексах и, возможно, на наличие несвязанных групп.

Наряду с рассмотренными полосами в спектрах комплексов появля-

ются полосы как в области более высоких (~ 1755 , ~ 1670 см^{-1}), так и в области более низких частот (~ 1345 , ~ 1230 см^{-1}). Мы относим их к COO^- группам, для которых имеет место неэквивалентное связывание атомов кислорода с металлом. В этом случае образование координационной связи вызывает перераспределение электронной плотности в группе COO^- , приближая ее к виду [9, 13].



Это приводит к повышению частоты валентных колебаний одной из CO связей до значения $\nu_{\text{C=O}}$ (1755 и 1670 см^{-1}) и уменьшает частоту другой до $\nu_{\text{C-O}}$ (1345 , 1230 см^{-1}).

В спектрах комплексов La, Nd для всех стехиометрических соотношений и Eu 1:1 (группа I) наблюдается лишь одна пара полос (~ 1670 и ~ 1345 см^{-1}), в спектрах комплексов Pr, Gd, Y и Eu 1:2, 1:3 (группа II) — обе пары полос (~ 1670 см^{-1} , ~ 1345 см^{-1} и ~ 1750 , ~ 1230 см^{-1}). Можно допустить, что полоса в области 1750 см^{-1} относится к колебаниям связей C=O , атом кислорода которых не вступает в координацию с металлом, а полоса в области 1670 см^{-1} — к колебаниям C=O связей в случае наличия такой координации либо их участия в связывании с водородом. Высокочастотное положение полосы валентных колебаний C=O связи (1750 см^{-1}) может обуславливаться влиянием электрических полей близко расположенных ионов хлора на нее [14]. Полосы с частотами 1670 , 1345 , 1230 см^{-1} характеризуют связи C=O и C-O , участвующие в координации с металлом с разной долей ковалентности.

Таким образом, можно считать, что строение комплексов групп I и II разное. В пределах групп интенсивности и положение полос зависят как от природы РЗЭ, так и от характера окружения. Так, в спектрах комплекса гадолиния 1:1 наблюдаются полосы 1755 см^{-1} (слабая), 1645 см^{-1} (сильная), 1345 см^{-1} (слабая) и 1230 см^{-1} (средняя), комплекса 1:3 — лишь интенсивные полосы при 1755 и 1230 см^{-1} .

Меняется и характер полос (положение, форма, интенсивность) внеплоскостных деформационных колебаний групп COO^- в области 700 — 400 см^{-1} . Интерпретация этой области затруднена возможным проявлением здесь колебаний молекул воды.

Полосы колебаний групп NH_2 наблюдаются в спектрах всех исследованных комплексов. Широкая структурированная полоса в интервале 3100 — 2700 см^{-1} обусловлена валентными колебаниями, а полосы при 1585 , 1500 , 1110 см^{-1} — деформационными колебаниями этих групп. В спектрах большинства соединений эти полосы стабильны по положению. Лишь у комплексов 1:2, 1:3 лантана, 1:1 европия и 1:3 неодима заметны изменения в области 1500 см^{-1} : вместо полосы 1500 см^{-1} появились полосы при 1540 и 1480 см^{-1} . Одновременное появление полос в области 3220 — 3340 см^{-1} и усложнение формы полос в области 1660 — 1630 см^{-1} позволяет предположить наличие в глицинатах названных соединений групп NH_2 и их участие в координации с металлом. Относительно координации NH_2 групп в комплексах других соединений ничего определенного сказать нельзя, так как появляющиеся в области 3400 — 3200 см^{-1} слабые полосы могут быть и обертонами.

Сильными в спектрах являются полосы валентных колебаний O-H связей воды. Широкая полоса с максимумом при 3420 см^{-1} указывает на участие водорода OH связи как в межмолекулярном водородном связывании, так и с кислородом карбоксильных групп.

Итак, наличие полос трех типов для колебаний карбоксильной группы в комплексах глицина с РЗЭ (1600 , 1420 см^{-1} ; 1670 , 1345 и 1750 см^{-1} ; 1230 см^{-1}) свидетельствует о том, что кислород карбоксильной группы образует с РЗЭ различного типа связи и что структура комплексов различна. Относительно координации РЗЭ с азотом сделаны лишь предварительные выводы, требующие дальнейшего подтверждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Суханова Л. С., Мартыненко Л. И., Спицын В. И.—ЖНХ, 1970, т. 15, вып. 6, с. 1494.
2. Звягинцев О. В., Гончаров Е. В.—ЖНХ, 1962, т. 8, с. 1880; ЖНХ, 1963, т. 8, с. 349.
3. Суханова Л. С., Мартыненко Л. И., Украинский Ю. М.—ЖНХ, 1969, т. 14, вып. 10, с. 2885.
4. Коган Б. И. Редкие металлы, состояние и перспективы.— М., 1979.
5. Шевченко Л. Л.—Успехи химии, 1963, т. 32, вып. 4, с. 457.
6. Суханова Л. С., Мартыненко Л. И.—ЖНХ, 1969, т. 14, с. 397.
7. Пупликова О. И., Неокладнова Л. Н., Усова О. П., Зарецкий М. В.—ЖОХ, 1978, т. 48, вып. 1, с. 186.
8. Suzuki S., Shimanouchi T., Tsuboi M.—Spectrochimica Acta, 1963, v. 19, p. 1195.
9. Варшавский Ю. С., Илькова Е. Н., Гринберг А. А.—ЖНХ, 1969, т. 8, с. 2659.
10. Аблоу А. В., Чапурина Л. Ф., Проскина И. П.—ЖНХ, 1967, т. 12, с. 499.
11. Алсанов Л. А., Ионов В. М., Кисквиев И. Д.—Коорд. химия, 1976, т. 2, вып. 12, с. 1642.
12. Беляева Т. Ф., Порай-Кошиц М. А., Малиновская Т. И., Алсанов Л. А., Суханова Л. С., Мартыненко П. И.—Ж. структ. химии, 1969, т. 10, вып. 3, с. 357.
13. Накамото К. Инфракрасные спектры неорганических и координационных соединений.— Мир, 1966.
14. Беллами Л. Инфракрасные спектры сложных молекул.— М., 1963.

Поступила в редакцию
23.12.82.

Кафедра биофизики

УДК 621.315.592

М. С. КАМАРА, Е. К. КОХАН, М. Г. ЛУКАШЕВИЧ

ИЗМЕНЕНИЕ МАГНИТОСОПРОТИВЛЕНИЯ АРСЕНИДА ГАЛЛИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В [1] нами обнаружено уменьшение отрицательного магнитосопротивления (ОМС) и переход в область положительного (ПМС) в арсениде галлия *n*-типа с концентрацией электронов $(4-30) \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ при увеличении приложенного к кристаллу электрического поля. Детальное изучение вольтамперных характеристик (ВАХ), температурной и электрополевой зависимости постоянной Холла [2, 3] позволило установить, что нелинейность ВАХ при $T=4,2 \text{ К}$ в предпробойных полях, в которых наблюдается уменьшение ОМС и переход к ПМС, обусловлена перераспределением носителей между примесной зоной и зоной проводимости в электрическом поле. В связи с этим уменьшение ОМС в электрическом поле в рамках расчета [4] было связано с уменьшением концентрации частично локализованных в примесной зоне магнитных центров (локализованных спинов) и электронов.

В данной работе проведен расчет зависимости магниторезистивного эффекта в $n-GaAs$ от электрического поля в предположении, что в электрическом поле изменяется как величина ОМС так и ПМС.

Изучение ВАХ показало, что увеличение проводимости в предпробойных полях можно описать зависимостью

$$\sigma(E) = \sigma(0) \left(\frac{E}{E_0} \right)^2, \quad (1)$$

где E_0 — поле, начиная с которого наблюдается отклонение от закона Ома.

Величина χ в разных образцах изменялась от 0,5 до 1. Учитывая, что при низких температурах проводимость кристалла определяется носителями зоны проводимости (индекс 1) и примесной зоны (индекс 2), а полное число носителей не изменяется

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad n = n_1 + n_2 = \text{const} \quad (2)$$

для зависимости концентрации электронов в зонах от электрического поля с учетом (1) получим следующие соотношения:

$$n_2(E) = \frac{n}{1-\theta} + \left(n_2^0 - \frac{n}{1-\theta}\right) \left(\frac{E}{E_0}\right)^k \quad (3)$$

$$n_1(E) = -\frac{n\theta}{1-\theta} - \left(n_2^0 - \frac{n}{1-\theta}\right) \left(\frac{E}{E_0}\right)^k, \quad (4)$$

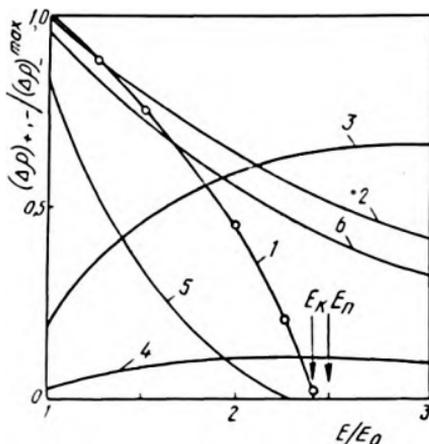
где μ — подвижность носителей; $\theta = \frac{\mu_2}{\mu_1}$; n_2^0 — концентрация носителей в примесной зоне в слабом электрическом поле.

Согласно [4], ОМС, обусловленное подавлением неупругого рассеяния носителей на частично локализованных спинах, пропорционально квадрату намагниченности, а число магнитных состояний определяется полной концентрацией электронов в примесной зоне. Тогда для зависимости концентрации частично локализованных спинов от электрического поля с учетом (3) можно записать:

$$N_M(E) = kn_2^0 - \frac{n}{1-\theta} - \left(n_2^0 - \frac{n}{1-\theta}\right) \left(\frac{E}{E_0}\right)^k, \quad (5)$$

где $k \approx 0,1$ [4].

Отметим, что выражение (5) получено в предположении, что перевод одного носителя из примесной зоны в зону проводимости приводит к уменьшению N_M на единицу и сначала происходит делокализация магнитных состояний. Последнее предположение оправдано тем, что энергия связи электрона, определяющего магнитный момент рассеивающего центра, с частично изолированным нейтральным донором меньше энергии ионизации мелкого донорного уровня в нейтральном зарядовом состоянии.



Зависимость магнитосопротивления образца с $n_r = 7,5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ при $T = 4,2 \text{ К}$ от электрического поля:

1 — эксперимент; 2-6 — расчет; 2 — ОМС; 3, 4 — ПМС; 5, 6 — результирующее изменение МС для случая рассеяния носителей заряда на зонах примеси и пьезоэлектрических колебаниях соответственно

равновесных носителей в зоне проводимости в предпробойных полях. Действительно, так как магнитополевая зависимость МС проходит через минимум и с увеличением напряженности магнитного поля МС становится положительным [1, 3], можно считать, что измеряемое МС представляет собой алгебраическую сумму двух компонент: отрицательной $(\Delta\rho/\rho_0)_-$ и положительной $(\Delta\rho/\rho_0)_+$;

$$(\Delta\rho/\rho_0)_n = (\Delta\rho/\rho_0)_- + (\Delta\rho/\rho_0)_+ \quad (6)$$

На рисунке приведена экспериментальная (кривая 1) и расчетная с учетом (5) зависимость максимальной величины ОМС (кривая 2) для образца с $n_r = 7,5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ от электрического поля. В расчете использованы экспериментальные величины $\kappa = 0,58$ и $\theta = 0,30$.

Видно, что в слабых электрических полях они достаточно хорошо согласуются, однако с увеличением поля ОМС уменьшается более сильно, чем предсказывает расчет. Оценка, согласно (5), критического поля E_k перехода от ОМС к ПМС (при этом $N_M = 0$) дает величину, превышающую напряженность поля пробоя E_n .

Более сильное уменьшение ОМС в электрическом поле и меньшую, чем E_n , величину E_k можно объяснить увеличением положительной компоненты МС при появлении дополнительных не-

Подставляя (3) и (4) в формулу для МС кристалла с двумя типами носителей [5]

$$(\Delta\rho/\rho_0)_+ = \beta_1^2 \left[C \frac{1-x\theta^2}{1+x\theta} - A^2 \frac{(1+x\theta^2)^2}{(1+x\theta)^2} \right], \quad (7)$$

где $\beta_1 = \frac{\mu_1 H}{c}$, $x = \frac{n_2}{n_1}$, и, пренебрегая ввиду малости θ величиной θ^2 и более высокими степенями θ для магнито- и электрополевой зависимости положительной компоненты МС, получим

$$(\Delta\rho/\rho_0)_+ = \beta_1^2 \left\{ C \frac{\omega - (n_2^0 - \omega) \left(\frac{E}{E_0} \right)^2}{(\theta - 1)(n_2^0 - \omega) \left(\frac{E}{E_0} \right)^2} - A^2 \frac{\left[\omega\theta(\theta - 1) - (n_2^0 - \omega) \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 \right]^2}{\left[(n_2^0 - \omega)(\theta - 1) \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 \right]^2} \right\}, \quad (8)$$

где $\omega = \frac{n}{1-\theta}$, A и C — константы, определяемые механизмом рассеяния.

Расчитанная по (8) зависимость ПМС от электрического поля и нормированная относительно максимальной величины ОМС для рассеяния носителей на ионах примеси и пьезоэлектрических колебаниях решетки показана на рисунке (кривые 3, 4 соответственно). На этом же рисунке показано и суммарное изменение МС в электрическом поле (кривые 5, 6). Видно, что расчетные кривые качественно согласуются с экспериментальными данными. Учет при вычислении ПМС рассеяния на ионах примеси дает величину критического поля перехода меньшую E_n и близкую к экспериментально наблюдаемой.

В заключение отметим, что количественное согласие можно получить при учете нелинейной зависимости концентрации магнитных центров (или величины магнитного момента рассеивающего центра) от концентрации электронов в примесной зоне. Следует ожидать, что учет смешанного механизма рассеяния при расчете ПМС позволит получить согласие теории с экспериментом и в величинах критического поля перехода от отрицательного магниторезистивного эффекта к положительному в электрическом поле.

Авторы благодарят В. Ф. Стельмаха за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лукашевич М. Г., Стельмах В. Ф. — ФТП, 1980, т. 14, № 8, с. 1658.
2. Лукашевич М. Г., Стельмах В. Ф. — Вести. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1981, № 3.
3. Лукашевич М. Г., Стельмах В. Ф. — Изв. вузов СССР. Физика, 1981, № 7, с. 51.
4. Toyozawa Y. — J. Phys. Soc. Japan, 1962, v. 17, № 5, p. 986.
5. Киреев П. С. Физика полупроводников. — М., 1975.

УДК 517.53

ТА ХОНГ КУАНГ, В. Н. РУСАК

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

1. Рациональные операторы Валле Пуссена

Обозначим через C_∞ класс функций, непрерывных и ограниченных на вещественной оси и удовлетворяющих условию $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Пусть в верхней полуплоскости заданы n чисел $\{z_k\}_{k=1}^n$; среди этих чисел могут встречаться и равные. Обозначим

$$K_n(t, x) = \prod_{k=1}^n \frac{t-z_k}{t-\bar{z}_k} \cdot \frac{x-\bar{z}_k}{x-z_k}; \quad \bar{K}_n(t, x) = \prod_{k=1}^n \frac{t-\bar{z}_k}{t-z_k} \cdot \frac{x-z_k}{x-\bar{z}_k}. \quad (1)$$

Очевидно, что если $x, t \in (-\infty, \infty)$, то $\bar{K}_n(t, x) = \overline{K_n(t, x)}$. Введем ядро

$$K_{n,m,l}(t, z) = [\bar{K}_n(t, z)]^m + [K_n(t, z)]^m - [K_n(t, z)]^l - [\bar{K}_n(t, z)]^l \quad (2)$$

и пусть

$$g_n(z) = g_{n,m,l}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{n,m,l}(t, z)}{(t-z)^2} dt. \quad (3)$$

Всякой функции $f \in C_\infty$ ставим в соответствие оператор

$$V_{n,m,l}(x, f) = \frac{1}{g_n(x)} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{K_{n,m,l}(t, x)}{(t-x)^2} dt, \quad (4)$$

называя его оператором типа Валле Пуссена.

Пусть $E_{2nq}(f) = \min_{r_{2nq}} \max_{-\infty < x < \infty} |f(x) - r_{2nq}(x)|$ наилучшее приближение функции $f \in C_\infty$ рациональными функциями вида

$$r_{2nq}(x) = \frac{a_0 x^{2nq} + \dots + a_{2nq}}{\prod_{k=1}^n (x-z_k)^q (x-\bar{z}_k)^q}. \quad (5)$$

Теорема 1. Справедливо равенство

$$\|f(x) - V_{n,m,l}(x, f)\| \leq \frac{2Q}{Q-q} E_{2nq}(f), \quad (6)$$

где $Q = \max\{m, l\}$; $q = \min\{m, l\}$, $m \neq l$ (m, l, n — целые числа).

Доказательство. Пусть $z_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\beta_k > 0$ и

$$\Phi_n'(z) = \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{(\alpha_k - z)^2 + \beta_k^2}. \quad \text{Из (1) ясно, что выполнены равенства}$$

$$K_n(z, z) = \tilde{K}_n(z, z) = 1. \quad (7)$$

Легко проверить также, что

$$\frac{d}{dt} K_n(t, z)|_{t=z} = 2i \Phi_n'(z) \quad (8)$$

и аналогичным образом

$$\frac{d}{dt} K_n(t, z)|_{t=z} = -2i \Phi_n'(z). \quad (9)$$

С помощью (8) и (9) устанавливаем, что $K_{n,m,l}(z, z) = \frac{d}{dt} K_{n,m,l} \times \times (t, z)|_{t=z} = 0$ и, следовательно, функция $K_{n,m,l}(t, z)/(t-z)^2$ непрерывна по $t \in [-\infty, \infty]$ для любого $z \in C$, и является рациональной функцией по каждой переменной, причем степень числителя на две единицы ниже степени знаменателя. Таким образом, интеграл

$\int_{-\infty}^{\infty} t(t) \frac{K_{n,m,l}(t, z)}{(t-z)^2} dt$ существует и является рациональной функцией, если $f \in C_{-}$.

Пусть λ_j есть кратность числа z_j , в системе чисел $\{z_j\}_{j=1}^n$ и λ — целое число, $0 < \lambda \leq q\lambda_j$. Вычислим значение интеграла

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{n,m,l}(t, x)}{(t-z_j)^\lambda (t-x)^2} dt, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

На основании (7), (8), (9) и учитывая, что разность $[K_n(t, x)]^m - [K_n(t, x)]^l$ аналитична по переменной t в верхней полуплоскости, а разность $[\tilde{K}_n(t, x)]^m - [\tilde{K}_n(t, x)]^l$ аналитична по t в нижней полуплоскости, получим (с помощью теории вычетов)

$$\begin{aligned} I(x) &= \lim_{z \rightarrow x} I(x) = \lim_{z \rightarrow x} 2\pi i \operatorname{Res}_{t=z} \left\{ \frac{K_n^m(t, z) - K_n^l(t, z)}{(t-z)^2 (t-z_j)^\lambda} \right\} = \\ &= \lim_{z \rightarrow x+i0} \frac{4\pi \Phi_n'(z) (l-m)}{(z-z_j)^\lambda} = \frac{4\pi \Phi_n'(x) (l-m)}{(x-z_j)^\lambda}. \end{aligned} \quad (10)$$

В частности, при $\lambda=0$ из (9) следует, что

$$g_{n,m,l}(x) = 4\pi \Phi_n'(x) (l-m) \quad (11)$$

и видно, что $g_{n,m,l}(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке вещественной оси.

Из (3), (4), (10) и (11) вытекает, что

$$V_{n,m,l}\left(x, \frac{1}{(x-z_j)^\lambda}\right) \equiv \frac{1}{(x-z_j)^\lambda}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Аналогичным образом устанавливается, что

$$V_{n,m,l}\left(x, \frac{1}{(x-\tilde{z}_j)^\lambda}\right) \equiv \frac{1}{(x-\tilde{z}_j)^\lambda}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Поскольку рациональная функция (5) разлагается на простые дроби

$$\frac{A_j}{(z-z_j)^\lambda} + \frac{B_j}{(z-\tilde{z}_j)^\lambda}, \quad 0 \leq \lambda \leq q\lambda_j,$$

а оператор $V_{n,m,l}(x, f)$ есть, очевидно, линейный оператор, то имеем, что для любой функции вида (5)

$$V_{n,m,l}(x, r_{2nq}) \equiv r_{2nq}(x), \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (12)$$

Оценим теперь норму рациональной функции (4), рассматривая ее как оператор, действующий из пространства C_∞ в пространство C_∞ , точнее, найдем оценку сверху для интеграла

$$\frac{1}{|g_n(x)|} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{n,m,l}(t, x)}{(t-x)^2} dt \right| \equiv A(x). \quad (13)$$

Имеем, что (см. (1) и (2)) при любых $x, t \in (-\infty, \infty)$

$$|K_n(t, x)Y + \overline{K_n(t, x)Y} \leq |K_n(t, x)|' + |\overline{K_n(t, x)}|' = 2,$$

поэтому $K_{n, o, l}(t, x) = 2 - K_n^l(t, x) - \overline{K_n^l(t, x)} \geq 0$ и для ядра $K_{n, m, l}(t, x)$ получим оценку сверху

$$|K_{n, m, l}(t, x)| = |2 - K_n^l(t, x) - \overline{K_n^l(t, x)} - [2 - K_n^m(t, x) - \overline{K_n^m(t, x)}]| \leq K_{n, o, l}(t, x) + K_{n, o, m}(t, x). \quad (14)$$

Из (11), (13) и (14) найдем

$$A(x) \leq \frac{1}{4\pi \Phi_n'(x)(l-m)} \left\{ \int_{-}^+ \frac{K_{n, o, l}(t, x)}{(t-x)^2} dt + \int_{-}^+ \frac{K_{n, o, m}(t, x)}{(t-x)^2} dt \right\} = \frac{l}{|l-m|} + \frac{m}{|l-m|} = \frac{Q+q}{Q-q}. \quad (15)$$

Пусть $\tilde{r}_{2nq}(x)$ рациональная функция наилучшего приближения среди функций вида (5) для $f(x)$. Тогда в силу линейности оператора $V_{n, m, l}(x, f)$ и (15), получим

$$|f(x) - V_{n, m, l}(x, f)| \leq |f(x) - \tilde{r}_{2nq}(x)| + |\tilde{r}_{2nq}(x) - V_{n, m, l}(x, f)| \leq \leq E_{2nq}(f) + \frac{Q+q}{Q-q} E_{2nq}(f) = \frac{2Q}{Q-q} E_{2nq}(f),$$

т. е. неравенство (6) установлено.

З а м е ч а н и е. Случай, когда $l=1$ и $m=r$ был впервые рассмотрен В. Н. Русаком в [1].

2. Рациональные операторы типа Джексона. Пусть $z_k = \alpha_k + i\beta_k$; $\beta_k > 0$; $\Phi_n(x) = \sum_{k=1}^n \arg(z_k - x)$. Далее обозначим $W_n(t, x) = \sin^4[\Phi_n(t) - \Phi_n(x)] - 2 \sin^4 2[\Phi_n(t) - \Phi_n(x)] + \sin^4 3[\Phi_n(t) - \Phi_n(x)]$ и введем оператор типа Джексона

$$D_n(x, f) = \frac{1}{g_n(x)} \int_{-}^+ f(t) \frac{1+t^2}{(t-x)^4} W_n(t, x) dt, \quad (16)$$

где

$$g_n(x) = \int_{-}^+ \frac{(1+t^2) W_n(t, x) dt}{(t-x)^4}. \quad (17)$$

Заметим, что рациональные операторы типа Джексона с несколькими ядрами (рассматривались впервые в [2]) обладают тем свойством, что отображает на себя множество рациональных функций вида

$$R_{2n}(x) = \frac{a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \dots + a_{2n}}{\prod_{k=1}^n (x - z_k)(x - \bar{z}_k)}. \quad (18)$$

Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Для любой рациональной функции вида (18) справедливо равенство

$$D_n(x, R_{2n}) \equiv R_{2n}(x), \quad -\infty \leq x \leq \infty. \quad (19)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть снова λ_j — кратность числа z_j в системе $\{z_j\}_{j=1}^n$ и $0 \leq \lambda \leq \lambda_j$ (λ — целое). В [2 стр. 114] установлено, что

$$\sin[\Phi_n(t) - \Phi_n(x)] = \frac{1}{2i} \frac{\prod_{k=1}^n (t - z_k)(x - \bar{z}_k) - \prod_{k=1}^n (t - \bar{z}_k)(x - z_k)}{\prod_{k=1}^n |t - z_k| |x - z_k|}. \quad (20)$$

Из (1) и (20) следует, что

$$\begin{aligned} \sin^4 [\Phi_n(t) - \Phi_n(x)] &= \frac{1}{16} K_n^2(t, x) - \frac{1}{4} K_n(t, x) - \\ &- \frac{1}{4} \tilde{K}_n(t, x) + \frac{1}{16} \tilde{K}_n^2(t, x) + \frac{3}{8}. \end{aligned} \quad (21)'$$

Считая, что $\text{Im } z > 0$, найдем (см. (21))

$$\begin{aligned} I(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+t^2) \left[\frac{1}{16} K_n^2(t, z) - \frac{1}{4} K_n(t, z) \right]}{(t-z)^{\lambda} (t-z)^{\lambda}} dt + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+t^2) \left[\frac{1}{16} \tilde{K}_n^2(t, z) - \frac{1}{4} \tilde{K}_n(t, z) + \frac{3}{8} \right]}{(t-z)^{\lambda} (t-z)^{\lambda}} dt = I_1(z) + I_2(z) \equiv I_1(z), \end{aligned} \quad (22)$$

где $I_2(z) \equiv 0$ в силу аналитичности подынтегральной функции по t в нижней полуплоскости.

Применяя теорему о вычетах, с учетом (7), (8), (9) непосредственным вычислением найдем

$$\begin{aligned} I_1(z) &= \frac{1}{(z-z_j)^{\lambda}} \left\{ \frac{2\pi}{3} (1+z^2) \left([\Phi_n'(z)]^3 - \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k^3}{[(z-\alpha_k)^2 + \beta_k^2]^2} \right) + \right. \\ &+ \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k^2 (1+\alpha_k^2 + \beta_k^2)}{[(z-\alpha_k)^2 + \beta_k^2]^2} \left. \right\} + \frac{\lambda}{(z-z_j)^{\lambda+1}} \cdot \frac{\pi i}{8} \left\{ 3 + 8iz \Phi_n'(z) + \right. \\ &+ (1+z^2) \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(z-\bar{z}_k)^2} - \frac{1}{(z-z_k)^2} \right] \left. \right\} - \frac{\lambda(\lambda+1)\pi i}{8(z-z_j)^{\lambda+2}} \times \\ &\times [3z + 2i \Phi_n'(z) (1+z^2)] + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{(z-z_j)^{\lambda+3}} \cdot \frac{\pi(1+z^2)}{16}. \end{aligned} \quad (23)$$

В (23) при замене $\Phi_n'(z)$ на $\Theta \Phi_n'(x)$ получим конкретное выражение для интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+t^2) \sin^4 \Theta [\Phi_n(t) - \Phi_n(x)]}{(t-z_j)^{\lambda} (t-x)^{\lambda}} dt, \quad \Theta = 1, 2, 3.$$

Отсюда непосредственным вычислением найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+t^2) W_n(t, x) dt}{(t-z_j)^{\lambda} (t-x)^{\lambda}} = \frac{8\pi(1+x^2) [\Phi_n'(x)]^3}{(x-z_j)^{\lambda}}. \quad (24)$$

По принципу комплексного сопряжения верно

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+t^2) W_n(t, x) dt}{(t-\bar{z}_j)^{\lambda} (t-x)^{\lambda}} = \frac{8\pi(1+x^2) [\Phi_n'(x)]^3}{(x-\bar{z}_j)^{\lambda}}. \quad (25)$$

Из (24), (25) и линейности следует, что для любой функции вида (18)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2) R_{2n}(t) \frac{W_n(t, x)}{(t-x)^{\lambda}} dt = 8\pi(1+x^2) [\Phi_n'(x)]^3 \cdot R_{2n}(x).$$

В частности, при $R_{2n}(x) \equiv 1$ имеем

$$g_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+t^2) W_n(t, x) dt}{(t-x)^{\lambda}} = 8\pi(1+x^2) [\Phi_n'(x)]^3. \quad (27)$$

Из (26), (27) следует (19), и теорема 2 полностью доказана.

В качестве следствия теоремы 2 имеется следующая

Теорема 3.

$$|f(x) - D_n(x, f)| \leq (1 + \|D_n(x)\|) E_{2n}(f), \quad (28)$$

где

$$\|D_n(x)\| = \frac{1}{g_n(x)} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{(1+t^n)W_n(t,x)}{(t-x)^k} \right| dt. \quad (29)$$

Действительно, пусть $\tilde{R}_{2n}(x)$ — рациональная дробь вида (18) наилучшего приближения функции $f(x)$, тогда $|f(x) - D_n(x, f)| \leq |f(x) - \tilde{R}_{2n}(x)| + |\tilde{R}_{2n}(x) - D_n(x, f)| \leq (1 + \|D_n(x)\|) E_{2n}(f)$. Заметим, что в особом случае, когда $\alpha_k = 0$, $\beta_k = 1$, $k = \overline{1, n}$ при замене $x = tg \frac{u}{2}$, $t = \operatorname{tg} \frac{v}{2}$ имеем

$$D_n(x, t) = \tilde{D}_n(u, \varphi) = \frac{1}{16\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u+v) \frac{\sin^4 \frac{3nt}{2} - 2 \sin^4 nt + \sin^4 \frac{nt}{2}}{\sin^4 \frac{t}{2}} dt, \quad (30)$$

где $\varphi(u) = f\left(\operatorname{tg} \frac{u}{2}\right)$ (см. [2, с. 141]). В [2] было установлено, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^4 \frac{nt}{2}}{\sin^4 \frac{t}{2}} dt = \frac{2n\pi(2n^2 + 1)}{3}.$$

Теорема 4. Пусть $\varphi(u)$ — 2π -периодическая непрерывная функция, $E_n(\varphi)$ — наилучшее приближение функции $\varphi(u)$ тригонометрическими многочленами степени не выше n , тогда

$$|\varphi(u) - \tilde{D}_n(u, \varphi)| \leq (1 + \|\tilde{D}_n\|) E_n(\varphi),$$

где

$$\|D_n\| = \frac{1}{16\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin^4 \frac{3nt}{2} - 2 \sin^4 nt + \sin^4 \frac{nt}{2}|}{\sin^4 \frac{t}{2}} dt \leq 3 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3n^2}. \quad (32)$$

Действительно, (32) немедленно вытекает из (28), (30) а $\|\tilde{D}_n\|$ оценивается с помощью (31).

ЛИТЕРАТУРА

1. Русак В. Н. — Матем. заметки, 1977, т. 22, вып. 3.
2. Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. — Минск, 1979.

Поступила в редакцию
23.03.80.

Кафедра высшей математики и
математической физики

УДК 519.768 : 17

И. А. КОРОЛЬ, И. В. СОВПЕЛЬ

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА ПЕРЕВОДА КЛЮЧЕВЫХ СЛОВ (СПЕРКС-1). I

Эффективность использования информационно-поисковых систем (ИПС) во многих случаях можно существенно повысить, если объединить их в единую информационную сеть. Такое объединение позволяет лучше удовлетворять потребности абонентов благодаря более полному использованию информационных массивов, сосредоточенных в различных центрах [1].

Поскольку при объединении ИПС не всегда можно ограничиться одним информационно-поисковым языком (ИПЯ), то при создании единой информационной сети приходится решать проблему перехода от одних ИПЯ к другим. В этом плане наиболее общей является задача машинного перевода текстов, рефератов, аннотаций, поисковых предписаний и т. п. с одного естественного языка (ЕЯ) на другой, поскольку ЕЯ является ИПЯ с наибольшей семантической силой. Эта задача возникает,

в частности, при создании информационных сетей высшего уровня — международных информационных сетей [2], в которых осуществляется как переход от одних ИПЯ к другим, так и перевод содержания самих документов с одних ЕЯ на другие.

В качестве примера рассмотрим разработанную нами систему СПЕРКС-1, реализующую автоматизированную информационную сеть специального назначения в рамках стран — членов СЭВ. Эта информационная сеть предназначена для обслуживания заинтересованных пользователей документами описательного характера по вопросам математического обеспечения ЭВМ в рамках существующих информационных фондов алгоритмов и программ у каждого пользователя.

Система СПЕРКС-1 служит для перевода содержания определенных полей входных документов с любого ЕЯ на любой из заданного набора. Эти документы сформированы в единый входной массив на внешних носителях информации. Отдельный документ входного массива имеет следующую структуру:

| Указатель начала документа | Указатель поля-2 | Указатель поля-3 | ... | Указатель поля (i-1) | Указатель конца документа |
|----------------------------------|---------------------|---------------------|-----|-------------------------|---------------------------------|
| | данные | данные | | данные | |
| поле-1 | поле-2 | поле-3 | | поле-(i-1) | поле-i |

Система СПЕРКС-1 «работает» только с двумя вполне определенными полями каждого документа: полем i^* , в котором указан язык представления содержания документа, и полем j^* ($j^* > i^*$), в котором задан набор ключевых слов (КС), являющийся фактически поисковым образом документа и подлежащий переводу с языка указанного в поле i^* , на любой ЕЯ, указанный пользователем, из заданного банка равномо-
 щных языков $L = \{L_1, L_2, \dots, L_m\}$, где каждый язык L_i ($i = \overline{1, m}$) задается множеством отдельных слов и их определенных совокупностей.

Решение сформулированной задачи требует создания специальной информационной базы (ИБ) системы, основу которой составляет множество L обычных двуязычных словарей. Обозначим $L = \{(L_p, L_q)\}$, где L_p — входной язык, L_q — выходной, $L_p \in L$, $L_q \in L$, $p \leq m$, $q \leq m$, $p \neq q$. В каждом словаре (L_p, L_q) отдельному слову или словосочетанию (в любом случае обозначим $W_r^{(p)}$) языка L_p ставится в соответствие некоторое конечное множество альтернативных эквивалентов языка L_q :

$$W_r^{(p)} \rightarrow A_r^{(q)} = \{W_{r_s}^{(q)}\}, \quad s = 1, 2, \dots, n_r. \quad (1)$$

В системе СПЕРКС-1 к словарям предъявляются следующие требования: в словарь могут включаться как отдельные слова, так и целые словосочетания; слова и словосочетания могут задаваться как в единственном, так и во множественном числе; при установлении соответствия типа (1) необходимо стремиться к максимальной однозначности перевода; длина слова и словосочетания не должна превышать 126 символов.

Многолетний опыт работы с естественно-языковыми массивами данных показывает, что формирование исходной информации для словарей в виде (1), ввод и запись ее на машинные носители — весьма трудоемкий процесс. Поэтому нами было предпринято исследование условий решения поставленной задачи и той предметной области, с которой должна работать система СПЕРКС-1, с целью определения возможности автоматизации процесса формирования исходной информации для ИБ системы. Проведенное исследование позволило сделать допущение, что устанавливаемое между элементами языков в банке соответствие типа (1) является симметричным и транзитивным. Это означает, что может быть реализована довольно простая процедура P , позволяющая для любого словаря $(L_p, L_q) \in L$ получить обратный словарь (L_q, L_p) , а

для любой пары словарей $(L_p, L_q) \in L$, $(L_q, L_i) \in L$ — смежный словарь (L_p, L_i) . Исходя из этого факта и замечания о трудностях формирования исходной информации для словарей, нас на входе системы управления ИБ будет, естественно, интересовать некоторое множество L , называемое в дальнейшем порождающим множеством словарей в банке языков L , такое, что на основании входящих в него словарей процедурой P может быть получен любой словарь (L_i, L_j) , где для $i=1, j$ принимает значения от 2 до m , а для $i=2, \dots, m$ — значения $1, \dots, i-1, i+1, \dots, m$. Множество $L = \{(L_i, L_j)\}$, где i, j принимают указанные выше значения, назовем полным множеством словарей в банке языков L .

Минимальное по величине $|L|$, порождающее множество словарей, назовем ядром и обозначим L^* . Для решения задачи построения порождающих множеств словарей и ядер в банке языков L применим аппарат теории графов.

Пусть задано произвольное множество словарей L . Поставим ему в соответствие неориентированный граф $G = (X, A)$, называемый в дальнейшем базовым графом, вершинам которого соответствуют языки из банка языков L , следовательно $|X| = m$, а ребрам — двуязычные словари. При этом в графе имеет место ребро a_{ij} , т. е. $a_{ij} \in A$, если в множестве L по крайней мере имеет место словарь (L_i, L_j) либо (L_j, L_i) и $a_{ij} \notin A$ — в противном случае.

На основании известных результатов из теории графов [3] справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Если $G = (X, A)$ — связный граф, то множество словарей L является порождающим.

Утверждение 2. Ядро L^* определяется множеством словарей, соответствующих ребрам остовного дерева графа $G = (X, A)$.

Утверждение 3. $|L^*| = m - 1$.

Сформулированные утверждения являются основой для разработки метода построения порождающих множеств словарей и ядер в банке равномоощных языков L по заданному множеству L .

ЛИТЕРАТУРА

1. Глушков В. М., Скороходько Э. Ф., Стогний А. А. — НТИ, Киев, 1978, № 1, с. 55.
2. Жак А. д'Олье. Многоязычие в научно-технической информации. — Международный форум по информации и документации. ВИНТИ. М., 1977, т. 2, № 4.
3. Кристофидес Н. Теория графов. — М., 1978.

Поступила в редакцию
24.05.82.

Кафедра МО АСУ

УДК 517.926

И. Ф. НАУМОВИЧ

ВЫРОЖДЕННЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЗАКОНОМ ПЛОЩАДЕЙ

Символом Z обозначаем либо пространство R^{n+m} , либо центрированное пространство $R^{n+m} \setminus \{O^{n+m}\}$, отнесенные к системе координат $O_{z_1, \dots, z_{n+m}}$. Определим функцию h , $h: Z \rightarrow R^{n+m}$ и рассмотрим уравнение

$$z' = \frac{dz}{d\tau} = h(z), \quad z \in Z, \quad \tau \in R. \quad (1)$$

Предположим, что любая начальная задача для (1)

$$z|_{\tau=\sigma} = \xi, \quad \xi \in Z, \quad \sigma \in R \quad (2)$$

однозначно разрешима в дифференцируемых функциях (см., например, [1, с. 162]). Решение задачи (2) при $\sigma=0$ обозначим $z(\cdot, \xi)$, а его максимальный промежуток продолжимости обозначим $t(\xi)$. Решением задачи

(2) при любом σ служит функция $z(\tau - \sigma, \xi)$. Выделим в Z основные координаты $x_k = z_k, k = 1, 2, \dots, n$ и дополнительные координаты $y_j = z_{n+j}, j = 1, 2, \dots, m$. Положим $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_m), z = (x, y)$. В соответствии с таким распределением координат, уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y), (x, y) \in Z, h = (f, g), \end{cases} \quad (3)$$

а решение (1) представимо в виде $z = (x, y)$.

В [2] показано, что уравнение (1) обладает законом площадей в том и только в том случае, если функция

$$F(z) = \langle f(z), f(z) \rangle \langle x, x \rangle - \langle x, f(z) \rangle^2 \quad (4)$$

постоянна вдоль решений этого уравнения. При этом секторная скорость вычисляется по формуле

$$\omega(\tau) = \frac{1}{2} \sqrt{F(z(\tau))}, \tau \in I(\xi). \quad (5)$$

Все уравнения вида (1), обладающие законом площадей, можно разделить на два класса:

1) вдоль каждой траектории уравнения (1) секторная скорость постоянна, но принимает различные значения вдоль разных траекторий. В этом случае $F(x, y) = C$ представляет собой интеграл уравнения (1);

2) вдоль каждой траектории (1) секторная скорость принимает одно и то же постоянное значение ω_0 , тогда, согласно формуле (5), $F(z) = 4\omega_0^2$ для любых $z \in Z$, т. е. F является тождественной постоянной на Z . Уравнение (1) в этом случае называем вырожденным. Вырожденное уравнение уже не имеет интеграла вида $F(z) = C$, такого как в (1).

Вырожденные уравнения также можно разделить на два класса: а) с нулевой секторной скоростью и б) с ненулевой секторной скоростью. В случае а) из [2] следует, что все траектории (1) лежат на связках лучей в R^n .

Имеет место следующая

Теорема. Если функция f ограничена в некоторой окрестности $U(O^{n+m})$ точки O^{n+m} , уравнение (1) вырождено и существует последовательность точек $(x^{(j)})$ какой-либо траектории x , сходящаяся к O^n , то секторная скорость равна нулю.

Доказательство. Так как уравнение вырождено, то секторная скорость принимает одно и то же постоянное значение ω_0 вдоль любой траектории уравнения (1). Рассмотрим траекторию, содержащую последовательность $(x^{(j)})$. В точках этой последовательности выполняется на основании (4) и (5) соотношение $4\omega_0^2 = \langle f(x^{(j)}, y), f(x^{(j)}, y) \rangle \langle x^{(j)}, x^{(j)} \rangle - \langle x^{(j)}, f(x^{(j)}, y) \rangle^2, j = 1, 2, \dots$. Так как при $j \rightarrow +\infty, x^{(j)} \rightarrow O^n$, а f ограничена в $U(O^{n+m})$, то каждое из слагаемых в последнем равенстве может быть сделано сколь угодно малым. Отсюда вытекает, что $\omega_0 = 0$, что и требовалось доказать.

В [2] также было показано (теорема 3): для того чтобы уравнение (1) было вырожденным с нулевой секторной скоростью, необходима и достаточна возможность представления функции f в виде $f(z) = \gamma(z)x, z \in Z$ со скалярной функцией γ .

В частности, при $n=2, m=0$ из последнего условия следует, что вырожденные системы второго порядка с нулевой секторной скоростью имеют вид $\dot{x}_1 = \gamma(x_1, x_2)x_1, \dot{x}_2 = \gamma(x_1, x_2)x_2$. Из вида этой системы следует, что $x_2 dx_1 = x_1 dx_2$. И, следовательно, $x_1 = Cx_2$, т. е. в этом случае система может быть проинтегрирована в квадратурах.

Также в [2] установлено, что в случае, когда f определена и ограничена в окрестности $U(O^{n+m})$ точки O^{n+m} , а система (1) является вырожденной, то секторная скорость равна нулю. Таким образом, из того, что (1) обладает ненулевой секторной скоростью ω_0 , вытекает, что либо f не определена в $U(O^{n+m})$, либо не является там ограниченной.

$$\text{Пример 1. } \begin{cases} x_1' = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \\ x_2' = -\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \end{cases} (x_1, x_2) \in R^2 \setminus \{O^2\}.$$

Здесь $F(x_1, x_2) = \langle f, f \rangle \langle x, x \rangle - \langle x, f \rangle^2 = \left(\frac{x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + \frac{x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right) (x_1^2 + x_2^2) - \left(\frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right)^2 = 1$ для любых $(x_1, x_2) \in R^2 \setminus \{O^2\}$. Поэтому секторная скорость $\omega_0 = \frac{1}{2}$ вдоль любой траектории системы. Поскольку $x_1 dx_1 + x_2 dx_2 = 0$, то $x_1^2 + x_2^2 = C$ — интеграл системы.

$$\text{Пример 2. } \begin{cases} x_1' = \frac{2}{x_2}, \\ x_2' = \frac{1}{x_1}, \end{cases} (x_1, x_2) \in R^2, x_1 \neq 0, x_2 \neq 0.$$

Здесь $F(x_1, x_2) = \left(\frac{4}{x_2^2} + \frac{1}{x_1^2} \right) (x_1^2 + x_2^2) - \left(\frac{2x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \right)^2 = 1$ для любых

$(x_1, x_2) \in R^2, x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ и $\omega_0 = \frac{1}{2}$. Из системы следует, что $2x_1 dx_2 = x_2 dx_1$ и $x_2^2 = Cx_1$. В общем случае условие $F(z) = 4\omega_0^2$ для любого $z \in Z$, или, подробнее $\langle f, f \rangle \langle x, x \rangle - \langle x, f \rangle^2 = 4\omega_0^2$ позволяет строить вырожденные уравнения вида (1). Например, для случая $n=2, m=0$ $F(x_1, x_2) = (f_1^2 + f_2^2)(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 f_1 + x_2 f_2)^2 = (x_1 f_1 - x_2 f_2)^2 = 4\omega_0^2$, или $|x_1 f_2 - x_2 f_1| = 2\omega_0, \omega_0 > 0$. Таким образом, для того чтобы система

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2) \end{cases} (x_1, x_2) \in Z \quad (6)$$

была вырожденной, необходимо и достаточно выполнение тождества

$$x_1 f_2 - x_2 f_1 = a, \quad (a - \text{пост}), \quad (x_1, x_2) \in Z. \quad (7)$$

Отсюда вытекает, что вырожденные системы второго порядка имеют вид

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2) \\ x_2' = \frac{x_2 f_1(x_1, x_2) + a}{x_1} \end{cases}$$

Для более подробного изучения рассматриваемого случая перейдем к полярным координатам $x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi$. Для системы (6) получим

$$\begin{cases} r' = f_1 \cos \varphi + f_2 \sin \varphi \\ r\varphi' = -f_1 \sin \varphi + f_2 \cos \varphi, \end{cases} \quad (8)$$

а условие (7) запишется в виде $\varphi' r^2 = a$. Отсюда следует, что при постоянном r φ' также постоянно. Это означает, что в точках пересечения траекторий системы (8) с окружностью радиуса R с центром в начале координат величины проекций векторного поля системы на касательные к данной окружности принимают постоянные значения, равные a/R^2 . Если же рассмотреть величины проекций векторного поля системы на касательную к окружности в точках пересечения траекторий системы с лучом $\varphi = \varphi_0$, то в каждой точке величина проекции равна a/r^2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов Ю. С. Лекции по дифференциальным уравнениям. — Минск, 1977.
2. Богданова М. Ю., Наумович Н. Ф. — Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 9, с. 1613.

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ НА СФЕРЕ В МЕТРИКАХ $L_{p,\lambda}(S)$ ИНТЕГРАЛАМИ ТИПА ДЖЕКСОНА

Обозначения. $L_{p,\lambda}(S)$ — пространство функций, в котором суммируемо произведение $|f(\theta', \varphi')|^p [\sin^2 \theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\lambda - \frac{1}{2}}$ на единичной сфере S для всех $1 \leq p < \infty$.

$\|f\|_{p,\lambda} \equiv \left(\iint_S |f(\theta', \varphi')|^p [\sin^2 \theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\lambda - \frac{1}{2}} d\sigma' \right)^{\frac{1}{p}}$, $\lambda > 0$ — норма элемента $f \in L_{p,\lambda}(S)$; $d\sigma' = \sin \theta' d\theta' d\varphi'$ — элемент сферической поверхности. Обобщенное среднее значение функции f в точке $P(\theta, \varphi) \in S$ определяется формулой

$$f_T(\theta, \varphi) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{2\pi \Gamma(\lambda) \sin^{2\lambda} \gamma} \int_{C(p; \gamma)} \frac{f(\theta', \varphi') d\sigma'}{[\sin^2 \theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\frac{1}{2} - \lambda}}, \quad (1)$$

где $C(p; \gamma)$ — окружность с центром в точке $P(\theta, \varphi)$ и со сферическим радиусом γ , а $d\sigma' = \sin \theta' d\theta' d\varphi'$ — элемент дуги окружности.

$$\omega_f(\delta)_{L_{p,\lambda}(S)} = \sup_{0 < \gamma < \delta} \|f_T - f\|_{L_{p,\lambda}(S)} \quad (2)$$

— интегральный сферический модуль непрерывности, а

$$\Omega_f(\delta)_{L_{p,\lambda}(S)} = \sup_{0 < x < \frac{\pi}{\delta}} (1+x)^{-2} \omega_f(x\delta)_{L_{p,\lambda}(S)} \quad (3)$$

— обобщенный сферический интегральный модуль непрерывности. Обобщенным оператором Джексона на сфере назовем оператор

$$D_n^{[m]}(f, \theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi J_n^{[m]}} \iint_S \frac{f(\theta', \varphi') d_n^{[m]}(\cos \gamma) d\sigma'}{[\sin^2 \theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\frac{1}{2} - \lambda}}, \quad \lambda > 0, \quad (4)$$

$$[\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')],$$

где $d_n^{[m]}(\cos \gamma) = \left(\sin \frac{n\gamma}{2}\right)^{2m} \left(n \sin \frac{\gamma}{2}\right)^{-2m}$, а

$$J_n^{[m]} = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi d_n^{[m]}(\cos \gamma) \sin^{2\lambda} \gamma d\gamma,$$

m — натуральное число ≥ 2 .

Вопросы поточечной и равномерной сходимости операторов (4), а также порядок сходимости изучены нами в [1].

В настоящей заметке доказывается следующая

Теорема. Пусть $f \in L_{p,\lambda}(S)$, $\rho \geq 1$. Тогда для любого натурального $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$\|f - D_{(f)}^{[m]}\|_{L_{p,\lambda}(S)} \leq \frac{C_{m,\lambda,\rho}}{n^{2m-2\lambda-1}} \left(\sum_{v=1}^n v^{2(m\rho-\lambda-1)} \Omega_f^{\rho}\left(\frac{\pi}{v}\right)_{L_{p,\lambda}(S)} \right)^{\frac{1}{\rho}},$$

где $C_{m,\lambda,\rho} = \frac{1}{\lambda} 2^{3-2\lambda} \pi^{\frac{2m\rho+p+2\lambda+1}{2\rho}} \left(\frac{m}{3}\right)^{\lambda} + \frac{1}{2} \left(\frac{(1+m\rho)2^{2m\rho-2\lambda-1} \Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{\rho}}$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $1 < p < \infty$. Учитывая, что $D_n^{[m]}(1; \theta, \varphi) \equiv 1$, получаем

$$\|f - D_n^{[m]}(f)\|_{L_{p,\lambda}(S)} = \left(\iint_S \left| \frac{1}{2\pi J_n^{[m]}} \iint_S \frac{f(\theta', \varphi') d_n^{[m]}(\cos \gamma) d\sigma'}{[\sin^2 \theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\frac{1}{2} - \lambda}} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$-f(\Theta, \varphi)|^p [\sin^2 \Theta \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\lambda - \frac{1}{2}} d\sigma.$$

Переносим во внутреннем интеграле полюс сферы в точку $P(\Theta, \varphi)$, получаем в новых сферических координатах γ и ψ

$$\|f - D_n^{[m]}(f)\|_{L_{p,\lambda}(S)} \leq \frac{2\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)} I_n^{[m]} \left(\int_S \frac{(A_n + B_n) d\sigma}{|\sin^2 \Theta \sin^2(\varphi' - \varphi)|^{\frac{1}{2} - \lambda}} \right), \quad (5)$$

где $A_n = \left| \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} (f_1(\Theta, \varphi) - f(\Theta, \varphi)) d_n^{[m]}(\cos \gamma) \sin^{2\lambda} \gamma d\gamma \right|^p$, $B_n = \left| \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{2}} (f_1(\Theta, \varphi) - f(\Theta, \varphi)) d_n^{[m]}(\cos \gamma) \sin^{2\lambda} \gamma d\gamma \right|^p$. Оценим интеграл A_n . Применяя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned} A_n &\leq \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} |f_1(\Theta, \varphi) - f(\Theta, \varphi)|^p |d_n^{[m]}(\cos \gamma)|^p \sin^{2\lambda} \gamma d\gamma \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \sin^{2\lambda} \gamma d\gamma \right)^{p-1} \leq \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} |f_1(\Theta, \varphi) - f(\Theta, \varphi)|^p |d_n^{[m]}(\cos \gamma)|^p \sin^{2\lambda} \gamma d\gamma \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \sin^{2\lambda} \gamma d\gamma \right)^{p-1} = \\ &= \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda + 1)} \right)^{p-1} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} |f_1(\Theta, \varphi) - f(\Theta, \varphi)|^p |d_n^{[m]}(\cos \gamma)|^p \sin^{2\lambda} \gamma d\gamma. \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначим $F(t) = \int_0^t |f_1(\Theta, \varphi) - f(\Theta, \varphi)|^p \sin^{2\lambda} \gamma d\gamma$. В силу неравенства $|\sin n\gamma| \leq n |\sin \gamma|$ получим

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{n+1}} |f_1(\Theta, \varphi) - f(\Theta, \varphi)|^p \cdot \left(\frac{\sin \frac{n\gamma}{2}}{n \sin \frac{\gamma}{2}} \right)^{2mp} \sin^{2\lambda} \gamma d\gamma \leq \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} |f_1(\Theta, \varphi) - f(\Theta, \varphi)|^p \sin^{2\lambda} \gamma d\gamma = F\left(\frac{\pi}{n+1}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая (7) в (6), получаем

$$A_n = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda + 1)} \right)^{p-1} \cdot F\left(\frac{\pi}{n+1}\right). \quad (8)$$

Поступая аналогично, получаем оценку для B_n

$$\begin{aligned} B_n &\leq \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda + 1)} \right)^{p-1} \cdot \left(\frac{\pi}{n+1} \right)^{2mp} \cdot \left(\frac{F(\pi)}{\pi^{2mp}} - \left(\frac{n+1}{\pi} \right)^{2mp} \cdot F\left(\frac{\pi}{n+1}\right) + \right. \\ &\quad \left. + 2mp \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{F(\gamma) d\gamma}{\gamma^{2mp+1}} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Из (8) и (9) получаем

$$A_n + B_n \leq \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda + 1)} \right)^{p-1} \cdot \left(\frac{\pi}{n+1} \right)^{2mp} \left(\frac{F(\pi)}{\pi^{2mp}} + 2mp \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} \frac{F(\gamma) d\gamma}{\gamma^{2mp-1}} \right). \quad (10)$$

Положим $W[f; \Theta, \Phi](\delta) = \sup_{0 < t < \delta} \frac{1}{t} \int_0^t |f_t(\Theta, \Phi) - f(\Theta, \Phi)|^p d\gamma$. Учитывая, что $F(\delta) \leq \delta^{2\lambda+1} W[f; \Theta, \Phi](\delta)$, получим из (10) и (5)

$$\|D_n^{[m]}(f) - f\|_{L_{p,\lambda}(S)} \leq C_{p,\lambda,n,m} \left(\iint_S (\pi^{2\lambda+1-2mp} W[f; \Theta, \Phi](\pi) + 2mp \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} W[f; \Theta, \Phi](\gamma) \cdot \gamma^{2(\lambda-mp)} d\gamma) [\sin^2 \Theta \sin^2(\Phi' - \Phi)]^{\lambda - \frac{1}{2}} d\sigma \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (11)$$

где $C_{p,\lambda,n,m} = \frac{2\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) J_n^{[m]}} \left(\frac{\pi}{n+1} \right)^{2m} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda + 1)} \right)^{\frac{p-1}{p}}$.

Из неотрицательности и монотонности величины $W[f; \Theta, \Phi](\delta)$ следует, что

$$W[f; \Theta, \Phi](\pi) \leq \sum_{v=1}^n v^{2(mp-v-1)} W[f; \Theta, \Phi]\left(\frac{\pi}{v}\right), \quad (12)$$

а также

$$\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} W[f; \Theta, \Phi](\gamma) \cdot \gamma^{2\lambda-2mp} d\gamma = \pi^{2\lambda-2mp+1} \int_1^{n+1} W[f; \Theta, \Phi]\left(\frac{\pi}{\gamma}\right) \gamma^{2(mp-\lambda-1)} d\gamma \leq \leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\lambda-2-2mp} \cdot \sum_{v=1}^n v^{2mp-2\lambda-2} W[f; \Theta, \Phi]\left(\frac{\pi}{v}\right). \quad (13)$$

Учитывая (12) и (13) в (11), получаем

$$\|f - D_n^{[m]}(f)\|_{L_{p,\lambda}(S)} \leq C_{p,\lambda,n,m} \left(\iint_S (\pi^{2\lambda+1-2mp} + \frac{2mp}{\pi} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\lambda-2-2mp}) \times \times \sum_{v=1}^n v^{2mp-2\lambda-2} W[f; \Theta, \Phi]\left(\frac{\pi}{v}\right) [\sin^2 \Theta \sin^2(\Phi' - \Phi)]^{\lambda - \frac{1}{2}} d\sigma \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (14)$$

Учитывая, что [2] $J_n^{[m]} \sim \frac{4^m \Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{3}{m}\right)^{\lambda + \frac{1}{2}} \frac{1}{n^{2\lambda+1}}$, получаем из (14)

$$\|f - D_n^{[m]}(f)\|_{L_{p,\lambda}(S)} \leq C_{p,\lambda,m} n^{2\lambda+1-2m} \left(\sum_{v=1}^n v^{2(mp-\lambda-1)} \omega_f^p\left(\frac{\pi}{v}\right) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (15)$$

где $C_{p,\lambda,m} = \frac{1}{L} 2^{1-2\lambda} \pi^{\frac{2mp-p-2\lambda-1}{2p}} \left(\frac{m}{3}\right)^{\lambda + \frac{1}{2}} \left(\frac{(1+mp2^{2mp-2})\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{p}}$.

Из (2) и (3) следует, что

$$\omega_f(\delta)_{L_{p,\lambda}(S)} \leq 4\Omega_f(\delta)_{L_{p,\lambda}(S)}. \quad (16)$$

Учитывая (16) в (15), получаем утверждение теоремы. Для случая $p=1$ доказательство проводится, как в [1].

Следствие 1. Если $f \in L_{p,\lambda}(S)$, $p \geq 1$, то

$$\|f - D_n^{[m]}(f)\|_{L_{p,\lambda}(S)} = O(1) \frac{\Omega_f\left(\frac{1}{n}\right)_{L_{p,\lambda}(S)}}{n^{2m-2\lambda-3}} \begin{cases} (\log n + 1)^{\frac{2m-2}{1+2\lambda}}, & p = \frac{1+2\lambda}{2m-2}, \\ n^{2m-2-\frac{2\lambda-1}{p}}, & p > \frac{1+2\lambda}{2m-2}, \\ 1, & p < \frac{1+2\lambda}{2m-2}. \end{cases}$$

Следствие 2. Если $f \in L_{p,\lambda}(S)$, $p \geq 1$ и $\|f - f_1\|_{L_{p,\lambda}(S)} = O\left(\sin^2 \frac{\nu}{2}\right)$, $\alpha > 0$, то

$$\|f - D_n^{[m]}(f)\|_{L_{p,\lambda}(S)} = O(1) \frac{1}{n^{2m-2\lambda-1}} \begin{cases} (\log n + 1)^{\frac{1}{p}}, & \alpha = \frac{2mp-2\lambda-1}{p}, \\ n^{\frac{2mp-2\lambda-1-\alpha p}{p}}, & \alpha < \frac{2mp-2\lambda-1}{p}, \\ 1, & \alpha > \frac{2mp-2\lambda-1}{p}. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ибрагимов Э. Дж.— Уч. зап. Азгосунверситета им. С. М. Кирова, 1974, с. 17.
2. Scures F. and Steutel F. W. (Holland).— Matl., 1967, v. 9(32), № 1, p. 155.

Поступила в редакцию
24.05.82.

Кафедра функционального анализа

УДК 518:517(944)947

П. А. ВАКУЛЬЧИК

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ МЕТОДА НЬЮТОНА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ СМЕШАННУЮ ЗАДАЧУ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Исследование сходимости метода Ньютона решения нелинейных разностных уравнений проведем на примере аппроксимации однородной системы квазилинейных уравнений в дивергентной форме [1]

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(U)}{\partial x}, \quad U = \{u^1, u^2, \dots, u^n\}, \quad \varphi = \{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n\}, \quad (1)$$

где матрица $A = \left\{ \left\{ \frac{\partial \varphi^i(U)}{\partial u^j} \right\} \right\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ удовлетворяет условию гиперболичности и ее собственные значения $\xi^i(U)$, $i = 1, 2, \dots, n$ таковы, что $\xi^i(U) \leq 0$, $i = \overline{1, n_0}$, $n_0 \leq n$; $\xi^i(U) > 0$, $i = \overline{n_0+1, n}$. Для системы (1) рассмотрим начальные при $t=0$

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

и граничные при $x=0$ и $x=1$ условия

$$L(x, t)U(x, t) = \psi(x, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad \psi = \{\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^n\}, \quad (3)$$

где матрица $L(x, t)$ удовлетворяет условию корректности [2] смешанной задачи. Пусть решение задачи (1) — (3) в прямоугольнике $\Pi = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ существует, единственно, и компоненты вектора решения $U = U(x, t)$ принадлежат классу $C_3^1(\Pi)^*$ [1]. При этом функции $\varphi^i(U)$, $i = \overline{1, n}$, дважды непрерывно дифференцируемы по компонентам вектора U .

Следуя интегро-интерполяционному методу построения консервативных разностных схем [3], на сетке ω_{ht} рассмотрим неявную разностную схему

$$\Gamma_i = [\varphi(\hat{Y})]_i, \quad (4)$$

аппроксимирующую исходную систему уравнений (1) с погрешностью $O(\tau+h^2)$. Здесь $Y = \{y^1, y^2, \dots, y^n\}$, $Y = 0,5(Y + Y_{(t+\tau)})$. К системе разностных уравнений (4) присоединим начальные и граничные условия, аналогичные (2) — (3). Решение полученной нелинейной разностной задачи будем искать, используя метод Ньютона [3]. После несложных преобразований линеаризованная система разностных уравнений в индексной форме, соответствующая (4), примет следующий вид:

$$0,5\tau^{-1} (y_{i+1}^{k(s+1)} + y_i^{k(s+1)} - y_{i+1}^k - y_i^k) - h^{-1} [\varphi_{i+1}^{k(s)}] + \\ + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \varphi_{i+1}^{k(s)}}{\partial y_{i+1}^l} (y_{i+1}^{l(s+1)} - y_{i+1}^{l(s)}) - \varphi_i^k - \sum_{l=1}^n \frac{\partial \varphi_i^{k(s)}}{\partial y_i^l} (y_i^{l(s+1)} - y_i^{l(s)}) = 0, \\ k = 1, 2, \dots, n; i = 0, 1, \dots, N-1, \quad (5)$$

где s — номер итерации на $j+1$ -ом слое; y_i^k соответствует k -компоненте вектор-решения Y в i -точке j -слоя; $N-1$ — число точек сетки ω_h . Будем исследовать поведение погрешности $z_i = u_i^{(s+1)k} - y_i^k$ приближенного решения, получаемого из (5), при $s \rightarrow \infty$. С этой целью из каждого уравнения системы (1) вычтем соответствующее уравнение системы (5) и воспользуемся тем, что $\varphi_i^k(u) = \varphi_i^k + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \varphi_i^{k(s)}}{\partial y_i^l} (u_i^l - y_i^l) + \left[\sum_{l=1}^n (u_i^l - y_i^l) \frac{\partial}{\partial y_i^l} \right]^2 \varphi_i^k(u + \theta Z) = \varphi_i^k + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \varphi_i^{k(s)}}{\partial y_i^l} Z_i^l + \left[\sum_{l=1}^n z_i^l \frac{\partial}{\partial y_i^l} \right]^2 \varphi_i^k(\bar{Y})$, $k = 1, 2, \dots, n$, $0 < \theta < 1$.

Тогда для $Z = \{z^1, z^2, z^n\}$ получим следующую систему:

$$Z_i - (A Z)_x = [F(Z)]_x + R(\tau + h^2), \quad (6)$$

где $F(Z)^2 = \left[\sum_{l=1}^n z_i^l \frac{\partial}{\partial y_i^l} \right]^2 \varphi_i^k(\bar{Y})$, $R(\tau + h^2)$ — погрешность аппроксимации разностной схемы (4). К системе (6) присоединим начальные и граничные условия

$$Z(x, 0) = 0, \quad x \in \omega_h \quad (7), \quad L(x, t+\tau) Z(x, t+\tau) = 0, \quad x=0, x=1, t \in \omega_\tau \quad (8)$$

Перепишем систему (6) следующим образом:

$$\bar{Z}_i - \bar{A} \bar{Z}_x + \frac{1}{2} (A_x \bar{Z} + h A_x Z_x) = -[(A - \bar{A}) Z - F(Z)]_x + R(\tau + h^2),$$

где $\bar{A} = A(U)$. Используя теперь методику приведения граничных условий к диссипативному виду [2], обозначим $v^i = \mu^i(x, t) \prod_{j=1}^n l^{ij}(U) z^j$, $i = 1, 2, \dots, n$, где $\mu^i(x, t) > 0$ — некоторые гладкие функции; $l^{ij}(U)$ — элементы матрицы левых собственных векторов $A(U)$. Тогда последняя система примет вид

$$\bar{V}_i - \bar{\xi}(U) \bar{V}_x + A_1(U) \bar{V} + h A_2(U) \bar{V}_x = \\ = -M(U) \{[(A - \bar{A}) Z - F(Z)]_x + R(\tau + h^2)\} \quad (9)$$

с начальными и граничными условиями, аналогичными (7) — (8). Здесь $\bar{\xi}(U)$ — диагональная матрица собственных значений A . Следуя работе [4], умножим скалярно обе части соотношения (9) на $2\tau(\bar{V} - \text{sign}(\bar{\xi}) \bar{V}_x)$.

При оценке слагаемых скалярного произведения будем пользоваться строгой диссипативностью граничных условий, неравенством Коши — Буныковского и ε -неравенством [5], а также теоремами вложения [5, 6]. В результате получим следующее рекуррентное неравенство:

$$Q_{j+1}^{(s+1)} \leq (1 + \tau a) Q_j^2 + a_1^{(s)} Q_{j+1}^4 + a_2^{(s)} Q_{j+1}^{(s)} Q_{j+1}^{(s+1)} + \tau (\tau + h^2)^2, \quad (10)$$

где $Q_{j+1}^{(s+1)} = \|\bar{V}\|^2 + \|\hat{\xi}\|^2 \frac{1}{2} V_x\|^2$, $Q_j^2 = \|\bar{V}\|^2 + \|\hat{\xi}\|^2 \frac{1}{2} V_x\|^2$.

$$\|M(U) \{[(\hat{A} - A) Z + F(Z)]_x + R(\tau + h^2)\}\|^2 \leq a_1^{(s)} Q_{j+1}^{(s)} + a_2^{(s)} Q_{j+1}^{(s)} Q_{j+1}^{(s+1)} + \tau (\tau + h^2)^2, \quad a = a(U), \quad a = a^{(s)}.$$

Из (7) следует, что $Q_0 = 0$. Пусть известно, что $Q_j \leq v(\tau + h^2)$, где v — некоторая ограниченная величина. Рассмотрим поведение Q_{j+1} при $s \rightarrow \infty$. Для нахождения решения с помощью итерационного правила (5) необходимо задать Y на $j+1$ -слое. Это значение мы будем брать на предыдущем j -слое. Тогда $Q_{j+1}^{(0)} = O(\tau + h^2)$. Обозначим

$$Q_j^2 (1 + \tau a) + \tau (\tau + h^2)^2 = c, \quad \max \{a_1^{(s)}, a_2^{(s)}\} Q_{j+1}^{(0)} \leq p^* Q_{j+1}^{(0)} \leq p,$$

и пусть $p > c$. Здесь величина $c = O(\tau + h^2)^2$. Ограниченность величины p будет следовать при получении оценок для $Q_{j+1}^{(s)}$ при $s = 1, 2, \dots$, кроме того, мы покажем, что $p = O(\tau + h^2)^2$. При $s = 0$ очевидно неравенство

$$Q_{j+1}^{(1)} \leq \frac{p}{1-p} Q_{j+1}^{(0)} + \frac{c}{1-p}. \quad (*)$$

Если теперь в (10) положить $s = 1$ и воспользоваться неравенством (*), то получим

$$\left(1 - \frac{p^2 + c}{1-p}\right) Q_{j+1}^{(2)} \leq \frac{p^2 + 2cp}{(1-p)^2} Q_{j+1}^{(0)} + c + \frac{c^2}{(1-p)^2}.$$

Из того, что

$$\frac{p^2 + 2c}{1-p} \left/ \left(1 - \frac{p^2 + c}{1-p}\right)\right. \leq \frac{1}{2}, \quad \left(c + \frac{c^2}{(1-p)^2}\right) \left/ \left(1 - \frac{p^2 + c}{1-p}\right)\right. \leq \frac{c}{1-p} \left(1 + \frac{c}{1-p}\right),$$

следует неравенство

$$Q_{j+1}^{(2)} \leq \frac{1}{2} \frac{p}{1-p} Q_{j+1}^{(0)} + \frac{c}{1-p} \left(1 + \frac{c}{1-p}\right). \quad (**)$$

Рассуждая аналогичным образом для $s = 2$ и воспользовавшись неравенством (**), получаем

$$Q_{j+1}^{(3)} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{p}{1-p} Q_{j+1}^{(0)} + \frac{c}{1-p} \left(1 + \frac{c}{1-p}\right)$$

и т. д. Таким образом, справедливо соотношение

$$Q_{j+1}^{(s+1)} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{s-1}} \frac{p}{1-p} Q_{j+1}^{(0)} + \frac{c}{1-p} \left(1 + \frac{c}{1-p}\right), \quad s = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

из которого следует, что при $s \rightarrow \infty$ влияние погрешности $Q_{j+1}^{(0)}$ ослабевает и имеет место «грубая» оценка

$$\lim_{s \rightarrow \infty} Q_{j+1}^{(s+1)} = Q_{j+1}^2 \leq \frac{c}{1-p} \left(1 + \frac{c}{1-p}\right).$$

Используя эту оценку и возвращаясь к соотношению (10) при $s \rightarrow \infty$, получаем рекуррентное неравенство

$$Q_{j+1}^2 \leq (1 + \tau\alpha) Q_j^2 + \tau \left[r + 2\rho^* \left(1 + \frac{c}{1-\rho} \right) \frac{c\tau^{-1}}{(1-\rho)^2} (v(1 + \tau\alpha) + \tau r) \right] (\tau + h^2)^2,$$

из которого следует, что

$$Q_{j+1}^2 \leq (1 + \tau\alpha) Q_j^2 + \tau [r + O(c\tau^{-1})] (\tau + h^2)^2.$$

Так как $c\tau^{-1} = O(\tau + h^2)^2\tau^{-1}$, то для сходимости разностной схемы, следуя [4, 7, 8], необходимо потребовать, чтобы $(\tau + h^2)^2\tau^{-1} \rightarrow 0$. Это будет выполняться при достаточно малых h и τ и таких, что $\tau = h^2$, $\alpha < 4$. Таким образом, справедлива

Теорема 1. Пусть разностная схема (4) аппроксимирует исходную систему (1) с погрешностью $O(\tau + h^2)$ и элементы матрицы $A(U)$ и вектора $\varphi(U)$ являются функциями гладкими. Тогда при достаточно малых шагах сетки h и τ и таких, что $\tau = h^2$, $\alpha < 4$, решение, получаемое из линеаризованной по методу Ньютона системы (5), сходится к решению исходной задачи, при этом скорость сходимости по порядку совпадает с погрешностью аппроксимации.

З а м е ч а н и е 1. Аналогичным образом исследуется сходимость метода Ньютона решения многопараметрического семейства неявных разностных схем вида $\bar{y}_i = [\varphi'(Y)]_i^{(2)}$, при этом теорема 1 имеет место, если $\sigma_i \geq 0,5$.

З а м е ч а н и е 2. Изложенный метод исследования переносится на случай гиперболических систем вида $\frac{\partial \beta(U)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(U)}{\partial x}$, где $\beta = \{\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^n\}$. Рассмотрим, например, систему уравнений газовой динамики в случае изотермического течения идеального газа [3]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial v}{\partial s}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial g}{\partial s}, \quad g = p + \omega, \quad \omega = -\nu \rho \frac{\partial v}{\partial s}, \quad \nu > 0. \quad (12)$$

На равномерной сетке узлов рассмотрим разностную схему

$$\left(\frac{1}{\rho} \right)_t = v_s^{(2)}, \quad \bar{v}_t = - \left[p^{(2)} - \nu \rho \left(\frac{1}{\rho} \right)_t \right]_s, \quad (13)$$

которая при достаточной гладкости решения исходной задачи (12) аппроксимирует ее с погрешностью $O(\tau + h^2)$. Для нахождения решения из (13) будем использовать метод Ньютона [3, 9]. Линеаризованная система, соответствующая (13), примет вид

$$\begin{aligned} - \frac{\delta \left(\frac{1}{\rho} \right)}{\rho^2} + \tau \delta v_s^{(2)} &= - \tau \left(\frac{1}{\rho} \right)_t + \tau v_s^{(2)}, \\ \delta \bar{v} + [(c^2 \sigma_1 + \nu \rho \rho^{-1}) \delta \rho]_s &= - \tau v_t - c^2 \tau \rho_s^{(2)} + \nu (\rho \rho^{-1})_s, \quad (14) \\ \delta \bar{f} &= \bar{f} - f. \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть исходная задача (12) имеет достаточно гладкое решение и разностная схема (13) аппроксимирует ее с погрешностью $O(\tau + h^2)$ ($\sigma_1 \geq 0,5$, $\sigma_2 \geq 0,5$, $\sigma_1 + \sigma_2 > 1$). Тогда при достаточно малых h и τ и таких, что $\tau = h^2$, $\alpha > 1,5$, $\nu = O(\tau)$, решение, получаемое из (14), стремится при $k \rightarrow \infty$ к точному решению задачи (12), при этом скорость сходимости по порядку совпадает с погрешностью аппроксимации.

Если же $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$ и разностная схема (13) аппроксимирует (12) с погрешностью $O(\tau^2 + h^2)$, то в этом случае необходимо потребовать $\tau = h^2$, $\alpha > 0,5$.

З а м е ч а н и е 3. Для нелинейной гиперболической системы [1]

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \varphi \left(x, t, U \frac{\partial U}{\partial x} \right) \quad (15)$$

в отличие от [4, 7, 8] рассмотрим неявную разностную схему

$$Y_t = \varphi(x, t, \hat{Y}, \hat{Y}_x) \quad (16)$$

с начальными и граничными условиями типа (1), (3). Решение системы нелинейных уравнений (16) будем находить, используя метод Ньютона, который сводит систему (16) к линеаризованной

$$\hat{y}_i^{(s+1)} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \varphi_i^k}{\partial y_l^{(s)}} (\hat{y}^{(s+1)} - \hat{y}^{(s)}) + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \varphi_i^k}{\partial y_x^{(s)}} (y_x^l - y_x^l) + \varphi_i^k, k=1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

Теорема 3. Пусть разностная схема (16) аппроксимирует исходную систему (15) с погрешностью $O(\tau+h^2)$ и компоненты вектора φ являются функциями достаточно гладкими. Тогда при $h, \tau \rightarrow 0$ и таких, что $\tau = h^\alpha$, $1 < \alpha < 3$, решение, получаемое из системы (17), сходится к решению исходной задачи, при этом скорость сходимости совпадает по порядку с погрешностью аппроксимации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений.— М., 1978.
2. Годунов С. К. Уравнения математической физики.— М., 1971.
3. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики.— М., 1980.
4. Вакульчик П. А.— Вести. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 2, с. 41.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем.— М., 1977.
6. Андреев В. Б.— Ж. выч. мат. и мат. физ., 1968, т. 8, № 6, с. 1218.
7. Абрашн В. Н.— Дифференц. уравнения, 1975, т. 11, № 2, с. 294.
8. Абрашн В. Н.— Вестн АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1977, № 4, с. 13.
9. Вакульчик П. А.— В сб.: Актуальные проблемы общественных и естественных наук. Минск, 1981, с. 52.

Поступила в редакцию
29.05.82

Кафедра вычислительной математики

УДК 62-50

Л. А. ПИЛИПЧУК

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДВУХПРОДУКТОВОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ ОГРАНИЧЕНИЙ ПРЯМЫМ МЕТОДОМ

Рассмотрим сетевую двухпродуктовую транспортную задачу с дополнительными ограничениями:

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{(i,j) \in U} c_{ij}^k x_{ij}^k \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\sum_{i \in I_i^+(U)} x_{ij}^k - \sum_{i \in I_i^-(U)} x_{ij}^k = a_i^k, \quad i \in I, \quad (2)$$

$$x_{ij}^k \geq 0, \quad x_{ij}^1 + x_{ij}^2 \leq d_{ij}, \quad (i, j) \in U, \quad k = 1, 2, \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{(i,j) \in M_p} \lambda_{ij}^{kp} x_{ij}^k = \alpha_p, \quad p = \overline{1, l}, \quad (4)$$

где I, U — множества узлов и дуг сети S ; $c_{ij}^k, a_i^k, d_{ij}, \alpha_p, \lambda_{ij}^{kp}$ — заданные числа; $M_p \subset U$ — заданные множества, $I_i^+(U) = \{j : (i, j) \in U\}$, $I_i^-(U) = \{j : (j, i) \in U\}$.

В данной работе строится алгоритм решения задачи (1)–(4), которая отличается от [1] наличием коэффициентов λ_{ij}^{kp} , $k = 1, 2, p = \overline{1, l}$, $(i, j) \in M_p$, $M_p \subset U$, где λ_{ij}^{kp} — произвольные действительные числа.

Опорой сети будем называть совокупность дуг $U_{оп} = \{U_{оп}^1, U_{оп}^2, U^*\}$,

такую, что $U_{\text{он}}^k \subset U^k$, $k = 1, 2$; $U^* \subset U_{\text{он}}^1 \cap U_{\text{он}}^2 = \{(i, j) : (i, j)^1 \in U_{\text{он}}^1, (i, j)^2 \in U_{\text{он}}^2\}$, $U = U^1 \cup U^2$, $I(U_{\text{он}}^k) = \{(i, j)^k \in U_{\text{он}}^k, k = 1, 2\}$, и система

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_{\text{он}}^+(U_{\text{он}}^k)} x_{ij}^k - \sum_{i \in I_{\text{он}}^-(U_{\text{он}}^k)} x_{ji}^k &= 0, \quad i \in I(U_{\text{он}}^k), \\ x_{ij}^k + x_{ji}^k &= 0, \quad (i, j) \in U^*, \\ \sum_{k=1}^2 \sum_{(i, j) \in M_{p_i}} \lambda_{ij}^{kp} x_{ij}^k &= 0, \quad p = \overline{1, l}, \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (5)$$

имеет только тривиальное решение для $M_{p_i} = M_p \cap (U_{\text{он}}^1 \cup U_{\text{он}}^2)$ и нетривиальное для каждой из следующих совокупностей:

- 1) $\{U_{\text{он}}^k, k = 1, 2, U^* \setminus (i, j)\}$, где (i, j) — любая дуга из U^* ;
- 2) $\{U_{\text{он}}^1 \cup (i, j), U_{\text{он}}^2, U^*\}$, где $(i, j)^1$ — любая дуга из $U^1 \setminus U_{\text{он}}^1$;
- 3) $\{U_{\text{он}}^1, U_{\text{он}}^2 \cup (i, j)^2, U^*\}$, где $(i, j)^2$ — любая дуга из $U^2 \setminus U_{\text{он}}^2$;

Пара $\{x, U_{\text{он}}\}$ из потока и опоры — опорный поток. Дуги $(i, j)^k \in U_{\text{он}}^k$, $k = 1, 2$ назовем опорными, остальные — неопорными. Опорный поток назовем невырожденным, если опорные дуговые потоки удовлетворяют следующим неравенствам; $x_{ij}^k > 0$, $(i, j)^k \in U_{\text{он}}^k$, $k = 1, 2$; $x_{ij}^1 + x_{ij}^2 < d_{ij}$, для $(i, j)^1 \in (U_{\text{он}}^1 \cup U_{\text{он}}^2) \setminus U^*$ или $(i, j)^2 \in (U_{\text{он}}^1 \cup U_{\text{он}}^2) \setminus U^*$.

Рассмотрим некоторый цикл L_q в сети $S: (i_1^q, i_2^q, \dots, i_n^q)$. Выбрав в нем направление движения, обозначим через L_q^+ и L_q^- множество прямых и обратных дуг цикла L_q соответственно. Число

$$R_p(L_q) = \sum_{(i, j) \in L_q} \lambda_{ij}^{kp} \text{sign}(i, j)^q, \quad k = \begin{cases} 1, & q \leq l_1, \\ 2, & q > l_1 \end{cases}$$

назовем детерминантом цикла L_q относительно p -го ограничения из (4), функция определяется соотношением

$$\text{sign}(i, j)^q = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, j) \in L_q^+, \\ -1, & \text{если } (i, j) \in L_q^-, \\ 0, & \text{если } (i, j) \in \overline{L_q}. \end{cases}$$

Дуга $(i_1^t, i_2^t) \in U_{\text{он}}$ называется ациклической, если $(i_1^t, i_2^t) \in U_a^k$, $U_{\text{он}}^k = U_a^k \cap U_a^k = \emptyset$, где $L_t = \{I_t, U_t\}$ — некоторый цикл из множества L . Введем множества U_a^1, U_a^2 ациклических дуг соответственно первого и второго продуктов, $U_a = U_a^1 \cup U_a^2$, $U_a^1 = \bigcup_{t=1}^{l_1} (i_1^t, i_2^t)^k$, $U_a^2 = \bigcup_{t=l_1+1}^{l_1+l_2} (i_1^t, i_2^t)^k$, $k = \begin{cases} 1, & t \leq l_1 \\ 2, & t > l_1 \end{cases}$.

Для каждого цикла составим систему уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_{\text{он}}^+(U_t)} \tilde{y}_{it}^k - \sum_{i \in I_{\text{он}}^-(U_t)} \tilde{y}_{it}^k &= 0, \\ i \in I(U_t), \quad k &= \begin{cases} 1, & t \leq l_1, \\ 2, & t > l_1, \quad t = \overline{1, l_1 + l_2} \end{cases} \end{aligned}$$

из которой однозначно определим потоки \tilde{y}_{it}^k , предварительно положив поток по ациклической дуге равным

$$y_{i_1^t i_2^t}^k = 1, \quad k = \begin{cases} 1, & t \leq l_1 \\ 2, & t > l_1, \quad t = \overline{1, l_1 + l_2}. \end{cases}$$

Упорядочим произвольным образом дуги множества U^* . Пусть $D_l = \{R_p(L_q), q = \overline{1, l_1 + l_2}\} - l \times (l_1 + l_2)$ — матрица, составленная из чисел $\rho = \overline{1, l}$

$R_p(L_q)$, и $D_2 = \{\delta_{\tau(i, j), t} (i_1, i_2)^k, (i_1, i_2)^k \in U_a^k, k = 1, 2\} - |U^*| \times (I_1 + I_2)$ -матрица, составленная из элементов

$$\delta_{\tau(i, j), t} = \begin{cases} y_{ij}^k, & \text{если } (i^t, j^t) \in U_t \cap U^*, \\ 0, & \text{если } (i^t, j^t) \notin U_t \cap U^*, \end{cases}$$

где $\tau(i, j)$ — порядковый номер дуги в U^* , $k = \begin{cases} 1, & t \leq I_1 \\ 2, & t > I_1 \end{cases}$. Составим

$(|U^*| + I) \times (I_1 + I_2)$ — матрицу $D = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix}$. Если $I_1 + I_2 \neq |U^*| + I$, то дополним матрицу D нулями до квадратной матрицы. Число $R = \det D$ назовем детерминантом опоры $U_{\text{оп}}$.

Теорема (критерий опорности). Для того чтобы совокупность $U_{\text{оп}}$ была опорой сети S , необходимо и достаточно выполнение условий:

- 1) $I(U_{\text{оп}}^k) = I, k = 1, 2$;
- 2) $U_{\text{оп}}^k, k = 1, 2$ — связные множества;
- 3) $R \neq 0$.

Доказательство теоремы аналогично [1]. По опоре $U_{\text{оп}}$ построим потенциалы $u_i = \{u_i^1, u_i^2\}, i \in I; r_p, p = \overline{1, l}; r_{p_1}, p_1 = \overline{l+1, l+|U^*|}$, как решение системы:

$$u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^{kp} r_p - c_{ij}^k = 0, (i, j) \in U_{\text{оп}}^k \setminus U^*, \quad (6)$$

$$u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^{kp} r_p - c_{ij}^k = u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^{2p} r_p - c_{ij}^k, (i, j) \in U^*, k = 1, 2.$$

Будем говорить, что $u_i = \{u_i^1, u_i^2\}$ — вектор потенциалов узлов $i \in I$, r_p — потенциал дополнительного ограничения (4), r_{p_1} — потенциал ограничения $x_{ij}^1 + x_{ij}^2 \leq d_{ij}$.

Для нахождения потенциалов $r_p, r_{p_1}, p = \overline{1, l}, p_1 = \overline{l+1, l+|U^*|}$, следуя [1], запишем систему:

$$\sum_{p=1}^l R_p(L_l) r_p + \sum_{p_1=l+1}^{l+|U^*|} r_{p_1} \delta_{\tau(i, j), t} = \sum_{(i, j) \in L_l} c_{ij}^k \text{sign}(i, j)^t \quad (7)$$

Равенство (7) можно переписать в следующем виде:

$$D'r = c, r = \{r_p, r_{p_1}\}, c = \{c_1, c_2, \dots, c_{l+I_2}\}, \quad (8)$$

$$c_t = \sum_{(i, j) \in L_l} c_{ij}^k \text{sign}(i, j)^t, k = \begin{cases} 1, & t \leq I_1 \\ 2, & t > I_1 \end{cases}$$

Система (8) относительно r имеет единственное решение, так как $R \neq 0$. Величины r_{p_1} , вычисленные из системы (8), обозначим через γ_{ij} , $(i, j) \in U^*$. Имеем

$$\bar{c}_{ij}^k = \begin{cases} c_{ij}^k, & (i, j) \notin U^*, \\ c_{ij}^k - \gamma_{ij}, & (i, j) \in U^*, k = 1, 2. \end{cases}$$

Вместо системы (6) запишем эквивалентную ей систему:

$$u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^{kp} r_p - \bar{c}_{ij}^k = 0, (i, j) \in U_{\text{оп}}^k, k = 1, 2.$$

Теперь векторы потенциалов $u_i = \{u_i^1, u_i^2\}$ найдем с помощью деревьев $U_a^k, k = 1, 2$ и чисел \bar{c}_{ij}^k , где $U_a^k = U_{\text{оп}}^k \setminus U_a^k, U_a^k$ — множество ациклических дуг, как в классическом методе потенциалов [2].

Для каждой дуги вычислим вектор оценок

$$\Delta_{ij} = \{\Delta_{ij}^1, \Delta_{ij}^2\}: \Delta_{ij}^k = u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^{kp} r_p - c_{ij}^k, (i, j) \in U, k = 1, 2.$$

Следуя [3], можно доказать

Критерий оптимальности. Если для опорного потока выполняются соотношения:

а) на ненасыщенных дугах ($x_{ij}^1 + x_{ij}^2 < d_{ij}$):

$$\Delta_{ij}^k \leq 0 \text{ при } x_{ij}^k = 0; \quad (9)$$

$$\Delta_{ij}^k = 0 \text{ при } x_{ij}^k > 0, (i, j) \in U, k = 1, 2. \quad (10)$$

б) на насыщенных дугах ($x_{ij}^1 + x_{ij}^2 = d_{ij}$):

$$\Delta_{ij}^1 = \Delta_{ij}^2 \geq 0 \text{ при } x_{ij}^1 > 0, x_{ij}^2 > 0, \quad (11)$$

$$\Delta_{ij}^1 \geq \Delta_{ij}^2, \Delta_{ij}^1 \geq 0 \text{ при } x_{ij}^1 = d_{ij}, x_{ij}^2 = 0, (i, j) \in U. \quad (12)$$

Критерий субоптимальности. Поток $x = \{x_{ij}^{k0}, (i, j) \in U, k = 1, 2\}$ назовем ε -оптимальным (субоптимальным), если

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{(i, j) \in U} c_{ij}^k x_{ij}^k - \sum_{k=1}^2 \sum_{(i, j) \in U} c_{ij}^k x_{ij}^{k0} \leq \varepsilon.$$

Для любого ε -оптимального потока выполняется неравенство (13) (доказательство аналогично [1]).

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{(i, j) \in U} c_{ij}^k x_{ij}^k - \sum_{k=1}^2 \sum_{(i, j) \in U} c_{ij}^k x_{ij}^{k0} \leq \beta, \quad (13)$$

где $\beta = - \sum_{k=1}^2 \sum_{(i, j) \in U} \Delta_{ij}^k x_{ij}^k - \sum_{(i, j) \in U} (\Delta_{ij}^1 x_{ij}^1 + \Delta_{ij}^2 (x_{ij}^2 - d_{ij}))$.

$$\max_{\{\Delta_{ij}^k, k=1, 2; 0\}} = 0 \max_{\{\Delta_{ij}^1, \Delta_{ij}^2, 0\}} = 0$$

Если для опорного потока $\{x, U_{\text{оп}}\}$ приведенные критерии оптимальности (9—12) и субоптимальности (13) не выполняются, опишем алгоритм улучшения потока.

Среди дуг, для которых не выполнен критерий оптимальности, найдем дугу с максимальным нарушением, т. е. если для ненасыщенной дуги не выполнены условия (9)—(10), то помечаем число Δ_{ij}^k , если же для насыщенной дуги не выполнены условия (11)—(12), то при $\max\{\Delta_{ij}^1, \Delta_{ij}^2\} > 0$ помечаем число $\Delta_{ij}^1 - \Delta_{ij}^k$, при $\max\{\Delta_{ij}^k, k = 1, 2\} < 0$ и $x_{ij}^k \geq 0, k = 1, 2$ помечаем число Δ_{ij}^k . Среди отмеченных чисел выбираем максимальное по модулю число. Рассмотрим следующие случаи:

1) максимальное из отмеченных чисел имеет вид Δ_{ij}^k и находится на дуге $(i_0, j_0)^k, (i_0, j_0)^k \in U^*$;

2) максимальное из чисел имеет вид Δ_{ij}^k и находится на дуге $(i_0, j_0)^k, (i_0, j_0)^k \in U^*$;

3) максимальное число имеет вид $\Delta_{ij}^l - \Delta_{ij}^k, l, k = 1, 2, l \neq k$.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

1. Не нарушая общности, положим $k = 1$.

Найдем поток $Y (U_{\text{оп}}^1 \cup U_{\text{оп}}^2 \cup (i_0, j_0)^1) = \{y_{ij}^k, (i, j)^k \in U_{\text{оп}}^k, y_{i_0 j_0}^k, k = 1, 2\}$, компоненты которого удовлетворяют системе (5), записанной относительно множества $\{U_{\text{оп}}^1 \cup (i_0, j_0)^1, U_{\text{оп}}^2, U^*\}$, и условию $y_{i_0 j_0}^k = \text{sign } \Delta_{i_0 j_0}^k$. Аналогично [1] определим вектор α :

$$\alpha = \begin{cases} -R_p(L_0) \cdot y_{i_0 j_0}^1, & p = \overline{1, l} \\ -\tilde{y}_{ij}^0 y_{i_0 j_0}^1, & \text{если } (i, j) \in U^* \cap U^0 \\ 0, & \text{если } (i, j) \in U^* \setminus U^0, \end{cases}$$

где $Z_0 = \{l, U^0\}$ — множество узлов и дуг цикла, образованного дугами $(i_0, j_0)^1$ и $(i, j)^1 \in U_{\text{оп}}^1 \setminus U_a^1$, и определим потоки на ациклических дугах.

Потоки на дугах $U_{on}^k \setminus U_a^k$ определяются по формуле:

$$y_{ij}^k = \begin{cases} \sum_{t \in T(i, j)^k} \bar{y}_{i'j'}^k \cdot y_{i't'}^k, & T(i, j)^k \neq \emptyset, \\ 0, & T(i, j)^k = \emptyset, \quad k = \begin{cases} 1, & t \leq l_1 \\ 2, & t > l_1 \end{cases} \end{cases} \quad (14)$$

где $T(i, j)^k = \{t : (i, j)^k \in U^t(i_1, i_2)^k, (i_1, i_2)^k \in U_a^k, (i', j')^k - \text{ациклическая дуга, определившая цикл } Z_t = Z_{t(i_1, i_2)^k}\}$. Новый поток \bar{x} строим в виде: $\bar{x}_{ij}^k = x_{ij}^k + \Theta y_{ij}^k, (i, j)^k \in U_{on}^k, k = 1, 2; \bar{x}_{i_0j_0}^k = x_{i_0j_0}^k + \Theta y_{i_0j_0}^k; \bar{x}_{ij}^k = x_{ij}^k, (i, j)^k \in U^k \setminus U_{on}^k$, где Θ — максимально допустимый шаг, найденный по стандартным правилам [3]. При переходе $x \rightarrow \bar{x}$ стоимость потока уменьшилась на величину $-\Theta |\Delta_{i_0j_0}^k|$. Опорные множества меняем по правилам, указанным в [1].

2. Найдем поток $Y(U_{on}^1 \cup U_{on}^2)$, удовлетворяющий системе (5), записанной относительно множеств $\{U_{on}^1, U_{on}^2, U^* \setminus (i_0, j_0)\}$, и условию $y_{i_0j_0}^1 + y_{i_0j_0}^2 = -1$. Компоненты вектора α и ациклические направления определим аналогично [1]. Из соотношения (14) найдем $y_{ij}^k, (i, j)^k \in U_{on}^k \setminus U_a^k$. Новый поток \bar{x} строим в виде $\bar{x}_{ij}^k = x_{ij}^k + \Theta y_{ij}^k, (i, j)^k \in U_{on}^k, k = 1, 2, \bar{x}_{ij}^k = x_{ij}^k, (i, j)^k \in U_{on}^k, k = 1, 2$, где Θ — максимальный шаг, найденный по стандартным правилам. При переходе $x \rightarrow \bar{x}$ стоимость потока уменьшится на величину $\Theta |\Delta_{i_0j_0}^k|$. Опорные множества меняем по правилам, указанным в [1].

3. Найдем потоки $\{y_{ij}^k, (i, j)^k \in U_{on}^k, y_{i_0j_0}^k, k = 1, 2\}$, удовлетворяющие системе (5), записанной относительно множеств $\{U_{on}^1 \cup (i_0, j_0)^1, U_{on}^2 \cup (i_0, j_0)^2, U^* \cup (i_0, j_0)\}$, при условиях $y_{i_0j_0}^1 = \text{sign}(\Delta_{i_0j_0}^1 - \Delta_{i_0j_0}^2), y_{i_0j_0}^2 = -\text{sign}(\Delta_{i_0j_0}^1 - \Delta_{i_0j_0}^2)$. Подходящие направления изменения потока найдем так же, как и в [1].

Новый поток \bar{x} строим в виде $\bar{x}_{ij}^k = x_{ij}^k + \Theta y_{ij}^k, (i, j)^k \in U_{on}^k \cup (i_0, j_0)^k, \bar{x}_{ij}^k = x_{ij}^k, (i, j)^k \in U_{on}^k \cup (i_0, j_0)^k, k = 1, 2, \Theta$ — максимально-допустимый шаг, найденный по стандартным правилам. Стоимость потока уменьшается на величину $\Theta |\Delta_{i_0j_0}^1 - \Delta_{i_0j_0}^2|$. Опора преобразуется по правилам, указанным в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Пилипчук Л. А. Мультипоток минимальной стоимости с дополнительными ограничениями на частичные суммы дуговых потоков. — Рукопись депонирована в ВИННИТИ, № 2522-81. Деп. от 28.05.81.
2. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения и применения. — М., 1966.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования. — Минск, 1980, ч. 2.

Поступила в редакцию
12.07.82.

Кафедра МОУ

УДК 517.948.32

Л. А. ХВОШИНСКАЯ

ЗАМКНУТОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим трехэлементную краевую задачу: найти функцию $\Phi(z)$, аналитическую во внешности отрезка $0 \leq x \leq 1$, предельные значения ко-

торой сверху $\Phi^+(x)$ и снизу $\Phi^-(x)$ на интервале $0 < x < 1$ удовлетворяют краевому условию

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \lambda \Phi(-x), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

где λ — заданное комплексное число; $\lambda \neq 0$. Решение задачи ищется в классе функций, ограниченных на бесконечности и допускающих интегрируемую особенность при $z \rightarrow 0$, $z' \rightarrow 1$.

Введем новую неизвестную функцию $\Psi(z)$ формулой

$$\Psi(z) = \Phi(-z). \quad (2)$$

Функция $\Psi(z)$ является аналитической в правой полуплоскости. Следовательно, на интервале $0 < x < 1$ имеем систему:

$$\begin{cases} \Phi^+(x) = \Phi^-(x) + \lambda \Psi^-(x), \\ \Psi^+(x) = \Psi^-(x), \end{cases} \quad 0 < x < 1. \quad (3)$$

Заменяя в (3) x на $-x$ и учитывая (2), получаем систему краевых условий на интервале $-1 < x < 0$:

$$\begin{cases} \Phi^+(x) = \Phi^-(x), \\ \Psi^+(x) = \lambda \Phi^-(x) + \Psi^-(x), \end{cases} \quad -1 < x < 0. \quad (3')$$

Объединение (3) и (3') есть краевая задача Римана для двух пар функций с кусочно-постоянной матрицей и тремя особыми точками $z = -1$, $z = 0$, $z = 1$:

$$\begin{cases} \Omega^+(x) = A\Omega^-(x), & -1 < x < 0, \\ \Omega^+(x) = B\Omega^-(x), & 0 < x < 1, \end{cases} \quad (4)$$

где $\Omega(z) = (\Phi(z), \Psi(z))$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Совершим дробно-линейную замену $\zeta = \frac{1+z}{1-z}$ ($t = \frac{1+x}{1-x}$) и обозначим $W(\zeta) = \Omega(z)$. Тогда краевое условие (4) перейдет в условие

$$\begin{cases} W^+(t) = AW^-(t), & 0 < t < 1, \\ W^+(t) = BW^-(t), & 1 < t < \infty. \end{cases} \quad (5)$$

При решении задачи (5) воспользуемся результатами [1]. Определим характеристические числа матриц A , $A^{-1}B$, B , обозначая их соответственно ξ_k , ζ_k , η_k , $k = 1, 2$: $\xi_1 = \xi_2 = 1$, $\zeta_1 = \frac{2 - \lambda^2 + \lambda \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$, $\zeta_2 = \frac{1}{\zeta_1}$, $\eta_1 = \eta_2 = 1$. Выбирая ветвь логарифма из условия $\ln \zeta = \ln |\zeta| + i \arg \zeta$, $0 \leq \arg \zeta < 2\pi$, находим числа:

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \zeta_k = 0, \quad \omega_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \eta_k = 0,$$

$$\sigma_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \xi_k, \quad \text{причем } \sigma_k = \begin{cases} 1 - \sigma_1, & \text{если } \arg \zeta_1 \neq 0, \\ -\sigma_1, & \text{если } \arg \zeta_1 = 0, \end{cases}$$

$$\Delta = \sum_{k=1}^2 (\rho_k + \sigma_k - \omega_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } \arg \zeta_1 \neq 0, \\ 0, & \text{если } \arg \zeta_1 = 0. \end{cases}$$

Тогда, если $\operatorname{Re} \sigma_1 \neq 0$ (т. е. $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ или $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, $|\operatorname{Re} \lambda| > 2$), то частные индексы α_1 , α_2 , индекс α и число l линейно независимых решений задачи (5) равны: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha = 1$, $l = \alpha + 4 = 5$, а решение задачи (5) имеет вид

$$W(\zeta) = (1 - \zeta)^{-\alpha_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(\zeta) (1 - \zeta) v_1(\zeta) \\ u_2(\zeta) (1 - \zeta) v_2(\zeta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \zeta + c_3 \zeta^2 \\ c_4 + c_5 \zeta \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $u_1(\zeta) = F(1 - \sigma_1, \sigma_1; 1; \zeta)$, $v_1(\zeta) = F(-\sigma_1, \sigma_1; 1; \zeta)$, $u_2(\zeta) =$

$$= \frac{1}{2i \sin \lambda \sigma_1} F(1 - \sigma_1, \sigma_1; 1; 1 - \zeta), \quad v_2(\zeta) = \frac{1 - \sigma_1}{2i \sin \lambda \sigma_1} F(-\sigma_1, \sigma_1; 2; 1 - \zeta),$$

$\mu = -\frac{\lambda + 1}{2} \frac{\lambda^2 - 4}{\lambda^2 - 4}$, c_1, \dots, c_5 — произвольные постоянные.

Если $\operatorname{Re} \sigma_1 = 0$, то $x_1 = x_2 = 0$, $x = 0$, $l = x + 2 = 2$, а решение задачи (5) имеет вид (6), где необходимо положить $c_2 = c_3 = c_5 = 0$ и $u_1(\zeta) = F(-\sigma_1, 1 + \sigma_1; 1; \zeta)$, $v_1(\zeta) = F(1 - \sigma_1, 1 + \sigma_1; 1; \zeta)$, $u_2(\zeta) = -\frac{1}{2i \sin \lambda \sigma_1} F(-\sigma_1, 1 + \sigma_1; 1; 1 - \zeta)$, $v_2(\zeta) = \frac{\sigma_1}{2i \sin \lambda \sigma_1} F(1 - \sigma_1, 1 + \sigma_1; 2; 1 - \zeta)$, c_1, c_4 — произвольные постоянные.

Обозначим $\tilde{u}(z) = u\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$, $\tilde{v}(z) = v\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ и выпишем фундаментальную систему решений (ф. с. р.) задачи (4):

$$\Omega^m(z) = \left(\frac{1-z}{z}\right)^{\lambda_1} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1(z) \\ -\mu \tilde{u}_1(z) + \lambda \tilde{u}_2(z) \end{pmatrix} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{m-1}, \quad m = 1, 2, 3,$$

$$\Omega^n(z) = \left(\frac{1-z}{z}\right)^{\lambda_1-1} \begin{pmatrix} \tilde{v}_1(z) \\ -\mu \tilde{v}_1(z) + \lambda \tilde{v}_2(z) \end{pmatrix} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2.$$

Если $(\Omega_1(z), \Omega_2(z))$ есть решение задачи (4), то ее решением является также и вектор-функция $(\Omega_2(-z), \Omega_1(-z))$, что проверяется непосредственной подстановкой в краевое условие (4). Поэтому система функций

$$\Omega^k(z) = \begin{pmatrix} \Omega_1(z) + \Omega_2(-z) \\ \Omega_2(z) + \Omega_1(-z) \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, 5},$$

есть ф. с. р. задачи (4), удовлетворяющая условию $\Omega_1^*(z) = \Omega_2^*(-z)$.

Значит, $\Phi(z) = \sum_{k=1}^5 c_k \Omega_k^*(z)$, где c_k , $k = \overline{1, 5}$, — произвольные постоянные, что дает следующее решение задачи (1). Если $\operatorname{Re} \sigma_1 \neq 0$, то

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \left(\frac{1-z}{z}\right)^{\lambda_1} \sum_{k=1}^3 c_k \left\{ F\left(1 - \sigma_1, \sigma_1; 1; \frac{1+z}{1-z}\right) \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{k-1} - \right. \\ &- \mu \left[\mu F\left(1 - \sigma_1, \sigma_1; 1; \frac{1-z}{1+z}\right) + F\left(1 - \sigma_1, \sigma_1; 1; \frac{2z}{1+z}\right) \right] \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\lambda_1 + 1 - k} \left. + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{1-z}{z}\right)^{\lambda_1 - 1} \sum_{k=1}^2 c_{k+3} \left\{ F\left(-\sigma_1, \sigma_1; 1; \frac{1+z}{1-z}\right) \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{k-1} - \right. \right. \\ &- \mu \left[\mu F\left(-\sigma_1, \sigma_1; 1; \frac{1-z}{1+z}\right) + (\sigma_1 - 1) F\left(-\sigma_1, \sigma_1; 2; \frac{2z}{1+z}\right) \right] \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\lambda_1 - k} \left. \right\}, \end{aligned}$$

где c_1, \dots, c_5 — произвольные постоянные. Если $\operatorname{Re} \sigma_1 = 0$, то

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \left(\frac{1-z}{z}\right)^{\lambda_1} c_1 \left\{ F\left(-\sigma_1, 1 + \sigma_1; 1; \frac{1-z}{1-z}\right) - \right. \\ &- \mu \left[\mu F\left(-\sigma_1, 1 + \sigma_1; 1; \frac{1-z}{1-z}\right) - F\left(-\sigma_1, 1 + \sigma_1; 1; \frac{2z}{1+z}\right) \right] \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\lambda_1} \left. + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{1-z}{z}\right)^{\lambda_1 - 1} c_2 \left\{ F\left(1 - \sigma_1, 1 + \sigma_1; 1; \frac{1+z}{1-z}\right) - \right. \right. \\ &- \mu \left[\mu F\left(1 - \sigma_1, 1 + \sigma_1; 1; \frac{1-z}{1+z}\right) - \sigma_1 F\left(1 - \sigma_1, 1 + \sigma_1; 2; \frac{2z}{1+z}\right) \right] \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\lambda_1 - 1} \left. \right\}, \end{aligned}$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хвощинская Л. А. Однородная краевая задача Римана для двух пар функций с кусочно-постоянной матрицей в случае двух и трех особых точек. — Рукопись деп. в ВИНТИИ. № 5157-81. Деп. от 09.11.81.

УДК 538.221

А. Ю. КОЖУХАРЬ, Н. Н. ПОЛОНЕПЧИК, Н. И. ЖУК

МАГНИТНЫЕ СПЕКТРЫ ЭПИТАКСИАЛЬНЫХ ФЕРРИТ-ГРАНАТОВЫХ СТРУКТУР

В последнее время исследованию динамических свойств доменных структур уделяется большое внимание [1—4], обусловленное поиском физических моделей взаимодействия упорядоченных доменных структур, их возбуждений в области частот резонанса доменных границ ω_p .

Статья посвящена исследованию магнитных возбуждений периодических доменных структур эпитаксиальных феррит-гранатовых пленок в широкой области частот методами магнитной спектроскопии.

Основные параметры исследуемых пленок

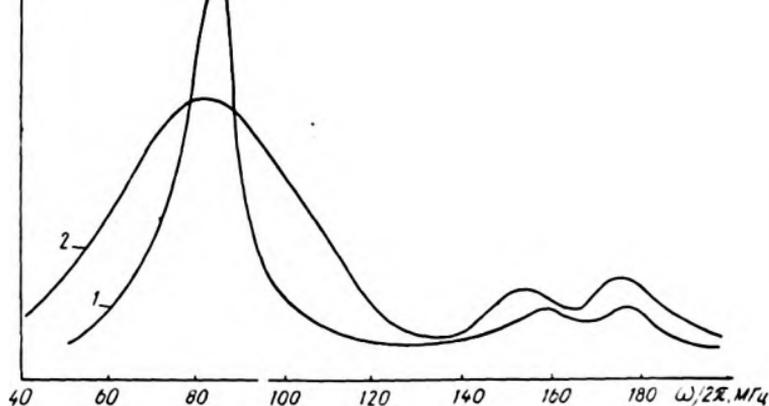
| Состав | h | ω | $4\pi M_s$, Гс | H_a , Э |
|--------------------------------|-----|----------|-----------------|-----------|
| | мкм | | | |
| 1. $(YSmLuCa)_3(FeGe)_3O_{12}$ | 3,8 | 4,2 | 270 | 1780 |
| 2. $(YSmTmCa)_3(FeGe)_3O_{12}$ | 3,0 | 3,2 | 280 | 1600 |

* Примечание: h —толщина слоя; ω —полупериод полосовой доменной структуры; $4\pi M_s$ — намагниченность насыщения; H_a — одноосная анизотропия.

Параметры исследованных образцов приведены в таблице. Обратная сторона пленок, ориентированных вдоль оси (III), удалена для исключения влияния паразитной восприимчивости от неконтролируемых эффектов. Имплантация образцов осуществляется ионами Ne^+ (доза имплантации 10^{14} ион/см).

Магнитные спектры лабиринтных доменных структур получены методом измерения добротности катушки индуктивности с образцом [1, 2]. Измерения проводились в диапазоне частот 30—240 МГц на приборе Е4-5. Для улучшения чувствительности метода применено накопление информации при пятикратных измерениях на каждой частоте. По изменению добротности катушки индуктивности, соответствующему различным магнитным состояниям образца (намагниченному до насыщения и размагниченному, содержащему доменную структуру) строилась зависимость мнимой компоненты магнитной восприимчивости χ'' от частоты. Для перевода образца из ненасыщенного состояния в насыщенное применялся соленоид с максимальной напряженностью магнитного поля 350 Э. Направление намагничивающего поля параллельно оси легкого намагничивания образца.

Магнитные спектры лабиринтных доменов приведены на рисунке. Оба спектра имеют сходный характер: интенсивное поглощение на частоте ω_p два пика поглощения в области частот $2\omega_p \pm \delta\omega$ (при $2\omega_p$ поглощение



Магнитные спектры лабиринтной доменной структуры (параметры образцов приведены в таблице)

отсутствует). В обоих составах до имплантации наблюдалась несимметричная форма линии. После имплантации произошло выравнивание формы линии основного поглощения до симметричной формы Лоренца, что связано, по-видимому, с двухслойностью пленки.

Магнитные спектры эпитаксиальных феррит-гранатовых пленок использовались для вычисления коэффициента затухания α_{ic} по следующей формуле: $\omega_{ic} = \Delta\omega_p/\omega_p$, где $\Delta\omega_p$ — полуширина линии на полувысоте. Для образца 1 получено значение $\alpha_{ic} = 0,163$, а для образца 2 — $0,322$.

Особенно интересным нам кажется то, что колебательный спектр вблизи $2\omega_p$ распадается на два пика, расстояние расталкивания $\delta\omega$ между которыми, по-видимому, обусловлено резонансной частотой возбуждений оптических колебаний доменной границы. Было замечено поглощение высокочастотных колебаний магнитной пленкой в области частоты $3\omega_p$, но интенсивность данного поглощения очень мала, и поэтому данный результат пока не поддается интерпретации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барьяхтар В. Г., Ганн В. В., Горобец Ю. И. — ФТТ, 1976, т. 18, с. 1990.
2. Ким П. Д., Дрокина Т. В., Балбашов А. М. — ФТТ, 1979, т. 21, с. 2840.
3. Ким П. Д., Дрокина Т. В., Старостин Ю. В. — ФТТ, 1980, т. 22, с. 908.
4. Santz W., Argyle B. E. and Slonczewski J. S. — IEEE Transactions on Magnetics, 1980, MAG-16, p. 657.

Поступила в редакцию
25.01.83.

Кафедра ядерной физики и мирного
использования атомной энергии

УДК 537.311.33 : 535.37

Е. Д. КАРНХ, Ю. Ч. УНГЕР

ПОПЕРЕЧНАЯ ДИФФУЗИЯ НЕРАВНОВЕСНЫХ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В ГЕТЕРОЛАЗЕРАХ С ПОЛОСКОВЫМ КОНТАКТОМ

Одним из достоинств гетеролазеров с полосковым контактом является малый размер светового пятна на торцевой грани, что облегчает согласование лазера с одномодовым оптическим волокном, используемым в широкополосных волоконно-оптических линиях связи. Обычно рассматриваются два фактора, приводящие к уширению области генерации в плоскости, параллельной $p-n$ -переходу: растекание тока в пассивных

слоях, прилегающих к полосковому контакту [1] и боковая диффузия неравновесных носителей заряда (ННЗ) в активном слое [2]. Учет фотонного переноса ННЗ в полосковых гетеролазерах за счет многократных переизлучений собственной люминесценции в литературе практически отсутствует. В [3] рассмотрен случай локального возбуждения узкозонного слоя двойной гетероструктуры, толщина которого $d > 1/a$, где a — коэффициент поглощения собственной люминесценции. Показано, что основной вклад в увеличение концентрации ННЗ вне области возбуждения вносят фотоны, отраженные от внешних границ структуры [3]. В гетеролазерах обычно выполняется обратное условие $d < 1/a$.

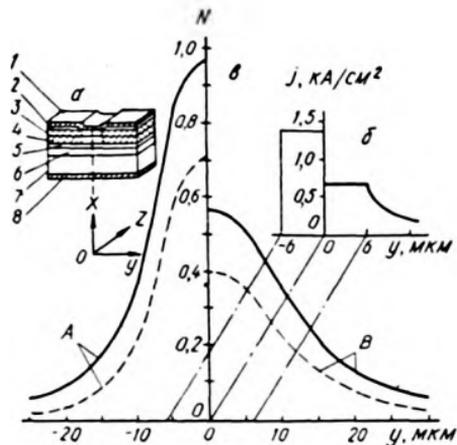
Кроме того, наличие поглощающих приконтактных слоев узкозонного материала снижает долю фотонов, возвращающихся в активный слой.

На рисунке (а) приведена схема обычного лазера на двойной гетероструктуре с полосковым контактом [4], где 1 и 8 — омические контакты; 2 — изоляционная пленка SiO_2 ; 3 — p^+ -GaAs; 4 — P - $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$; 5 — p -GaAs (активный слой); 6 — N - $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$; 7 — n -GaAs (подложка) и система координат, принятая при расчете. Так как $d \ll L_n$, где L_n — диффузионная длина электронов, а длина и ширина лазера много больше L_n , рассматривалась одномерная поперечная диффузия ННЗ в направлении оси y . Принимался во внимание перенос ННЗ за счет излучения, распространяющегося в активном слое под углами, большими критического угла полного внутреннего отражения на границах с широкозонными эмиттерами. Полагалось, что фотоны, вышедшие из активного слоя, в него не возвращаются. Формулировка задачи основывалась на совместном использовании уравнения непрерывности для электронов и методов теории переноса излучения [5]. Полученное интегро-дифференциальное уравнение для ННЗ решалось численно итерационным методом с использованием функции Грина.

На рисунке представлены результаты машинного расчета для двух типов полосковых лазеров — полученного бомбардировкой протонным пучком, не достигающим активного слоя (левые части рисунка, б и в) и без протонной изоляции (правые части б и в) с учетом растекания в пассивных слоях 3 и 4 в рамках модели Енезу с соавторами [1]. Вследствие симметрии показаны лишь половины соответствующих профилей величины $N = (ed/\hbar\tau)n$, где e , τ и n — заряд, время жизни и концентрация неравновесных электронов. Расчет соответствует лазеру с молярной долей AlAs в эмиттерах 0,43, уровнем легирования активной области 10^{18} см^{-3} ($L_n = 5 \text{ мкм}$; $\alpha = 4 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$; $d = 0,3 \text{ мкм}$), полосковым контактом шириной 12 мкм и уровню возбуждения ниже порога генерации. Пунктирные кривые А и В представляют решение задачи без учета переизлучения, сплошные — с учетом фотонной генерации при 97 %-ном внутреннем квантовом выходе люминесценции. Таким образом, переизлучение приводит к возрастанию концентрации ННЗ как под полосковым контактом, так и вне его, и затягиванию спада при удалении от полоски. Отметим, что относительное увеличение концентрации в максимуме распределения в любом случае не превышает соответствующей величины для однородного возбуждения активной области [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Yonezu H., Sakuma I., Kobayashi K., Kamejima T., Ueno M., Nannichi Y. — Jap. J. Appl. Phys., 1973, v. 12, № 10, p. 1585.



а — структура лазерного диода; б — плотность тока инжекции; в — концентрация ННЗ в активном слое

2. Tsa ng W. T.— J. Appl. Phys., 1978, v. 49, № 3, p. 1031.

3. Халфин В. Б., Чалый В. П., Гарбузов Д. З.— ФТП, 1978, т. 12, № 11, с. 2114.

4. Ксаян Х., Паниш М. Лазеры на гетероструктурах.— М., 1981, т. 2.

5. Методы расчета оптических квантовых генераторов / Под ред. Б. П. Степанова.— Минск, 1968, т. 2.

6. Карих Е. Д., Шилов А. Ф.— ЖПС, 1982, т. 36, № 4, с. 660.

Поступила в редакцию
16.05.83.

Кафедра квантовой радиифизики
и оптоэлектроники

УДК 681.2.082/083 + 535.24

С. В. ХОЛОНДЫРЕВ, С. Г. ХОЛОНДЫРЕВА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ ИЗМЕРЕНИЯ В РЕЖИМЕ СЧЕТА ФОТОНОВ

При проведении спектрофотометрических измерений, основанных на счете отдельных фотонов, всегда возникает вопрос об оптимальном распределении времени между измерениями темнового тока ФЭУ, фона, исследуемого и опорного источника излучения и т. п. Предполагается, что по полученным значениям измеренных интенсивностей n_i (средних скоростей счета) вычисляется значение некоторой спектрофотометрической величины $Y=f(n_1, n_2, \dots, n_N)$, которая определяется решаемой задачей. Например, для простейшего случая измерения исследуемого источника излучения с учетом фона: $Y=f(n_1, n_2)=n_1-n_2$, где n_1 — интенсивность исследуемого источника плюс фон; n_2 — интенсивность фона.

В ряде работ [1—3] определены оптимальные соотношения между временами измерения фона, сигнала исследуемого источника и т. д., показано, что проведение измерений без учета оптимальных соотношений ведет к большим потерям рабочего времени, отрицательно влияя на эффективность использования спектрофотометрического оборудования.

Однако полученные в [1, 2] выводы применимы только для некоторых простейших решаемых задач или предполагают использование таблиц и графиков [3], что не всегда удобно.

В данной работе получены выражения, позволяющие определить оптимальное время, необходимое для измерения интенсивностей в случае произвольной функции $f(n_1, n_2, \dots, n_N)$. Решение представлено в явном виде.

Предполагается, что до начала измерений известны: априорные значения x_i измеряемых интенсивностей n_i , функция $f(n_1, n_2, \dots, n_N)$, определяющая Y , и общее время T , отведенное для измерения всех n_i . Определим, при каких значениях времени измерения t_i будет получена минимальная среднеквадратичная ошибка σ_y величины Y .

Для погрешности при непрямых измерениях [4]:

$$\sigma_y^2 \approx \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{t_i}^2, \quad (1)$$

где σ_{t_i} — среднеквадратичная ошибка значения интенсивности n_i .

При условии пуассоновской статистики отсчетов

$$\sigma_{t_i} = \sqrt{\frac{n_i}{t_i}} \approx \sqrt{\frac{x_i}{t_i}}. \quad (2)$$

Представим (1) с учетом (2) в виде:

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^N k_i t_i^{-1}, \quad (3)$$

где

$$k_i = x_i \left(\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_i} \right)^2. \quad (4)$$

Можно показать [5], что минимальное значение σ_y^2 в выражении (3) при условии $\sum_{i=1}^N t_i = T$ достигается, когда

$$t_i = \frac{T k_i^{\frac{1}{2}}}{\sum_{j=1}^N k_j^{\frac{1}{2}}}. \quad (5)$$

Выражение (5) определяет значения t_i , соответствующие минимальной ошибке σ_y .

Однако в большинстве случаев до измерений задается не общее время измерений T , а значение σ_y среднеквадратичной ошибки величины Y .

Учитывая это, подставим (5) в (3) и определим общее время измерений T , необходимое для получения заданного значения σ_y .

$$T = \left(\frac{\sum_{i=1}^N k_i^{\frac{1}{2}}}{\sigma_y} \right)^2 = \sigma_y^{-2} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_i} \right| \sqrt{x_i}. \quad (6)$$

Соответственно, с учетом (5):

$$t_i = \frac{k_i^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^N k_j^{\frac{1}{2}}}{\sigma_y^2} = \sigma_y^{-2} \sqrt{x_i} \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_i} \right| \left[\sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_j} \right| \sqrt{x_j} \right]^{-1}. \quad (7)$$

Полученные выражения (6) и (7) позволяют определить оптимальные значения t_i и общее время измерений T , если задано значение σ_y , что и решает задачу оптимального планирования предполагаемых измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шаховский Н. М., Ефимов Ю. С.— Изв. Крымской астрофиз. обсерватории, 1976, т. 54, с. 99.
2. Clandins M., Florentin-Nielsen R.— Astron. Astrophys., 1981, v. 100, p. 186.
3. Границкий Л. В., Букач А. Б., Букач Н. И. О возможности получения с заданной ошибкой фотоэлектрической информации.— Рукопись деп. в ВИННИТИ. № 4245-80. Деп. от 02.08.80.
4. Худсон Д. Статистика для физиков.— М., 1967, с. 61.
5. Даффин Р. Геометрическое программирование.— М., 1971.

Поступила в редакцию
25.05.83

Кафедра общей физики

УДК 537.312.8

В. И. ПАВЛОВ, Г. Л. БЫЧКОВ, А. К. БОГУШ

МАГНИТОСОПРОТИВЛЕНИЕ $\text{La}_{1-x}\text{Ca}_x\text{MnO}_3$

В твердых растворах $\text{La}_{1-x}\text{Me}_x\text{MnO}_3$, где $\text{Me}^{2+} = \text{Ca}, \text{Sr}, \text{Ba}, \text{Pb}$, при $x = 0,2$ имеет место переход антиферромагнетик — ферромагнетик [1], связанный, согласно [2], с кристаллоструктурным фазовым переходом. В $\text{La}_{1-x}\text{Ca}_x\text{MnO}_3$ в области перехода обнаружено смешанное ферроантиферромагнитное состояние. В работе [3] это смешанное магнитное состояние объясняется наличием ферронов, увеличение концентрации которых и приводит к переходу в ферромагнитное состояние. Все это указывает на сложный характер концентрационного магнитного фазового перехода в манганитах со структурой перовскита.

С целью детального изучения этого перехода в манганитах со структурой перовскита измерено магнитосопротивление поликристаллических

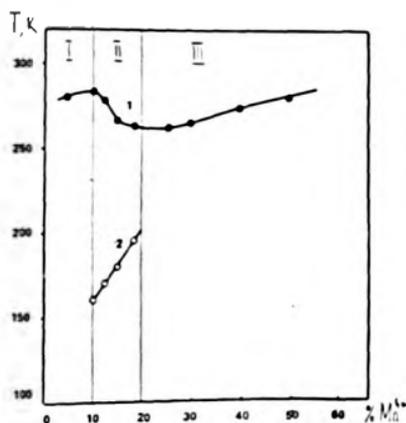
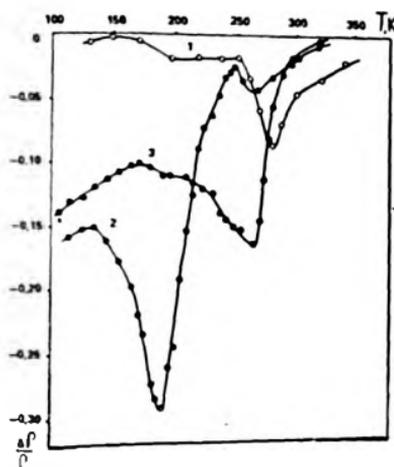


Рис. 1. Температурная зависимость магнитосопротивления:

1 — $\text{La}_{0,95}\text{Ca}_{0,05}\text{MnO}_3$; 2 — $\text{La}_{0,875}\text{Ca}_{0,125}\text{MnO}_3$; 3 — $\text{La}_{0,70}\text{Ca}_{0,30}\text{MnO}_3$.

Рис. 2. Зависимость температуры максимумов магнитосопротивления от содержания ионов Mn^{4+} в $\text{La}_{1-x}\text{Ca}_x\text{MnO}_3$.

образцов $\text{La}_{1-x}\text{Ca}_x\text{MnO}_3$ в области температур 100—400 К в магнитном поле $7,2 \cdot 10^5$ А/м. Магнитосопротивление образцов с x от 0 до 0,5 отрицательно, не зависит от взаимной ориентации магнитного поля и электрического тока и становится существенным (порядка 15—20 %) при появлении ферромагнитного состояния.

При температуре Кюри (250—300 К) во всех образцах наблюдается максимум отрицательного магнитосопротивления (рис. 1). Дальнейшее поведение магнитосопротивления при понижении температуры образцов с различной концентрацией ионов Mn^{4+} неоднозначно.

В образцах, содержащих до 10 % ионов Mn^{4+} , оно незначительно и слабо зависит от температуры (см. рис. 1, кривая 1). При концентрации ионов Mn^{4+} 10—20 % обнаружен второй максимум в районе температуры 150 К, достигающий по величине 30 % (см. рис. 1, кривая 2); при содержании ионов Mn^{4+} от 20 до 50 % магнитосопротивление с понижением температуры увеличивается почти линейно (см. рис. 1, кривая 3).

На рис. 2 приведена зависимость температуры максимумов магнитосопротивления от концентрации ионов Mn^{4+} . Здесь выделены три концентрационные области с различной температурной зависимостью магнитосопротивления; объяснить существование этих областей можно следующим образом.

Появление ферромагнетизма в твердых растворах $\text{La}_{1-x}\text{Me}_x\text{MnO}_3$ может быть обусловлено двумя причинами: изотропным косвенным взаимодействием между ионами Mn^{3+} и взаимодействием типа «двойного обмена» между ионами Mn^{3+} и Mn^{4+} . Причем изотропное взаимодействие между ионами Mn^{3+} является основным, а взаимодействие типа «двойного обмена» добавочным, повышающим температуру Кюри [4]. Неодинаковая зависимость от температуры этих двух типов косвенного ферромагнитного взаимодействия приводит к сложному характеру магнитного перехода ферромагнетик — парамагнетик в нестехиометрическом манганите лантана $\text{LaMnO}_{3+\lambda}$ [5]. Наличие двух максимумов на температурной зависимости магнитосопротивления ферромагнитного манганита лантана отражает факт существования двух магнитных фазовых переходов [5]. Первый из них обусловлен исчезновением изотропного ферромагнитного взаимодействия между ионами Mn^{3+} , второй — ферромагнитного взаимодействия типа «двойного обмена». Локализация возле примесных центров (вакансий по лантану и марганцу) ионов Mn^{4+} при-

водит к образованию при достаточно низких температурах ферромагнитных примесных кластеров (ФПК). В температурном интервале между максимумами магнитосопротивления реализуется магнитное состояние, для которого ферромагнитное взаимодействие типа «двойного обмена» сосредоточено только внутри ФПК, а основная матрица парамагнитна.

Аналогично можно объяснить наличие двух максимумов на температурной зависимости магнитосопротивления $La_{1-x}Ca_xMnO_3$ в интервале 10—20 % ионов Mn^{4+} (рис. 2, II область). Здесь примесными центрами, возле которых локализуются ионы Mn^{4+} и образуются ФПК, являются ионы Ca^{2+} .

Образцы из первой концентрационной области (0—10 % Mn^{4+}) (см. рис. 2) — антиферромагнетики с точкой Нееля 100 К. Максимум на их температурной зависимости магнитосопротивления в районе 300 К указывает на то, что ФПК образуются уже при этих концентрациях ионов Mn^{4+} . Реализуется магнитное состояние, когда при температурах ниже точки Нееля в антиферромагнитной матрице находятся ФПК. Их концентрация мала, однако они обуславливают наличие в этих образцах слабого ферромагнетизма. Второй максимум на температурной зависимости магнитосопротивления при температуре 150 К (рис. 2, II область) появляется, когда имеет место, в результате изменения кристаллической структуры и появления динамического эффекта Яна-Теллера, изотропное ферромагнитное взаимодействие между ионами Mn^{3+} [2]. В данном концентрационном интервале магнитное состояние аналогично магнитному состоянию ферромагнитного нестехиометрического манганита лантана [5]. В температурной области между максимумами в парамагнитной матрице находятся не взаимодействующие между собой ФПК. Когда их концентрация становится достаточной для того, чтобы они начали взаимодействовать (20 % Mn^{4+} , рис. 2, III область), ферромагнитное взаимодействие типа «двойного обмена» распространяется на весь кристалл в целом. Накладываясь на изотропное взаимодействие, оно образует суммарное косвенное ферромагнитное взаимодействие с температурой Кюри 300 К, что и отражает наличие одного максимума на температурной зависимости магнитосопротивления для образцов из этого концентрационного интервала.

1. Jonker G. H., Van Santen J. H.— *Physica*, 1950, v. 16, № 3, p. 337.
2. Гудина Ф. Дж., Уолд А., Арнот Р., Менюк Н.— В кн.: Теория ферромагнетизма металлов и сплавов / Под ред. С. В. Вонсовского. М., 1963, с. 161.
3. Нагаев Э. Л. Физика магнитных полупроводников.— М., 1979.
4. Метфессель З., Маттис Д. Магнитные полупроводники.— М., 1972.
5. Павлов В. И., Богущ А. К., Лашков Е. С., Балыко Л. В.— ФТТ, 1982, т. 24, № 1, с. 270.

Поступила в редакцию
12 02 82.

МГПИ имени А. М. Горького

УДК 517.926.4

С. А. МАЗАНИК

О НЕКОТОРЫХ ИНВАРИАНТАХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

1. Обозначим через L группу матриц Ляпунова (см. [1]), через L_1 — группу постоянных невырожденных матриц. Рассмотрим две линейные дифференциальные системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (1), \quad \frac{dy}{dt} = B(t)y, \quad (2)$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — матрицы размерности $n \times n$, элементами которых являются локально-интегрируемые на $[0 + \infty[$ функции.

Положим $\Delta_{AH} = \{C \mid C \in L_1, X_H C X_H^{-1} \in L, X_H(0) = H, H \in L_1\}$, $\Delta_{BH} = \{C \mid C \in L_1, Y_H C Y_H^{-1} \in L, Y_H(0) = H, H \in L_1\}$, где X_H и Y_H — фундаментальные матрицы решений систем (1) и (2) соответственно.

Множества $\Delta_A = \bigcup_{H \in L_1} \Delta_{AH}$ и $\Delta_B = \bigcup_{H \in L_1} \Delta_{BH}$ назовем характеристическими множествами систем (1) и (2) соответственно.

Теорема 1. Характеристическое множество матриц Δ_A системы (1) является асимптотическим инвариантом [2] этой системы.

Доказательство. Пусть система (1) асимптотически эквивалентна [1] системе (2), а C — любая матрица из Δ_A , тогда $C \in \Delta_{AH}$ для некоторого $H \in L_1$. Следовательно, существует такая фундаментальная матрица X решений системы (1), что $X(0) = H$ и $X C X^{-1} \in L$. Так как системы (1) и (2) асимптотически эквивалентны, существует такая матрица $S \in L$, что $Y = SX$ — фундаментальная матрица решений системы (2), поэтому $Y C Y^{-1} = S X C X^{-1} S^{-1}$, а поскольку $S^{-1} \in L$, то и $Y C Y^{-1} \in L$, т. е. $C \in \Delta_B$.

Аналогично можно показать, что и любая матрица из Δ_B принадлежит Δ_A . Таким образом, характеристические множества матриц Δ_A и Δ_B совпадают, значит, Δ_A является асимптотическим инвариантом системы (1). Теорема доказана.

2. Системы (1) и (2) назовем *OE*-эквивалентными, если из соотношения $x(0) = y(0)$ следует, что $(x(t), y(t)) = (y(t), y(t))$ при всех $t \in [0, +\infty[$ (x и y — решения систем (1) и (2) соответственно, (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в пространстве R^n).

Теорема 2. Для того чтобы системы (1) и (2) были *OE*-эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы $XY^{-1} = S$, где S — ортогональная матрица, $S \in L$, $S(0) = E$, E — единичная матрица, X и Y — нормированные в нуле фундаментальные матрицы решений систем (1) и (2) соответственно.

Доказательство теоремы следует из того факта, что если для любых $u \in R^n$ выполняется соотношение $(u, Ku) = 0$, то K — кососимметрическая матрица.

Замечание 1. Непосредственно из теоремы Перрона о триангуляции (см., например, [3, с. 178]) следует, что среди систем (2) *OE*-эквивалентных системе (1) всегда существует треугольная система.

Теорема 3. Две треугольные (верхние) линейные дифференциальные системы *OE*-эквивалентны тогда и только тогда, когда их матрицы коэффициентов равны почти всюду.

Доказательство. Пусть (1) и (2) — треугольные линейные дифференциальные *OE*-эквивалентные системы. Тогда их нормированные в нуле фундаментальные матрицы решений X и Y также являются треугольными и, в силу теоремы 2, удовлетворяют соотношению: $XY^{-1} = S$, где S — ортогональная матрица. Очевидно, что это возможно лишь в том случае, когда $S = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, где $a_i \in \{-1, 1\}$, $i = \overline{1, n}$. Так как $S(0) = E$, то и при всех $t \in [0, +\infty[$ имеем $S(t) = E$. Следовательно, $X = Y$, т. е. матрицы систем (1) и (2) равны почти всюду. *Необходимость* доказана. *Доказательство* достаточности условия теоремы очевидно. Из теоремы 3 и замечания 1 следует

Теорема 4. Совокупность коэффициентов треугольных систем является полной независимой системой инвариантов (см. [2]) линейных дифференциальных *OE*-эквивалентных систем.

Замечание 2. Утверждение, аналогичное теореме 4, имеет место и для сферически совместных систем [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов Ю. С. — Дифференц. уравнения. 1965, т. 1, № 6, с. 707.
2. Богданов Ю. С. — В кн.: Труды 4-го Всесоюзного математического съезда, 1961. Л., 1964, т. 2, с. 424.

УДК 519.1

Н. Н. БУСНЮК

О ЧИСЛЕ 3-ЦИКЛОВ В ГРАФАХ С ДАННЫМИ СТЕПЕНЯМИ ВЕРШИН

На практике часто возникают экстремальные задачи, связанные с циклами фиксированной длины k в некотором графе. В частности, в биохимии в связи с синтезом молекулы белка возникла задача отыскания графов с данными степенями вершин и максимальным числом 3-циклов (циклов длины 3).

В заметке доказывается следующая

Теорема. Пусть $D(d_1, d_2, \dots, d_n)$ есть класс графов со степенями вершин d_1, d_2, \dots, d_n ; T_G — число 3-циклов в графе G . Тогда для любых двух графов $G_1, G_2 \in D(d_1, d_2, \dots, d_n)$ справедливо равенство $T_{G_1} + T_{\bar{G}_1} = T_{G_2} + T_{\bar{G}_2}$, где \bar{G}_1, \bar{G}_2 — графы, дополнительные к графам G_1, G_2 соответственно.

Доказательство. Пусть $G_1(V_1, E_1), G_2(V_2, E_2) \in D(d_1, d_2, \dots, d_n)$; E_1, E_2 — множества ребер графов G_1, G_2 ; V_1, V_2 — множества вершин графов G_1, G_2 , $V_1 = V_2$. Всюду в дальнейшем будем считать, что вершины графа пронумерованы числами от 1 до n , и неодинаковые буквенные обозначения вершин в одном выражении соответствуют различным вершинам. Поставим в соответствие каждому ребру $(i_1, i_2) \in E_1$ число 1, каждому ребру $(i_1, i_2) \notin E_1$ число 0 и в соответствии с этим каждому 3-циклу $(i_1, i_2), (i_2, i_3), (i_3, i_1)$ — тройку из чисел 0 и 1. Тройки могут быть четырех типов: $(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)$. Каждая тройка типа $(1, 1, 1)$ соответствует 3-циклу в графе G_1 , а каждая тройка типа $(0, 0, 0)$ соответствует 3-циклу в графе \bar{G}_1 .

Назовем переключением в графе G_1 замену пары ребер $(j, m), (i, s) \in E_1$ на пару ребер $(j, s), (i, m) \notin E_1$. Известно [1], что из графа G_1 можно получить граф G_2 применением конечного числа переключений. Покажем, что переключение в графе G_1 не изменяет величины $T_{G_1} + T_{\bar{G}_1}$.

В результате переключения в графе G_1 тройки $((j, m), (m, s), (s, j)), ((j, m), (m, i), (i, j)), ((i, s), (s, j), (j, i)), ((i, s), (s, m), (m, i))$ типов $(0, 1, 1)$ и $(0, 0, 1)$ не преобразуются к двум другим типам. В тройках вида $((i, s), (s, p), (p, i)), ((j, m), (m, p), (p, j)), ((i, m), (m, p), (p, i)), ((j, s), (s, p), (p, j))$, где $p \neq i, j, m, s$, 1 заменяется на 0, и в таком же числе троек 0 заменяется на 1. Рассмотрим всевозможные типы троек в зависимости от вершины p .

1. а) $(i, p) + (j, p) + (m, p) + (s, p) = 0$. Каждая тройка типа $(0, 0, 0)$ преобразуется в тройку типа $(0, 0, 1)$ и наоборот. Общее количество троек типа $(0, 0, 0)$ не меняется, а тройки типа $(1, 1, 1)$ не участвуют в преобразовании.

б) $(i, p) + (j, p) + (m, p) + (s, p) = 4$. Здесь как и далее во всех случаях б) происходит то же, что и в соответствующих случаях а) с точностью до переобозначений нуля единицей и наоборот.

2. а) $(i, p) + (j, p) + (m, p) + (s, p) = 1$. Осуществляются следующие преобразования троек: $(0, 0, 1) \rightleftharpoons (0, 1, 1), (0, 0, 0) \rightleftharpoons (0, 0, 1)$. Количество троек типа $(0, 0, 0)$ сохраняется, а тройки типа $(1, 1, 1)$ не участвуют в преобразовании.

б) $(j, p) + (i, p) + (m, p) + (s, p) = 3$ (см. 1.6)

3. $(j, p) + (m, p) = 1, (m, p) + (i, p) = 1, (i, p) + (s, p) = 1, (s, p) + (j, p) = 1$. Тройки типа $(0, 0, 1)$ и $(0, 1, 1)$ преобразуются друг в друга.

4. а) $(j, p) + (m, p) = 2$ и $(i, p) + (s, p) = 0$ или $(j, p) + (m, p) = 0$ и $(i, p) + (s, p) = 2$.

Вместо каждой тройки типа $(0, 0, 0)$ появляется тройка типа $(1, 1, 1)$.

б) $(m, p) + (i, p) = 2$ и $(j, p) + (s, p) = 0$ или $(m, p) + (i, p) = 0$ и $(j, p) + (s, p) = 2$ (см. 1.б).

Все возможности исчерпаны и мы показали, что общее число троек типов $(0, 0, 0)$ и $(1, 1, 1)$, а следовательно, 3-циклов в графах G_1 и G_1 , не меняется в результате переключения в графе G_1 .

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fulkerson P. R., Hoffman A. J., McAndrew M. H.—Canad. J. Math., 1965, v. 17, p. 166.

Поступила в редакцию
10.11.82.

Кафедра математического обеспечения АСУ

УДК 517.926.45

Т. Л. СУРНИ

СКАЛЯРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМ ЛАППО—ДАНИЛЕВСКОГО

Рассмотрим системы линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(t)x, \quad (1)$$

$$\dot{y} = \varphi(t) P(t)y, \quad (2)$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная функция; $P(t)$ — матрица, элементами которой являются непрерывные функции; $\|P(t)\| \leq K$; x и y — векторы. Пусть (1) является системой Лаппо — Данилевского [1], т. е.

$$P(t) \cdot \int_0^t P(\tau) d\tau = \int_0^t P(\tau) d\tau \cdot P(t). \quad (3)$$

Для выполнения (3) достаточно, чтобы матрица $P(t)$ была функционально-коммутирующей, т. е. чтобы ее значения при любых значениях аргумента из области определения матрицы коммутировали между собой:

$$P(t_1) \cdot P(t_2) = P(t_2) \cdot P(t_1). \quad (4)$$

В работе [2] показано, что для функциональной коммутативности матрицы $P(t)$ необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в форме

$$P(t) = \sum_{i=1}^m A_i \psi_i(t), \quad (5)$$

где $\psi_i(t)$ ($i=1, \dots, m$) — линейно-независимые функции, а A_1, A_2, \dots, A_m — линейно-независимые, попарно-коммутирующие постоянные матрицы.

Целью настоящей работы является изучение систем (2) при выполнении (3).

Пусть $P(t)$ — функционально-коммутирующая матрица; $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_k(t)$ — собственные значения матрицы $P(t)$; n_1, n_2, \dots, n_k — кратности собственных значений. В этом случае $P(t)$ можно постоянным преобразованием привести к блочно-треугольной форме [3]:

$$P_1(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_k(t) \end{pmatrix} \quad (6)$$

и каждый блок имеет единственное собственное значение $\xi_j(t)$. Пусть $l = \sum_{p=1}^{j-1} n_p + 1$, $\xi_r = \xi_j$ при $r = l, \dots, l + n_j - 1$, тогда $\xi_r(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \psi_i(t)$,

где $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — собственные значения постоянной матрицы A_1 . Пусть $\lambda_r^{(1)}$ ($r = 1, \dots, n$) — показатели Ляпунова системы (1), а $\lambda_r^{(2)}$ ($r = 1, \dots, n$) — показатели Ляпунова системы (2), $P(t)$ — функционально-коммутирующая матрица.

Теорема 1. Если $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = k$, то $\lambda_r^{(2)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) \cdot \lambda_r^{(1)}$.

Доказательство. Приведем системы (1) и (2) с помощью постоянной матрицы к блочно-треугольной форме. Тогда характеристический показатель r -го решения системы (1) можно представить в виде

$$\lambda_r^{(1)} = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \operatorname{Re} \int_0^t \xi_j(\tau) d\tau.$$

Аналогично для системы (2) имеем: $\lambda_r^{(2)} = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \operatorname{Re} \int_0^t \varphi(\tau) \xi_j(\tau) d\tau$.

Выразив $\lambda_r^{(2)}$ через $\lambda_r^{(1)}$ и используя условие теоремы, получим

$$\lambda_r^{(2)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) \cdot \lambda_r^{(1)}. \quad (7)$$

З а м е ч а н и е. Зная показатели Ляпунова систем (1) и (2), легко решить вопрос о правильности системы (2), если правильна система (1). Очевидно, что, если система (1) правильна и выполнено условие теоремы, то система (2) тоже правильна.

Пусть выполнено (3), но $P(t)$ не функционально-коммутирующая. Тогда система (2), в общем случае, не будет системой Лапко — Данилевского. Следовательно, выразить характеристические показатели системы (2) через характеристические показатели системы (1) в таком простом виде, как (7), не удается.

Можно показать, что для старшего характеристического показателя системы (2) справедлива оценка

$$\lambda_n^{(2)} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) \lambda_n^{(1)}. \quad (8)$$

Теорема 2. Пусть: 1) даны системы (1) и (2) и выполнено условие (3); 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = k$, тогда $\lambda_n^{(2)} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) \lambda_n^{(1)}$.

Доказательство. Записав (2) в виде $\dot{y}(t) = kP(t)y + (\varphi(t) - k)P(t)y$, решение $y(t)$ можем представить $y(t) = \exp\left(k \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau\right) y_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(k \int_{\tau}^t P(\tau) d\tau\right) (\varphi(\tau) - k) P(\tau) y(\tau) d\tau$. Оценив $\|y(t)\|$, пользуясь леммой Гронуолла — Беллмана, и найдя характеристические показатели, убеждаемся, что верно (8).

Пусть $X(\tau) = \exp \int_0^\tau P(\tau) d\tau$ — фундаментальная матрица решений системы (1), $Y(t)$ фундаментальная матрица решений системы (2). Докажем, что $Y(t)$ можно выразить через $X(t)$ и обобщенную матрицу Ляпунова.

Теорема 3. Если $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 1$, то $Y(t) = X(t)S(t)$, где $S(t)$ — обобщенная матрица Ляпунова.

Доказательство. Найдем решение системы (2) в матричном виде $Y(t) = X(t)Y_0 + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) (\varphi(\tau) - 1) P(\tau) Y(\tau) d\tau$. Обозначим $X^{-1}(t)Y(t) = S(t)$, тогда $S(t) = Y_0 + \int_0^t (\varphi(\tau) - 1) P(\tau) S(\tau) d\tau$. Легко показать, что $S(t)$ — обобщенная матрица Ляпунова. Следовательно, $Y(t) = X(t)S(t)$.

Следствие. Старшие характеристические показатели систем (1) и (2) совпадают.

Доказательство следует из соотношения $Y(t) = X(t)S(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов Ю. С., Чеботарев Г. Н.—Изв. вузов СССР. Математика, 1959, № 4, с. 27.
2. Морозов В. В.—Уч. зап. Казан. ун-та, 1952, вып. 112, кн. 9, с. 17.
3. Чеботарев Г. Н.—Уч. зап. Казан. ун-та, 1956, вып. 116, кн. 1, с. 31.

Поступила в редакцию
15.12.82.

Кафедра высшей математики

УДК 517.926

ТАГБИНО ТАМБА

О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ЧАСТИЧНОЙ ИЗОМЕТРИЕЙ

Пусть заданы две n -мерные системы

$$\frac{dy}{dt} = Q(t)y, \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x \quad (2)$$

с непрерывными на $[a; b]$ матрицами $Q(t) = [q_{ij}(t)] = Q$ и $P(t) = [p_{ij}(t)] = P$. Матрица $P(t)$ предполагается верхней треугольной. Обозначим L_n подпространство решений системы (2) вида $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t), 0, \dots, 0)^T$ и $\|x\|$ — евклидова норма x ; T — символ транспонирования.

Определение. Линейные системы (1) и (2) назовем системами с частичной изометрией, если существует невырожденное непрерывно-дифференцируемое преобразование

$$y = S(t)x, \quad (3)$$

переводящее систему (1) в (2) такое, что $\|x(t)\| = \|S(t)x(t)\|$ для всех $x(t)$, принадлежащих некоторому подпространству L_m , ($0 < m < n$).

Теорема 1. Системы (1) и (2) являются дифференциальными системами с частичной изометрией тогда и только тогда, когда существует непрерывно-дифференцируемая на $[a; b]$ $n \times n$ -матрица $S(t)$, $\det S(t) \neq 0$, удовлетворяющая соотношениям:

$$P = S^{-1}(QS - \dot{S}), \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n s_{ij}^2(t) = 1, \quad \sum_{i=1}^n s_{ij}(t) s_{ik}(t) = 0, \quad (5)$$

($j \neq k$), $j, k = 1, \dots, m$, $1 < m < n$.

Доказательство. Продифференцируем (3) по t : $\frac{dy}{dt} = \dot{S}x + S \frac{dx}{dt}$.

Учитывая (1) и (2), получаем $Qy = Sx + \dot{S}Px$ или $QSx = \dot{S}x + SPx$. Отсюда следует равенство (4).

Возьмем преобразование (3) в координатном виде:

$$y_1(t) = s_{11}(t)x_1(t) + \dots + s_{1m}(t)x_m(t) + s_{1m+1}(t)x_{m+1}(t) + \dots + s_{1n}(t)x_n(t),$$

$$y_2(t) = s_{21}(t)x_1(t) + \dots + s_{2m}(t)x_m(t) + s_{2m+1}(t)x_{m+1}(t) + \dots + s_{2n}(t)x_n(t),$$

$$\dots$$

$$y_n(t) = s_{n1}(t)x_1(t) + \dots + s_{nm}(t)x_m(t) + s_{nm+1}(t)x_{m+1}(t) + \dots + s_{nn}(t)x_n(t).$$

Так как $x_{m+1}(t) = x_{m+2}(t) = \dots = x_n(t) = 0$, то

$$\|y(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n (s_{i1}(t)x_1(t) + s_{i2}(t)x_2(t) + \dots + s_{im}(t)x_m(t))^2,$$

$$\|y(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m s_{ij}^2(t) x_j^2(t) \right) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j,k=1}^m s_{ij}(t) s_{ik}(t) x_j(t) x_k(t) \right) =$$

($j \neq k$)

$$= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n s_{ij}^2(t) \right) x_j^2(t) + \sum_{j,k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n s_{ij}(t) s_{ik}(t) \right) x_j(t) x_k(t).$$

Следовательно, $\|y(t)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^m x_j^2(t)}$ при $\forall x_j \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n s_{ij}^2(t) = 1$ и

$$\sum_{i=1}^n s_{ij}(t) s_{ik}(t) = 0, \quad j \neq k, \quad j, k = 1, \dots, m, \quad 1 < m < n.$$

Обратно, если $P = S^{-1}(QS - S)$ и выполняются соотношения (5), то существует преобразование $y = S(t)x$, приводящее систему (1) к системе (2), такое, что $\|y(t)\| = \|x(t)\| = \sqrt{x_1^2(t) + \dots + x_m^2(t)}$, а $x_{m+1}(t) = \dots = x_n(t) = 0$.

З а м е ч а н и е. Если $m=1$, то легко установить, что преобразование $y = S(t)x$, приводящее систему (1) к системе (2), такое, что $\|y(t)\| = \|x(t)\| = |x_1(t)|$ при $x_2(t) = \dots = x_n(t) = 0$ характеризуется соотношением $\sum_{i=1}^n s_{i1}^2(t) = 1$.

Допустим теперь, что $n=2$ и $m=1$, тогда в силу теоремы 1 в качестве матрицы $S(t)$ можно взять, например, матрицу вида $S(t) = \begin{pmatrix} \sin \omega(t) & \alpha(t) \\ -\cos \omega(t) & \beta(t) \end{pmatrix}$, где $\omega(t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — непрерывно-дифференцируемые функции; $\Delta = \det S(t) = \beta(t) \sin \omega(t) + \alpha(t) \cos \omega(t) \neq 0$ на $[a; b]$. Легко установить справедливость следующих теорем.

Теорема 2. Преобразование $y = S(t)x$ приводит систему (1) к системе вида (2), если: $q_{11}(t) = q_{22}(t)$, $q_{21}(t) = -q_{12}(t) = \dot{\omega}(t)$, где $\dot{\omega}(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}$.

Теорема доказывается по методу, указанному в [1], (см. также [2]).

Теорема 3. Преобразование $y = S(t)x$ приводит систему (1) к системе (2) тогда и только тогда, когда $p_{11}(t) = q_{11}(t) = q_{22}(t)$, $q_{21}(t) = -q_{12}(t) = \dot{\omega}(t)$, $p_{22}(t) = p_{11}(t) - \frac{\dot{\Delta}}{\Delta}$, $p_{12}(t) = \frac{\alpha(t)\beta(t) - \beta(t)\alpha(t) + (\alpha^2(t) + \beta^2(t))q_{12}(t)}{\Delta}$, где $\dot{\omega}(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}$, $\dot{\alpha}(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt}$, $\dot{\Delta} = \frac{d\Delta}{dt}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю а б о в М. Р. Треугольные преобразования. — Труды Ташкентского с.-х. ин-та, 1964, вып. 16, с. 377.
2. С ы р о н д Ю. Б. — Дифференц. уравнения, 1974, т. 10, № 2, с. 265.

Поступила в редакцию
29.12.82.

Кафедра высшей математики ФПМ

УДК 535.5 : 539.194

Л. И. БУРОВ, И. И. ГОНЧЕРЕНОК

ЭФФЕКТЫ НАВЕДЕННОЙ ГИРОТРОПИИ В РАСТВОРАХ СЛОЖНЫХ МОЛЕКУЛ

Эффекты наведенной сильным световым полем гиротропии пробного потока широко исследуются теоретически и обнаружены экспериментально практически для всех классов объектов, за исключением сложных молекул. Возможно, это связано с тем обстоятельством, что, согласно расчетам [1], в рамках наиболее распространенной схемы эксперимента (циркулярная поляризация сильного поля [2]) анизотропия в таких средах вообще не создается. Однако расчеты [1] строились на основе обобщенной двух-уровневой схемы, которая широко применяется в молекулярной спектроскопии. В то же время именно учет пространственного

вырождения уровней объясняет наблюдаемые эффекты, например, в газах [1, 3]. Поэтому имеет смысл рассмотреть данный эффект с учетом колебательной структуры электронных состояний, тем более, что результаты расчета могут служить критерием применимости двухуровневой модели к расчетам такого типа.

При использовании формализма матрицы плотности расчет взаимодействия N -уровневой системы с бихроматическим электромагнитным полем может быть упрощен при следующих допущениях. Поскольку в спектрах сложных молекул доминирует, как правило, одно полносимметричное колебание, то можно принять квант колебательной энергии в основном и возбужденном состояниях одинаковым и постоянным. Далее, вследствие быстрой колебательной релаксации можно считать, что изменяется лишь общее число молекул в основном и возбужденном состояниях, в то время как их распределение по колебательным подуровням соответствует равновесному.

Теперь, следуя общей методике расчета [1] для тензора восприимчивости третьего ранга на частоте пробного потока, получаем выражение

$$\chi^{(3)}(\omega_1) = cI_0NF \{1 + \underline{e}_0 \cdot \underline{e}_0^* + \underline{e}_0^* \cdot \underline{e}_0\}, \quad (1)$$

где \underline{e}_0 и I_0 — вектор поляризации и интенсивность сильного поля; N — концентрация молекул в растворе; c — нормировочный множитель.

Выражение (1) совпадает с результатами работы [1], за исключением параметра F , который здесь сложным образом выражается через дипольные моменты переходов, релаксационные параметры и функции равновесного распределения по колебательным подуровням. Точное совпадение может быть получено в предположении, что все молекулы как в основном, так и в возбужденном состояниях находятся на самом нижнем подуровне, т. е. функции распределения вырождаются в δ -функции.

Таким образом, расчеты показывают, что и в данном случае обобщенная двухуровневая модель является вполне приемлемой, однако в качестве момента перехода выступает эффективная величина, которую нельзя приписать какому-либо конкретному (например, 0—0) переходу. С другой стороны, результаты показывают отсутствие наведенной гиротропии растворов сложных молекул в рамках общепринятой схемы эксперимента. Однако можно использовать какую-либо другую схему — например, исходную линейную поляризацию обоих потоков. В этом случае поляризация пробного потока изменится, и для ориентации большой оси эллипса поляризации и соотношения его осей в линейном приближении могут быть получены следующие соотношения:

$$\operatorname{tg} \Theta = \operatorname{tg} \Theta_0 (1 - 2 \operatorname{Re} B(z)), \quad (2)$$

$$\eta = \sin 2\Theta_0 \operatorname{Im} B(z), \quad (3)$$

$$B(z) = c_1 I_0 N F \frac{i}{\sigma_0} (1 - \exp(-\sigma_0 z)), \quad (4)$$

где Θ_0 — начальный угол между векторами поляризации; z — длина кюветы с раствором; σ_0 — коэффициент линейного поглощения на частоте сильного поля.

Для оценки величины эффекта выражение (4) может быть приближенно представлено

$$B = \frac{\mu_{00}^2}{5\hbar^2} |E_0|^2 \frac{1}{\frac{1}{\tau} + i\Omega}; \quad \Omega = \omega_{00} - \omega_0 + n\omega'. \quad (5)$$

Здесь μ_{00} и ω_{00} — дипольный момент и частота 0—0 перехода; E_0 и ω_0 — амплитуда и частота сильного поля; $n\omega'$ — колебательный квант для наиболее вероятного перехода; τ — время жизни в возбужденном состоянии. Следует иметь в виду, что соотношение (5) определяет лишь величину эффекта, но не его спектральную зависимость, которая является достаточно слабой.

1. Burov L. I.— Univ. Helsinki, preprint № HU-TFT-82-21, 1982.
2. Wieman C., Hänsch T. W.— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 1170.
3. Румянцева Н. К., Смирнов В. С., Тумайкин А. М.— Опт. и спектр., 1979, т. 46, с. 139.

Поступила в редакцию
30.05.83.

Кафедра общей физики

УДК 512.8

А. А. ШАРОМЕТ

ОБ АБСТРАКТНЫХ ИЗОМОРФИЗМАХ РАЗРЕШИМЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП

В работе изучается природа абстрактного изоморфизма групп k -точек связанных разрешимых алгебраических групп, при условии, что его ограничение на унипотентную часть группы индуцировано бирациональным отображением. Доказываются два результата, анонсированные автором в [1]. Мы используем обозначения, принятые в [2].

Теорема 1. Пусть G и H — разрешимые связанные k -группы, центры которых конечны и не содержат унипотентных элементов и $\overline{G(k)} = G$. Пусть $\varphi: G(k) \rightarrow H(k)$ изоморфизм такой, что $\varphi|_{G_u(k)}$ — бирациональное отображение.

Тогда найдутся группа F и изогении $\pi_1: F \rightarrow G$ и $\pi_2: F \rightarrow H$, определенные над k , такие, что $\varphi(\pi_1(f)) = \pi_2(f)\Theta(f)$ для всех $f \in F(k)$, где $\Theta: F(k) \rightarrow Z(H(k))$ — подходящий гомоморфизм.

Доказательство. Группа H действует на своей унипотентной части H_u внутренними автоморфизмами, обозначим $\gamma: H \times H_u \rightarrow H_u: (h, u) \rightarrow h^{-1}uh$. Таким образом, каждому $h \in H$ ставится в соответствие автоморфизм группы H_u , коморфизм которого мы обозначим γ_h . Если $f \in \Omega[H_u]$, то $\gamma_h(f) = f \text{Int } h$. В алгебре регулярных на H_u функций найдется конечномерное пространство V , определенное над k , которое содержит образующие алгебры $k[H_u]$ и инвариантно относительно действия группы H [2]. Отображение $h \rightarrow \gamma_h$ индуцирует линейное представление группы H в пространстве V , которое мы обозначим через ψ' . Нетрудно видеть, что ψ' определено над k .

Функции из $\Omega[H_u]$ разделяют элементы H_u , и их значения на элементах из H_u определяются значениями на них элементов k -базиса пространства $V = v_1, \dots, v_n$, ибо $\Omega[H_u] = \Omega[v_1, \dots, v_n]$. Значит, ядром ψ' является $Z_H(H_u)$.

Пусть $\varphi: G_u \rightarrow H_u$ такой бирациональный изоморфизм, что $\varphi(u) = \tilde{\varphi}(u) \forall u \in G_u(k)$, а $\tilde{\varphi}_0$ — его коморфизм. Из условия теоремы следует, что $\overline{G_u(k)} = G_u$, значит, $\tilde{\varphi}$ определен над k и элементы $\tilde{\varphi}_0(v_1), \dots, \tilde{\varphi}_0(v_n)$ порождают алгебру $k[G_u]$. Определим действие группы G на $\Omega[G_u]$, как выше мы это сделали для H и H_u , а именно: для $g \in G$ $\delta_g: f \rightarrow f \text{Int } g$, где $f \in \Omega[G_u]$. Нетрудно видеть, что пространство $\tilde{\varphi}_0(V)$ инвариантно относительно G и определено над k . Как и в случае группы H , имеем линейное представление, определенное над k группы G в векторном пространстве $\tilde{\varphi}_0(V)$, которое обозначим буквой ψ . Изоморфизм $\tilde{\varphi}_0: V \rightarrow \tilde{\varphi}_0(V)$ векторных пространств индуцирует бирациональный k -изоморфизм $\varphi^*: \text{GL}(\tilde{\varphi}_0(V)) \rightarrow \text{GL}(V)$. Очевидно, что $\psi'(\varphi(s)) = \varphi^*(\psi(s)) \forall s \in S(k)$.

Покажем, что для максимального k -подтора S группы G $\varphi(S(k))$ является группой k -точек некоторого максимального тора группы H , определенного над k . Пусть для $s \in S(k)$ $\varphi(s) = t, u_s$ — разложение Жордана. Тогда $u_s \in Z_H(H_u)$, ибо $\psi'(\varphi(s)) = \varphi^*(\psi(s))$ и $\varphi^*(\psi(s))$ — полупростой элемент. Кроме того, u_s централизует $\varphi(S(k))$, поскольку $\varphi(s)$ центра-

лизует $\varphi(S(k))$. Значит, $u_s \in Z(H)$, ибо $H = \overline{\varphi(S(k))H_u}$. Теперь из условия теоремы следует, что $u_s = e$, и $\varphi(S(k))$ состоит из полупростых элементов. Отсюда легко следует, что $\varphi(S(k)) = S'(k)$, где $S' \subset H$ — максимальный подтор, определенный над k .

Представления ψ и ψ' индуцируют изогении $\psi: S \rightarrow T$ и $\psi': S' \rightarrow T$, где через T обозначен k -тор $\varphi(S)$. Тогда из результатов [3] следует, что найдутся такие изогении $\pi_1: T \rightarrow S$ и $\pi_2: T \rightarrow S'$, что $\psi\pi_1 = \psi'\pi_2 = \lambda_d$, где d — наименьшее общее кратное степеней изогений ψ и ψ' , а $\lambda_d: x \rightarrow x^d$. Поскольку $t \in T(k)$, $\psi'(\varphi(\pi_1(t))) = \psi(\pi_1(t)) = \psi'(\pi_2(t))$, то $\varphi(\pi_1(t))\pi_2(t)^{-1} \in Z(H(k))$. Отождествим G_u и H_u с помощью φ и обозначим через U , а буквой F обозначим полупрямое произведение TU , где действие T на U определено с помощью изогении π_1 (или, что то же самое, с помощью π_2). Нетрудно видеть, что группа F , изогении $\pi_1: F \rightarrow G: (t, u) \rightarrow \pi_1(t)u$, $\pi_2: F \rightarrow H: (t, u) \rightarrow \pi_2(t)u$ и гомоморфизм $\Theta: F(k) \rightarrow Z(H(k)): (t, u) \rightarrow \varphi(\pi_1(t))\pi_2(t)$ являются искомыми.

Замечание. В случае, когда характеристика поля k равна нулю вместо алгебры Хопфа $\Omega[G_u]$ можно использовать алгебру Ли группы G_u , как это сделано в подобной ситуации в [4].

В важном случае, когда поле k конечнопорождено, теорему 1 можно усилить следующим образом.

Теорема 2. Пусть в условиях теоремы 1 поле k конечнопорождено.

Тогда существует k -изоморфизм $\tilde{\varphi}: G \rightarrow H$ такой, что $\tilde{\varphi}(g) = \varphi(g)\Theta(g) \forall g \in G(k)$, где $\Theta: G(k) \rightarrow Z(H(k))$ — подходящий гомоморфизм.

Доказательство теоремы 2 разобьем на две леммы.

Лемма 1. Пусть T — расщепимый k -тор, где k — такое поле, что, если для $m, n \in \mathbb{Z}$ $k^m = k^n$, то $m = \pm n$. Пусть $\pi: T \rightarrow T$ — такая изогения, что $\pi(T(k)) = T(k)^d$. Тогда найдется единственный k -автоморфизм φ тора T такой, что $\pi\varphi = \lambda_d$.

Доказательство. Тор T можно считать диагональным. Воспользуемся тем, что категория торов, расщепимых над k , контравариантно эквивалентна категории свободных конечнопорожденных Z -модулей, причем эквивалентность эта устанавливается отображением $T \rightarrow X^*(T)$.

Изогения π индуцирует морфизм $\pi_0: X^*(T) \rightarrow X^*(T)$, который в фиксированном базисе $X^*(T)$ задается целочисленной невырожденной матрицей A . Нам достаточно найти такую матрицу $B \in GL(n, Z)$, что $AB = dE$, где E — единичная матрица. Из того, что $\pi(T(k)) = T(k)^d$ нетрудно вывести, что все коэффициенты матрицы A делятся на d .

Покажем, что $\det A = \pm d^n$. Поскольку все коэффициенты A делятся на d , то $A = (dE)A'$. Если $\det A' \neq \pm 1$, то соответствующий морфизм π' тора является собственной изогенией. Значит, найдется такой одномерный подтор S тора T , что π' индуцирует собственную изогению S на $\pi'(S)$. В силу разложимости тора S , из условия леммы следует, что $\pi'(S(k)) = (\pi'(S)(k))^m$ для некоторого целого $m > 1$. Отсюда следует, что $\pi(T(k)) \cap \pi'(S) = (\pi'(S)(k))^{md}$. Значит, $\pi(T(k)) \neq T(k)^d$. Для матрицы A , удовлетворяющей этим условиям, искомая матрица, как хорошо известно, существует, что доказывает лемму.

Лемма 2. Пусть k -конечнопорожденное поле T , T_1 и T_2 — k -торы. Пусть $\pi_1: T \rightarrow T_2$ и $\pi_2: T_1 \rightarrow T_2$ — такие k -изогении, что $\pi_1(T(k)) = \pi_2(T_1(k))$. Тогда существует единственный k -изоморфизм $\varphi: T \rightarrow T_1$ такой, что $\pi_1 = \pi_2\varphi$.

Доказательство. Существует (см. [3]) единственная k -изогения $\gamma: T_2 \rightarrow T$ такая, что $\gamma\pi_1 = \lambda_d$. Если мы найдем такой изоморфизм φ , что $\gamma\pi_1 = \gamma\pi_2\varphi$, то $\pi_1 = \pi_2\varphi$. Действительно, в противном случае отображение $g \rightarrow \pi_1(g)\pi_2(\varphi(g))^{-1}$ было бы нетривиальным морфизмом связной группы в конечную — Кег γ . Таким образом, лемму достаточно доказывать для $T_2 = T$ и $\pi_1 = \lambda_d$.

Найдется локально-компактное пополнение k_v поля k , над которым T разложим. Тогда для T и k_v верна теорема о слабой аппроксимации [5],

т. е. $T(k_v) = \overline{T(k)}^v$, где $\overline{T(k)}^v$ — замыкание $T(k)$ в топологии, индуцированной на $T(k_v)$ топологией поля k_v . Отсюда следует, что $\pi_2(T_1(k_v)) = T(k_v)^d$ и по лемме 1 найдется единственный k_v -изоморфизм φ такой, что $\pi_2\varphi = \lambda_d$. Нетрудно видеть, что φ определен над k , что завершает доказательство леммы.

Для доказательства теоремы 2 достаточно применить лемму 2 к подгруппам S , S' и T групп G и H , и к изогениям, индуцированным на S и S' гомоморфизмами ψ и ψ' , которые фигурировали в доказательстве теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шаромет А. А.— Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 1, с. 53.
2. Борель А. Линейные алгебраические группы.— М., 1972.
3. Vogel A., Tits J.— Ann. of Math., 1973, v. 97, N 3, p. 499.
4. Платонов В. П., Милованов М. В.— Докл. АН СССР, 1973, т. 209, № 1, с. 43.
5. Harder G.— Arch. Math., 1969, v. 19, N 5, p. 465.

Поступила в редакцию
01.11.82.

Кафедра высшей алгебры

В издательстве «Университетское»

в 1984 году выходят:

Горбачевич А. К. Квантовая механика в общей теории относительности: основные принципы и элементарные приложения.— 9 л.— Рус. яз.— 1 р. 40 к. (ориентировочно)

Излагаются основы квантовой механики в неинерциальных системах отсчета и во внешних гравитационных полях, а также ее наиболее перспективные приложения. Анализируются трудности, возникающие при квантово-механической интерпретации общековариантного уравнения Дирака и связанные с неэрмитовостью и нековариантностью оператора Гамильтона, а также указан путь их устранения. Большое внимание уделяется различным физическим приложениям и анализу конкретных квантово-механических эффектов. В частности, детально исследовано влияние релятивистских ускорений ядра и внешнего гравитационного поля на атомные спектры.

Книга рассчитана на научных работников, аспирантов, студентов, специализирующихся в области теоретической физики.

Кумахов М. А., Комаров Ф. Ф. Излучение заряженных частиц в твердых телах.— 20 л.— Рус. яз.— 3 р. 30 к. (ориентировочно)

Анализируются полученные за последнее десятилетие теоретические и экспериментальные результаты по спонтанному и вынужденному излучению каналированных в кристаллах легких релятивистских частиц, выход характеристического рентгеновского излучения, возбуждаемого ионами. Рассматривается область приложений этих излучений в промышленном производстве и научных исследованиях.

Книга рассчитана на специалистов в области радиационной физики твердого тела, ядерной и атомной физики, оптики, ионной имплантации. Может быть полезна аспирантам и студентам соответствующих специальностей вузов.

Выходит в улучшенном оформлении.

Предварительный заказ на книги можно оформить в магазине № 29 «Центральный» — опорном пункте издательства — по адресу: 220050, г. Минск, Ленинский пр., 19.

УДК 517.948.32

Л. А. Х в о ш и н с к а я. Однородная краевая задача Римана для двух пар функций с кусочно-постоянной матрицей в случае четырех особых точек. № 5157-81. Деп. от 09.11.81.

Рассмотрена однородная краевая задача Римана для двух пар функций с кусочно-постоянной матрицей в случае четырех особых точек. Решение задачи выражается через решения дифференциального уравнения класса Фукса. При этом найдены каноническая матрица, частные индексы и число решений задачи.

УДК 517.928

Данг Динь Тяу. Об обобщенных характеристичных числах решений бесконечных неавтономных систем дифференциальных уравнений. № 3391-82. Деп. от 30.06.82.

С помощью обобщенных характеристичных чисел получены условия неустойчивости и устойчивости нулевого решения для бесконечных неавтономных систем дифференциальных уравнений.

УДК 517.53

Т. Н. Ж о р о в и н а. Смешанная задача теории упругости для плоскости с разрезами на единичной окружности. № 3719-82. Деп. от 13.07.82.

Изучается смешанная задача теории упругости для плоскости с разрезами, лежащими на единичной окружности. Постановка задачи взята из монографии Н. И. Мухелишвили «Некоторые основные задачи математической теории упругости». В работе используется предложенный Э. И. Зверовичем метод сведения смешанной задачи к краевой задаче Римана на гиперэллиптической римановой поверхности. Доказана безусловная разрешимость возникающей краевой задачи и единственность решения; построено решение задачи для произвольного расположения на окружности точек, в которых происходит изменение типа краевого условия, а также выписано решение для случая двух разрезов на единичной окружности.

УДК 548 : 539(3)5 : 539.2 : 539.3/5

С. И. Ж у к о в а. Исследование ползучести монокристаллов висмута различных кристаллографических ориентаций. № 3720-82. Деп. от 13.07.82.

Изучена стадия установившейся ползучести монокристаллов висмута различных кристаллографических ориентаций. Определены энергии активации ползучести и чувствительность скорости ползучести к напряжению. С помощью металлографического анализа следов скольжения определены действующие системы скольжения.

УДК 517.948.32

В. В. К а ш е в с к и й. Условия разрешимости и пример нелинейной краевой задачи на римановой поверхности рода 2. № 3778-82. Деп. от 14.07.82.

Построен пример нелинейной краевой задачи степенного типа для кусочно-аналитических функций на римановой поверхности рода два. Контуром является каноническое сечение. Получена картина разрешимости в классах функций с заданными нулями, а также изучена зависимость от параметров исходной поверхности.

УДК 621.382.3

В. И. К а р а с ь, В. М. Л о м а к о. Квантовая эффективность излучательной рекомбинации в светонезлучающих диодах при высоких уровнях инжекции. № 4068-82. Деп. от 29.07.82.

Проведен расчет квантовой эффективности люминесценции при межзонных излучательных переходах в светонезлучающих $p-n$ -структурах при произвольном уровне инжекции. Предполагалось, что легирование активной области является однородным, а концентрация безызлучательных центров рекомбинации не превышает концентрации равновесных носителей. Получены аналитические выражения для связи интенсивности излучения I с плотностью тока j через $p-n$ -переход. Расчеты предсказывают участок веерообразного хода кривых I от j в зависимости от соотношения между временами жизни относительно излучательного и безызлучательного переходов при низком уровне возбуждения. Такой ход зависимости может быть связан как с насыщением безызлучательного канала рекомбинации, так и с переходом к квадратичной межзонной рекомбинации. Расчеты указывают на возможность определения излучательного времени жизни из анализа зависимости интенсивности излучения от тока.

* Копии депонированных статей можно заказать по адресу: 140010, Московская обл., г. Люберцы, 10, Октябрьский проспект, 403. Производственно-издательский комбинат ВИННИТИ, отдел распространения; тел. 271-90-10, доб. 26-29.

В. Л. Катков. Процедуры для работы с рациональными числами на Фортране. № 4069-82. Деп. от 29.07.82.

Описывается набор процедур, оперирующих с дробями абсолютно точно. Реализованы арифметические операции, операции отношений, преобразования дробей в вещественное число и обратно, печать и некоторые другие. В качестве иллюстрации приведено вычисление первых 24 гармонических чисел. Процедуры могут быть использованы для аналитических выкладок на ЭВМ, повышения численной устойчивости счета и т. д.

УДК 681.3.015

А. Д. Камеева. Резервы резидента COURSEWRITER. № 4071-82. Деп. от 29.07.82.

Предложен проект дальнейшего развития системы автоматизации проектирования обучающих программ на базе системы COURSEWRITER и средств синтаксического и семантического анализа, заложенных в трансляторы с языков высокого уровня. Реализация проекта обеспечит создание обучающих систем более высокого интеллекта. По предлагаемому проекту предусматривается развитие резидентной системы COURSEWRITER. Побочные пристройки (функции) используются в целях сопряжения с внутренним языком программирования курсов. Проект можно расценить как типовой, ибо по нему можно продолжить развитие системы, «вписывая» в нее различные уже имеющиеся или вновь разрабатываемые системные средства. Кроме того, реализация проекта делает более доступным резидент системы для дальнейшего его развития.

УДК 517.532; 535.4

С. В. Рогозин. Об интеграле типа Коши с разрывной плотностью. № 4072-82. Деп. от 29.07.82.

Изучаются свойства интеграла типа Коши на вещественном положительном луче в случае, когда плотность имеет бесконечное число разрывов первого рода. При этом предполагается, что между точками разрыва плотность достаточно гладкая и существует ее предел при стремлении переменной к бесконечности. В основе рассуждений лежит схема, применяемая при исследовании целых функций конечного порядка.

УДК 517.948.32

С. В. Рогозин. О краевой задаче Римана с бесконечным числом разрывов 1-го рода ее коэффициента. № 4073-82. Деп. от 29.07.82.

Решается краевая задача Римана с контуром на вещественном положительном луче в предположении, что ее коэффициент и свободный член имеют бесконечное число разрывов первого рода и ограничены в окрестности бесконечности. Результаты, полученные при решении однородной и неоднородной задач, в основном аналогичны соответствующим результатам в случае классической постановки задачи.

УДК 535.132

А. И. Кирилленко, А. П. Халпалюк. Энергетические соотношения при отражении неоднородных волн с преобразованием поляризации. № 4142-82. Деп. от 02.08.82.

Рассматриваются энергетические соотношения при отражении и преломлении неоднородных плоских волн на границе раздела прозрачных и поглощающих сред в наиболее сложных дискуссионных случаях. При отражении волн канонических s - и p -поляризации обсуждаются критерии выбора схемы отражения и отмечается их противоречивость. Основное внимание уделено изучению баланса потоков энергии на границе раздела при наличии в нем интерференционных членов. Показано, что при отражении волн неканонических поляризации, являющихся муссой волн s - и p -типов, в балансе потоков энергии появляются интерференционные члены нового вида, обусловленные сложением волн различных поляризации. Рассматриваются свойства таких интерференционных потоков и детально изучается частный случай отражения, когда только они присутствуют в балансе энергии. Подчеркивается условность разделения поля в первой среде на падающую и отраженную волны в стационарной задаче об отражении.

УДК 621.371.167

А. П. Халпалюк. Дифракция плоской волны H -поляризации на краю идеально проводящей полуплоскости. № 4143-82. Деп. от 02.08.82.

Методом комплексного преобразования Фурье в области обобщенных функций решается задача о дифракции плоской электромагнитной волны на краю идеально проводящей бесконечно тонкой полуплоскости. Рассматривается линейно поляризованная падающая волна, магнитный вектор которой ориентирован параллельно дифрагирующему краю экрана. Задача решается в два этапа. Сначала сформулированы и решены уравнения для тангенциальных составляющих дифракционных полей в плоскости экрана (граничные значения). Затем эти граничные значения используются как крайние условия при решении уравнений Максвелла для определения дифракционных волн вне плоскости экрана. Единным образом найдены два частных линейно независимых решения, одно из которых оказалось известным решением Зомерфельда. Оба частных решения

имеют на краю полуплоскости сингулярности одинакового порядка. В качестве регулирующего решения предложена специальная линейная комбинация обоих частных решений, у которой отсутствуют сингулярности тангенциальных составляющих дифракционного поля на краю экрана. Решения обобщаются на случай неоднородных дифракционных волн.

УДК 621.372

В. В. Корнейчик. Исследование собственных колебаний резонаторно-волноводных устройств методом графически контролируемой суперпозиции. № 4144-82. Деп. от 02.08.82.

Продемонстрированы возможности метода графически контролируемой суперпозиции решений уравнения Гельмгольца при исследовании E -поляризованных собственных колебаний резонаторов и волноводов, поперечные сечения которых представляют собой деформированные круги и многоугольники со скругленными углами. Подробно исследованы свойства симметрии и антисимметрии колебаний и их влияние на процесс непрерывного перехода от одного сечения к другому. Для описания процессов перехода используются полученные в работе интегральные представления собственных колебаний круглого резонатора в виде суперпозиции колебаний повернутых квадратных резонаторов и разложения колебаний повернутых квадратных резонаторов в ряды Фурье, представляющие собой суперпозицию собственных колебаний круглых резонаторов. Полученные в работе результаты касаются не только низших собственных колебаний, но и колебаний с как угодно высокими частотами, что особенно важно при исследовании работы резонаторов и волноводов в диапазонах миллиметровых и субмиллиметровых волн.

УДК 621.316.7-539

М. А. Батурицкий, Ю. А. Доманов, П. В. Жагиро, И. Ю. Люзин. О точности дискретно регулируемых систем. № 4145-82. Деп. от 02.08.82.

Анализируются предельные точностные характеристики линейных дискретно регулируемых систем при использовании одного и двух регулирующих параметров. На основании формулы Боде и ее аналога для двух регулирующих параметров выведены предельные чувствительности регулируемой величины к изменениям регулирующего параметра. Показано, что уже при двух регулирующих элементах может быть получена нулевая чувствительность в точках регулирования. Приведены результаты экспериментального моделирования.

УДК 519.7

С. И. Кашкевич. Устойчивость алгоритмов распознавания относительно изменений контрольной выборки. № 4510-82. Деп. от 09.08.82.

Исследуются условия, при которых результаты работы некоторого алгоритма распознавания образов можно распространить на «окрестности» исходной задачи. Введено понятие вполне устойчивого распознающего оператора, установлена связь между устойчивым алгоритмом распознавания и вполне устойчивым распознающим оператором. Исследован на устойчивость ряд практических моделей распознающих алгоритмов.

УДК 530.12

Ф. Каракура, В. И. Кудин, А. В. Минкевич. О гравитационных уравнениях для однородных изотропных космологических моделей с кручением. № 4512-82. Деп. от 09.08.82.

В рамках калибровочной теории гравитации, при использовании наиболее общего выражения для гравитационного лагранжиана, с учетом всевозможных квадратичных по кривизне и кручению членов получены гравитационные уравнения в случае однородного изотропного пространства. Структура полученных уравнений слабо зависит от вида гравитационного лагранжиана. Рассматривается вопрос о существовании регулярных по метрике решений для однородных изотропных космологических моделей в случае произвольного уравнения состояния.

УДК 539.1.078 : 621.039.83

В. А. Евдокимов, Ю. Г. Кононов. Электродинамический привод мессбауэровского спектрометра. № 4513-82. Деп. от 09.08.82.

Описана модель электродинамического привода (ЭДП) мессбауэровского спектрометра, приведены механическая и электрическая эквивалентные схемы ЭДП. Получено выражение для полного входного электрического сопротивления и выявлены основные резонансные частоты привода. Представлены результаты испытаний различных конструкций ЭДП. Анализируются динамические свойства привода и пути их улучшения. Даны рекомендации по разработке ЭДП. Описаны конструкции привода с критическими частотами возникновения положительной обратной связи более 8000 Гц.

УДК 621.378.32

И. С. Манак. Об изучении амплитудно-частотных характеристик полупроводниковых излучателей в спецпрактикуме «Квантовые полупроводниковые приборы». № 4797-82. Деп. от 03.09.82.

Рассмотрены особенности методики исследования амплитудно-частотных характеристик полупроводниковых источников излучения с помощью фотоэлектронных умножителей, работающих в режиме преобразования частоты в прикатодной области.

УДК 517.925.31

А. А. Леваков, Ю. Б. Сыронд. Предельное поведение траекторий бушующей системы специального вида. № 5546-82. Деп. от 10.11.82.

Исследовано предельное поведение траекторий дифференциальной системы специального вида, возникающей в теории массового обслуживания.

УДК 517.958+512.385

В. И. Адамович. К вопросу о задаче дифракции поля магнитного диполя на круговом отверстии в экране на границе раздела двух сред. № 5547-82. Деп. от 10.11.82.

Доказывается разрешимость бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, к которым сведено решение граничных задач дифракции поля магнитного диполя на круговом отверстии в плоском экране, являющемся границей раздела двух сред.

УДК 519.1

М. Б. Гуардадо Эрнандес. Методы синтеза двусторонней сети с минимальным значением максимального дугового потока. № 5834-82. Деп. от 25.11.82.

Предлагаются методы решения задачи синтеза двусторонней транспортной сети при критерии минимизации максимального значения дугового потока. Разработаны методы распределения предложений источников, удовлетворяющих спрос стоков двусторонней транспортной сети, которые обеспечивают минимальность максимального значения дуговых потоков. Соответствующие алгоритмы реализуются за $O(m(n-m))$ операций, где m — число источников; $n-m$ — число стоков.

УДК 539.389.3

С. В. Гусакова, В. И. Прокошин, В. Г. Шепелевич, В. А. Ярмолевич. Тензоэффект в миниатюрных пленочных образцах из полуметаллов. № 5835-82. Деп. от 25.11.82.

Приведены технология изготовления миниатюрных пленочных образцов, методика деформаций изгиба и описание установки для деформирования пленочных образцов. Представлены экспериментальные результаты по тензочувствительности миниатюрных пленочных образцов.

УДК 519.17

Л. Н. Батурина, Н. А. Лепешинский. Свойства потоковой функции в полной сети при ограничениях на пропускные способности ребер. № 5836-82. Деп. от 25.11.82.

На основе специальных характеристик вершины построен метод определения потоковой функции в полной сети, для которой заданы границы интервала изменения значений функции пропускной способности. Эффективность предлагаемого метода обеспечивается тем, что для многих классов задач простой анализ специальных множеств, связанных с каждой вершиной, позволяет непосредственно выписать все значения потоковой функции. В случае необходимости решения отдельных задач о максимальном потоке трудоемкость предлагаемого алгоритма не превышает трудоемкости известного алгоритма Гомори — Ху.

УДК 378.1681.31

М. В. Мишурная, А. В. Соболев. Семiotическая диалоговая система для обучения приемам алгоритмизации и программирования. № 5837-82. Деп. от 25.11.82.

Рассматривается один диалоговый подход для обучения приемам программирования и алгоритмизации в рамках автоматизированной обучающей системы АТОС БГУ. Система осуществляет контроль и управление усвоением знаний студентов.

УДК 513

А. Е. Тралле. Зеркала Ф-пространств унитарной и симплектической групп. № 5838-82. Деп. от 25.11.82.

Решается задача нахождения зеркал, т. е. вложенных подмногообразий, являющихся множествами неподвижных точек нивольтивных изометрий римановых периодиче-

ских Φ -пространств с классическими компактными основными группами. Дается описание таких зеркал в терминах подсистем специального вида общей тройной системы Ли данного Φ -пространства. В случае унитарной и симплектической групп получена явная классификация зеркал, обладающих структурой подпространства исходного Φ -пространства.

УДК 535.34

Ф. Н. Боровик, С. И. Каськова, Г. С. Романов, Л. К. Станчиц, К. Л. Степанов, В. И. Толкач. Уравнение состояния и коэффициенты поглощения плазмы ксенона. Часть 1. № 6022-82. Деп. от 09.12.82.

В первой части работы содержится описание методики расчета энергетической структуры ксенона с использованием релятивистского обобщения уравнений Хартри-Фока с учетом обмена по Слэтеру. Энергии переходов вычислялись в приближении «замороженного» остова. Изложена методика построения системы термов в приближении jj -связи для ионов ксенона. Результаты численных расчетов энергетической структуры 22 ионов ксенона представлены в виде таблиц. Проведено сопоставление с имеющимися экспериментальными данными по потенциалам ионизации и уровням энергии ксенона.

УДК 535.34

Ф. Н. Боровик, С. И. Каськова, Г. С. Романов, Л. К. Станчиц, К. Л. Степанов, В. И. Толкач. Уравнение состояния и коэффициенты поглощения плазмы ксенона. Часть 2. № 6023-82. Деп. от 09.12.82.

Подробно рассматриваются основные элементарные процессы, ответственные за поглощение излучения в плазме; излагаются методы расчетов соответствующих сечений. Результаты численных расчетов уравнений состояния, монохроматических спектральных коэффициентов поглощения, средних и групповых характеристик излучения приведены в виде подробных таблиц для области температур 0,3—30 эВ и плотностей $(5,8819-5,8819 \cdot 10^{-9})$ г/см³.

УДК 621.3.084.2

В. И. Вопнярский. Оптимальные электрометрические электроды для упругих объектов. № 6370-82. Деп. от 12.08.82.

Приводится аналитическое выражение, позволяющее определить оптимальные параметры электрода в зависимости от условий съема информации.

УДК 621.3.089.2+621.317.799 : 621.13

В. И. Вопнярский. Информационный анализ географических методов исследования. № 6371-82. Деп. от 28.12.82.

Приводятся рекомендации по наиболее целесообразному с точки зрения теории информации использованию двухэлектродного и четырехэлектродного географических методов исследования сердечно-сосудистой системы человека.

УДК 538.122-378.147-388

В. Г. Шепелевич, В. И. Прокошин, Е. Н. Король, В. А. Ярмолевич. Разработка лабораторной работы «Излучение магнитных полей». № 6372-82. Деп. от 28.12.82.

Приведены методические указания по постановке лабораторной работы «Изучение магнитных полей». Для создания магнитных полей используется электромагнит со сменными полюсными наконечниками. Индукция магнитного поля измеряется с помощью миниатюрного датчика Холла.

УДК 517.977.52

В. В. Альсевич, В. Г. Бондаревский. Необходимые и достаточные условия оптимальности для систем с последствием. № 6873-82. Деп. от 22.12.82.

Рассматриваются задачи терминального управления для систем с переменным запаздыванием по управлению. Для систем с распределенным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), u(t), u(s-h(s)), t, s) ds, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = \int_{t_0}^t f(x(t), u(t), u(s-h(s)), t, s) ds, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (2)$$

без каких-либо предположений относительно $\dot{h}(t)$ доказываются необходимые условия оптимальности. Для систем (1), (2) и системы с сосредоточенным запаздыванием $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), u(t-h(t)), t), t \in [t_0, t_1]$ получены достаточные условия оптимальности в случае $\dot{h}(t) \neq 1$.

В. А. Коробов. «Физический» электрон в квантовой электродинамике. 1. Каноническое преобразование. № 6375-82. Деп. от 28.12.82.

В координатном представлении строится каноническое преобразование операторов электронно-позитронного и электромагнитного полей для приближенной диагонализации гамильтониана квантовой электродинамики. Получены уравнения, которым должно удовлетворять данное преобразование из условий каноничности, диагональности оператора заряда и диагональности «главной» части гамильтониана. Рассмотрен метод приближенного нахождения из этих уравнений заряда и массы «физического» электрона.

УДК 681.3.06 : 51

М. П. Черкасова, Л. И. Добриня. О расширении средств последовательного программирования. № 6410-82. Деп. от 28.12.82.

Из анализа средств описания параллелизма программ, имеющихся в языках программирования высокого уровня, разработан языковой модуль параллельного программирования для многопроцессорных вычислительных систем, который реализован с использованием макроинтерпретатора ПЛ/1 ОС ЕС.

УДК 536.246

Кала Рамон, В. Л. Ганжа. Гидродинамика и теплообмен в кипящем слое кубинского сахара-песка. № 6411-82. Деп. от 28.12.82.

Рассмотрены характеристики кубинского рафинированного сахара-песка при его псевдооживлении. Определена оптимальная скорость фильтрации газа, обеспечивающая максимальный коэффициент теплообмена. Предложен метод псевдооживления для осуществления процессов сушки и охлаждения сахара-песка.

УДК 533.9.082.5

А. П. Бурмаков, В. Б. Михайлов, А. В. Колесник, М. В. Сузденков. Торможение импульсного потока плазмы электрического взрыва проводника при натекании на плоскую преграду. № 6412-82. Деп. от 28.12.82.

Приводятся и анализируются результаты спектроскопических и интерференционно-голографических исследований плотного импульсного потока плазмы, образованного при электрическом взрыве проводника в вакууме. Рассматриваются структура, динамика и пространственно-временное распределение параметров области взаимодействия плазменного потока с плоской преградой. Результаты экспериментальных исследований сравниваются с результатами численного газодинамического расчета.

УДК 537.635 : 681.325

С. Н. Кудлаев, Г. И. Ромбак, В. П. Яновский. Программно-управляемый блок задания и развертки поляризующего магнитного поля радиоспектрометра ЭПР. № 6413-82. Деп. от 28.12.82.

Описан блок задания и развертки магнитного поля, рассчитанный на совместную работу с микропроцессорной системой сбора и обработки спектрометрической информации. Блок обеспечивает возможность задания начального значения магнитного поля и осуществляет развертку магнитного поля по треугольному закону с возможностью дискретного изменения амплитуды и времени развертки. Разработанный блок может быть использован в программно-управляемом радио-спектрометре ЭПР для решения широкого класса задач как научного, так и прикладного характера.

УДК 548.73

В. М. Анищик, Л. Б. Елисеева, В. В. Понарядов, И. В. Рыбалко. Определение коэффициента гетеродиффузии в металлах. № 6414-82. Деп. от 28.12.82.

Приводится описание лабораторной работы, посвященной рентгенографическому определению коэффициентов гетеродиффузии в системах, составляющих непрерывный ряд твердых растворов, предназначенной для студентов, специализирующихся по физике твердого тела, физическому металловедению и термической обработке металлов.

УДК 517.2

Н. К. Бердник. О некоторых вопросах, касающихся начальных положений математического анализа. 1. № 6528-82. Деп. от 30.12.82.

Приводятся факты, не укладывающиеся в геометрическую систему Евклида и тем самым указывающие на необходимость расширения этой системы. Показано, что, пытаясь устранить эти противоречия, мы естественным образом приходим к геометрии Лобачевского. Обобщенные формулы сложения для дуг, радиусов и углов получены в том виде, в каком они допускают простую наглядную интерпретацию, и удобны для дальнейшего применения в анализе.

УДК 517.2

Н. К. Бердник. О некоторых вопросах, касающихся начальных положений математического анализа. 2. № 6529-82. Деп. от 30.12.82.

На числовой прямой вводятся две координатные системы, начала которых расположены друг от друга на некотором расстоянии. Далее, исходя из требования равноправия этих систем, показано, что предел последовательности $\{a_n\}$ зависит от положения на числовой оси начала отсчета переменной n . Аналогичная зависимость устанавливается и для критерия сходимости бесконечного ряда. Необходимым следствием отсюда вытекает то, что длина отрезка $p_2 - p_1$ (число) зависит от местоположения его относительно точки «нуль» на числовой оси. Выведена формула сложения двух величин с учетом относительности последних: обобщенный закон аддитивности. Показано, что применение полученной формулы к бесконечной геометрической прогрессии приводит к инвариантности критерия сходимости этой прогрессии.

УДК 517.2

Н. К. Бердник. О некоторых вопросах, касающихся начальных положений математического анализа. 3. № 6530-82. Деп. от 30.12.82.

Исходя из обобщенного закона аддитивности, полученного во второй части, введено определение производной, которое является обобщением известного определения Ньютона — Лейбница. Получены производные основных элементарных функций в наиболее общей форме. Показано, что ньютонова производная приводит к сравнительно верным результатам лишь в том случае, когда аргумент дифференцируемой функции принимает относительно малые значения. Показано, что в развиваемой теории имеет место инвариантность формы дифференциала второго порядка.

УДК 517.948.32

Л. А. Хвоцинская. Решение некоторых задач, сводящихся к краевой задаче Римана для двух пар функций с кусочно-постоянной матрицей. № 6531-82. Деп. от 30.12.82.

Рассмотрена однородная обобщенная задача Римана с кусочно-постоянными коэффициентами на отрезке действительной оси. Рассмотрены также краевая задача Римана для двух пар функций на действительной оси с коэффициентами специального вида и одна трехэлементная задача на отрезке действительной оси со сдвигом внутри области. Решение задач сводится к решению задач Римана для двух пар функций с кусочно-постоянной матрицей и получено в замкнутой форме через гипергеометрические функции.

УДК 519.8

В. М. Котов. О задаче Штейнера. № 4070-82. Деп. от 29.07.82.

Доказывается гипотеза Гильберта и Поллака для пяти точек.

УДК 681.3.068

В. Л. Катков, И. А. Смирнова, Л. А. Шаповская. Пакет программ для обработки строк на Фортране ЕС ЭВМ. № 6374-82. Деп. от 28.12.82.

Описывается пакет программ, предназначенный для обработки строк: создания, конкатенции, подстановки строк, выделения и уничтожения части строк, копирования, поиска по шаблону, печати, перевода из символического представления в числовое и т. п., всего около 40 программ. Номенклатура операций примерно эквивалентна тому же на языках Бейсик Плюс или Фортран-77. Пакет может оказаться полезным в задачах символической обработки.

В. И. Кононович, Э. И. Нестерович, Г. И. Ромбак, В. А. Сосенко, В. П. Яновский. Микропроцессорная система цифровой регистрации и первичной обработки спектров электронного парамагнитного резонанса. № 6532-82. Деп. от 30.12.82.

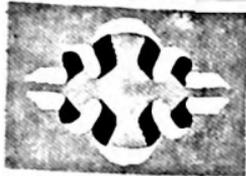
Описан автоматизированный ЭПР спектрометр со встроенной микро-ЭВМ. Микро-ЭВМ, разработанная на базе 8-разрядного микро-процессора типа К580ИК80, полностью контролирует работу спектрометра. Она осуществляет управление режимами работы прибора, запуск развертки магнитного поля, аналого-цифровое преобразование входного сигнала, а также предварительную обработку полученных спектров (сглаживание, интегрирование, масштабирование) и вывод их на периферийные устройства для визуального контроля результатов измерений. Разработанный спектрометр ЭПР может найти применение для решения широкого класса задач как научного, так и прикладного характера.

Ю. В. Меленец. Представление квазипериодических случайных процессов уравнениями авторегрессии. № 5833-82. Деп. от 25.11.82.

Рассматриваются вопросы описания квазипериодических случайных процессов, т. е. процессов, имеющих периодические математические ожидания с ограниченной дисперсией, уравнениями авторегрессии с постоянными коэффициентами и коррелированными помехами. В случае, если помехой является стационарная случайная последовательность, исследуется вид уравнений, дающих квазипериодические решения, и находятся условия на корреляционную функцию помехи, при выполнении которых такие решения существуют. Исследуется также ситуация, когда помеха является нестационарной случайной последовательностью с корреляционной функцией полигармонического вида.

В. И. Малюгин. Непараметрическая классификация многомерных наблюдений в случае существенно зависимых признаков. № 5548-82. Деп. от 10.11.82.

Рассматриваются вопросы повышения эффективности непараметрического классификатора при использовании гауссовского ядра в случае, когда наблюдения являются случайными векторами с так называемыми «существенно зависимыми» компонентами. Предлагается в качестве ковариационной матрицы гауссовского ядра использовать локальные выборочные оценки. Описываются процедуры построения этих оценок и коэффициентов размытости. Предлагаемые алгоритмы сравниваются по качеству классификации и быстрдействию с классификатором Розенблатта — Парзена, использующим выборочную оценку ковариационной матрицы гауссовского ядра.



Наши юбиляры

НИКОЛАЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ БОРИСЕВИЧ (К шестидесятилетию со дня рождения)



Исполнилось 60 лет со дня рождения президента Академии наук БССР, академика, Героя Социалистического труда, лауреата Ленинской и Государственной премий СССР Николая Александровича Борисевича.

Н. А. Борисевич родился в крестьянской семье в поселке Лучной Мост Березинского района Минской области. В годы Великой Отечественной войны он принимал активное участие во всенародной борьбе с немецко-фашистскими захватчиками: был подпольщиком, сражался в партизанском отряде, в рядах Советской Армии. Его боевые заслуги отмечены орденом Отечественной войны I степени, двумя орденами Красной Звезды, многими медалями.

По окончании в 1950 г. физико-математического факультета Белгосуниверситета имени В. И. Ленина Николай Александрович был принят в аспирантуру Государственного оптического института имени С. П. Вавилова. Уже в первых исследованиях, посвященных люминесценции паров сложных молекул и завершившихся успешной защитой кандидатской диссертации, Н. А. Борисевичем получены результаты, которые существенно углубили представления о

внутри- и межмолекулярных процессах преобразования энергии светового возбуждения.

В 1954 г. Н. А. Борисевич возвращается в Минск, становится одним из организаторов Института физики АН БССР и ведет педагогическую работу на физико-математическом факультете БГУ имени В. И. Ленина. Студенты второй половины 50-х годов помнят содержательные лекции Н. А. Борисевича по оптике и спектроскопии. Работая заместителем директора Института и руководителем лаборатории люминесценции паров сложных молекул, он способствовал постановке крупных, проблемных исследований, которые впоследствии привели к открытию генерации на парах сложных молекул.

Н. А. Борисевич — основатель нового направления научных исследований — спектроскопии свободных сложных молекул. Труды ученого изменили существующее представление о закономерностях люминесценции и свойствах возбужденных состояний сложных молекул. Им создана статистическая теория фотофизических процессов, открывшая новые пути описания энергетики и динамики внутри- и межмолекулярных взаимодействий.

Ученый нашел связь между температурной зависимостью коэффициента поглощения света и другими важными характеристиками люминесценции. Благодаря исследованиям Н. А. Борисевича и его учеников в спектроскопию вошли такие принципиально новые понятия, как частота инверсии, спектры селективной энергии, спектры эффективной энергии, температура возбужденных молекул; предложены оригинальные спектроскопические методики экспериментального определения этих величин. Н. А. Борисевичем решена проблема антистоксовой люминесценции, поставленная еще С. П. Вавиловым. Итоги этого этапа исследований отражены в докторской диссертации (1965) и оригинальной монографии «Возбужденные состояния сложных молекул в газовой фазе» (1967).

Н. А. Борисевичем выполнены фундаментальные исследования роли триплетных состояний в преобразовании поглощенной световой энергии сложными молекулами. Обна-

ужена и исследована термически активированная флуоресценция, предложено и изучено стимулирование этих процессов лазерным излучением, разработаны методы определения скоростей внутри- и межмолекулярного перераспределения колебательной энергии, установлен механизм донорно-акцепторного межмолекулярного переноса энергии в газовой фазе.

Первостепенное значение для спектроскопии, фотохимии и квантовой электроники имеет открытие Н. А. Борисевичем совместно с Б. С. Непорентом явление стабилизации-лабильзации электронно-возбужденных многоатомных молекул в газовом состоянии, которое в 1977 г. зарегистрировано в качестве открытия. Это позволило эффективно управлять устойчивостью электронных возбужденных состояний, исследовать процессы межмолекулярного обмена энергией. Оно широко используется при преобразовании световой и электрической энергии газозаполненными системами.

Крупный вклад внесен Н. А. Борисевичем в квантовую электронику и лазерную спектроскопию. Вместе с учениками им выполнены оригинальные исследования частотно-поляризационных и других характеристик газовых атомных лазеров. Н. А. Борисевичем успешно решена задача создания нового типа лазера со свободными сложными молекулами в качестве активной среды; учением разработаны теоретические методы анализа генерационной способности и характеристик генерации на свободных сложных молекулах, предложены критерии отбора органических веществ, перспективных для генерации. Экспериментально получены режимы генерации с очень короткими импульсами ($\tau \sim 10^{-10}$ с).

Значителен научный вклад Николая Александровича Борисевича в инфракрасную спектроскопию, связанный с выяснением природы колебательных полос сложных молекул в различных агрегатных состояниях, особенностей колебательной и вращательной релаксаций.

Н. А. Борисевичем решена также крупная проблема инфракрасной техники: на основе исследования особенностей рассеяния излучения двухкомпонентными дисперсионными системами созданы уникальные широкополосные, узкополосные и отрезающие дисперсионные и дисперсионно-интерференционные фильтры для широкой области инфракрасного спектра. В 1973 г. эта работа была удостоена Государственной премии СССР. Новый класс оптических фильтров широко используется в различных областях науки и техники, на их основе создается малогабаритная инфракрасная аппаратура.

Н. А. Борисевичем создана крупная научная школа. Высокая научная культура, личный пример ученого-коммуниста и неутомимого труженика, доброжелательность привлекают к нему научную молодежь.

Велики заслуги Н. А. Борисевича в научно-организационной и общественной деятельности. Большую и многогранную работу он ведет на посту президента Академии наук БССР. Его организаторский талант оказывает значительное влияние на развитие науки в Белоруссии, на ускорение научно-технического прогресса и внедрение достижений науки в народное хозяйство страны.

Н. А. Борисевич принимает активное участие в общественно-политической жизни страны. С 1969 г. Николай Александрович депутат Верховного Совета СССР, с 1971 г. — член ЦК КП Белоруссии. Академик Н. А. Борисевич является председателем Комитета по Государственным премиям БССР в области науки и техники и членом Комитета по Ленинским и Государственным премиям СССР. Н. А. Борисевич участвовал в работах девяти Генеральных конференций МАГАТЭ в качестве главы делегации БССР или его заместителя. Он член Совета по проблеме «Люминесценция» и Бюро Совета по спектроскопии АН СССР, главный редактор журнала «Доклады Академии наук БССР», член редколлегии других всесоюзных и международных журналов.

За заслуги в развитии науки и внедрении ее достижений в народное хозяйство Н. А. Борисевич удостоен высокого звания Героя Социалистического Труда, награжден тремя орденами Ленина, орденом Октябрьской Революции, Трудового Красного Знамени.

Коллектив преподавателей, сотрудников и студентов Белорусского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета имени В. И. Ленина, редакция журнала «Вестник БГУ имени В. И. Ленина» поздравляют Николая Александровича с шестидесятилетием и желают ему крепкого здоровья, новых творческих свершений в многогранной научной и общественной деятельности.

УКАЗАТЕЛЬ

статей, опубликованных в «Вестнике Белорусского университета»
Серия I (физика, математика и механика) в 1982 г.

ФИЗИКА

| | | |
|--|---|----|
| Астрейко А. П., Голенков В. В. Внутренний язык систем переработки дискретной информации, построенных на базе многопроцессорных графовых автоматов | 2 | 12 |
| Барышевский В. Г., Горчарук И. М. Параметрическая конверсия γ -квантов в молекулярных газах | 3 | 24 |
| Бобрович В. П., Григорьева В. И., Подгорная Л. М., Саржевский А. М. | | |
| Сенюк М. А., Сицко Г. Н., Снагощенко Л. П. Поляризационные спектры флуоресценции оксальных производных стиблена | 1 | 10 |
| Гьермо де Ля Круз, Толстик А. Л., Чалей А. В. Спектральные особенности коэффициента отражения обращенной волны в растворах красителей | 3 | 21 |
| Голенков В. В. Архитектура систем переработки дискретной информации, построенных на базе многопроцессорных графовых автоматов | 1 | 29 |
| Граков В. Е., Майга А. С. Физические процессы короткой вакуумной дуги в продольном магнитном поле | 3 | 7 |
| Гусаков В. В. Оптимизация согласования измерительного резонатора радиоспектрометра | 2 | 30 |
| Зенченко С. А. Лазер на алюмо-иттриевом гранате с неодимом с поляризованным выходом | 2 | 18 |
| Зорин В. П., Меркулова И. П., Сыкало А. И., Черенкевич С. Н. Биофизические аспекты взаимодействия онкоцитов и иммуноцитов | 2 | 9 |
| Коляда А. А. Умножение чисел разных знаков в ядерно-модулярном коде | 2 | 15 |
| Комаров Ф. Ф., Шпилевский Э. М., Гайдук П. И., Горбачевский Д. А. Характеристики $p-n$ -переходов, полученных при лазерном отжиге монолегированных слоев кремния | 2 | 27 |
| Коляда А. А. О нормированном ядре числа в системах остаточных классов и его вычислении | 3 | 12 |
| Красноголовый Б. Н. Синтез управляющих сигналов для электромагнитных разверток | 1 | 18 |
| Лазарчик А. Н. Оценка погрешности метода временной дискретизации в теории выбросов случайных процессов | 2 | 35 |
| Личко Г. П. Об уменьшении угловых дискретов восстановления диаграмм направленности антенн по измерениям в ближней зоне | 1 | 21 |
| Лукаков П. Ф., Лукашевич Т. А., Филиппов И. М., Шуша В. В. Области скопления дефектов и их параметры в кремнии, облученном электронами различных энергий | 1 | 24 |
| Макаров А. П. Теорема отсчетов для интегрального преобразования Рэлея | 1 | 3 |
| Николаева А. З., Буйко Л. Д., Шулаков В. А., Руденкова В. А. Исследование температурных полей полупроводниковых приборов методом голографической интерферометрии | 1 | 6 |
| Николаева А. З., Шулаков В. А., Голикова Н. А., Колесник И. И. Голографический метод температурных измерений полупроводниковых приборов и интегральных схем | 2 | 3 |
| Перковский Т. А. Отражение и пропускание света слоем холестерического жидкого кристалла при нормальном падении | 2 | 21 |
| Прокошин В. И., Шенелевич В. Г., Ярилович В. А. Исследование миниатюрных измерительных структур на основе пленок полуметаллов | 2 | 24 |
| Процко С. В., Ханох Б. Ю., Халалюк А. П. Лучевые свойства оптического отражателя в форме трехгранного угла ($\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/4$) | 3 | 3 |
| Прима А. М., Умрејко Д. С. Полуэмпирический метод расчета интенсивностей ИК полос поглощения по модели эффективных зарядов и электрические параметры углеводородов | 3 | 16 |
| Тихомиров В. В. Спектр излучения каналированных частиц при высоких энергиях | 2 | 6 |
| Тихомиров В. В. Влияние многократного рассеяния на процессы излучения и рождение пар в кристаллах при сверхвысоких энергиях | 3 | 27 |
| Ханох Б. Ю. Оптические свойства тетраэдрического зеркального отражателя с одной цилиндрической отражающей поверхностью | 1 | 13 |

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

| | | |
|--|---|----|
| Булгаков Н. Г. К теории второго метода Ляпунова для систем с дискретным временем | 1 | 45 |
| Булатов В. И. О слипании решений систем с отклоняющимся аргументом | 2 | 51 |
| Борзенков А. В., Габасов Р. Алгоритм решения одной специальной задачи на минимум | 2 | 42 |
| Ведерников С. В. Геометрия гиперраспределений | 3 | 38 |
| Гляков П. В. Алгоритм задачи о разбиении и его исследование на ЭВМ | 1 | 40 |

| | | |
|--|---|----|
| Данг Динь Тяу. Исследование сильной неустойчивости нулевого решения бесконечных систем дифференциальных уравнений с помощью обобщенных характеристических d -чисел | 1 | 48 |
| Дробушевич Г. А., Комаровский И. В. Об одной модели задачи совместной обработки файлов | 1 | 37 |
| Дробушевич Г. А., Гляков П. В., Комаровский И. В., Кожич П. П. К итогам Всесоюзной студенческой олимпиады по программированию | 3 | 49 |
| Ерофеенко В. Т., Шушкевич Г. Ч. Расчет задач электростатики для параболоида со сферическими сегментами | 3 | 45 |
| Калитин Б. С. К устойчивости существенно нелинейных систем | 1 | 33 |
| Кирлица В. П. Об одной задаче стохастического программирования с линейными решающими правилами | 1 | 35 |
| Комаров Г. В. Две контактные задачи для трансверсально-изотропного полупространства | 3 | 36 |
| Король И. А. Синтез в определенных системах машинного перевода как задача информационного поиска | 2 | 39 |
| Ковачев В. Х. Билинейные преобразования некоторых дифференциальных уравнений с рациональной правой частью | 2 | 45 |
| Льюлькин А. Е. К минимизации проверяющих тестов логических схем | 2 | 49 |
| Певзнер Л. В. Некоторые свойства графово-программных грамматик | 3 | 43 |
| Размыслович Г. П. Один метод проверки критерия управляемости | 2 | 36 |
| Размыслович Г. П. Полная управляемость систем с кусочно-постоянными матрицами | 3 | 33 |
| Феденя М. М. Об одном методе нахождения коэффициентов чувствительности кратного спектра линейных стационарных систем | 2 | 47 |
| Феденко Н. П., Хо Хак Ынг. О сходимости некоторых сверхквадратичных итерационных методов | 3 | 40 |

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

| | | |
|--|---|----|
| Абдулин А. З., Кульша А. М., Ломако В. М., Минько А. А. Получение прозрачных покрытий, ориентирующих жидкие кристаллы | 3 | 58 |
| Барышевский В. Г., Евдокимов В. А., Кононов Ю. Г., Кузьмин В. В., Лившиц М. Г. О влиянии оптического излучения на сверхтонкую структуру ионов $^{57}\text{Fe}^{3+}$ в антиферромагнетике FeVO_3 | 3 | 57 |
| Барышевский В. Г., Кутень С. А., Рапопорт В. И. Квадрупольный момент мюония и сверхтонкая структура уровней мюония в кристаллах | 1 | 64 |
| Бобков В. В. Об одном семействе методов численного решения жестких дифференциальных уравнений | 2 | 67 |
| Граков В. Е., Майга А. С. Влияние продольного магнитного поля на эрзию электродов в электрической вакуумной дуге | 1 | 54 |
| Граков В. Е., Майга А. С. Влияние продольного магнитного поля на спектр высокочастотных колебаний напряжения горения вакуумной дуги на кадмии | 2 | 56 |
| Гурачевский В. Л., Цыбулька А. Г. Простой точечный дисплей для спектрометрических экспериментов на линии с мини-ЭВМ | 1 | 52 |
| Данейко Н. Ф., Казак А. В., Лесников В. И., Сергеев А. В. Исследование эффективности метода мультипликативно-разностной обработки сигналов антенной решетки | 3 | 54 |
| Данилькевич М. И. Изменение электронной поляризуемости кислородных спиinelей при магнитном разбавлении | 3 | 62 |
| Демчук М. И., Вишневский В. Н., Михайлов В. П., Юмашев К. В. Устройство синхронизации электронно-оптической камеры «Агат» | 3 | 64 |
| <u>Изох В. В.</u> , Курило В. С., Телегин В. Д. Измерение волновой матрицы перехода | 1 | 53 |
| <u>Изох В. В.</u> , Курило В. С., Телегин В. Д. Исследование усилителей мощности на транзисторах КТ640 и КТ938 в двухполюсном включении | 2 | 54 |
| Исаченко А. Н. Об одном критерии для матриц | 2 | 59 |
| Калитин Б. С. Стабилизация без скольжения линейных систем с переменной структурой | 1 | 56 |
| Касим Мухамед Аль-Хайдер. Об изохронности гамильтоновых дифференциальных систем второго порядка с полиномами третьей степени | 2 | 63 |
| Касим Мухамед Аль-Хайдер. Об изохронности второго порядка двумерных аналитических дифференциальных систем | 3 | 66 |
| Кастрица О. А. Об экстремальных отклонениях решений при ограниченных возмущениях линейной системы | 1 | 58 |
| Корзун И. И. О некоторых одношаговых нелинейных устойчивых методах третьего порядка точности численного интегрирования дифференциальных уравнений | 1 | 57 |
| Мазаник С. А. Некоторые свойства E -систем | 2 | 65 |
| Петряев А. Н. Некоторые регуляризаторы в синтезе систем «антенна — обтекатель» | 2 | 68 |
| Петряев А. Е. О математических моделях в проектировании систем «антенна — обтекатель» | 1 | 65 |

| | | |
|---|---|----|
| Полевиков В. К. Алгоритм построения сетки при численном решении уравнений конвекции | 3 | 69 |
| Рогозин С. В. Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом в исключительном случае для полуплоскости | 2 | 60 |
| Самодуров А. А. Об интегрируемости дифференциального уравнения Абеля в параметрическом виде | 2 | 57 |
| Тагбино Т. О совместных дифференциальных системах | 2 | 62 |
| Титов А. Д. Законы преломления плоских неоднородных волн на системе плоскопараллельных границ раздела поглощающих сред | 3 | 60 |
| Хо Хак Ынг. Релаксационный метод хорд | 3 | 67 |
| Цеханский Г. Н. Влияние теплового режима работы фотоприемника на его чувствительность | 2 | 55 |
| Шишкин Н. Я., Жарский И. М., Гоголинский В. И., Зятков И. П. Структура и колебательные характеристики диоксидбромидов молибдена и вольфрама | 1 | 60 |
| Жизнь для науки (К 80-летию со дня рождения Антона Никифоровича Севченко) | 1 | 67 |

РЕЦЕНЗИИ

| | | |
|--|---|----|
| Исаченко А. Н. В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, М. К. Кравцов. Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников) | 1 | 70 |
|--|---|----|

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

| | | |
|--|---|----|
| Анатолий Иванович Комяк (К 50-летию со дня рождения) | 1 | 76 |
| Аннотации депонированных статей | 1 | 71 |
| Аннотации депонированных статей | 2 | 71 |
| Аннотации депонированных статей | 3 | 72 |

ПАМЯТИ ТОВАРИЩА

| | | |
|--|---|----|
| <u>Александр Михайлович Саржевский</u> | 3 | 71 |
|--|---|----|

УДК 535.31

Процко С. В., Ханох Б. Ю., Хапалюк А. П. Оптический отражатель в форме полого трехгранного угла ($\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/4$), имеющего малые деформации двухгранных углов, в автоколлимационной схеме.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1.

Анализируются особенности использования отражателя в автоколлимационной схеме для определения угловых отклонений относительно оптического луча. Установлены условия, при которых достигается наиболее эффективное использование исследуемого отражателя в качестве автоколлимационного датчика угловых отклонений.

Библ. 7 назв., ил. 1.

УДК 535.33

Прима А. М., Умрейко Д. С. Корреляция параметризаций методов расчета интенсивностей ИК полос по модели эффективных зарядов и по валентнооптической схеме.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1.

Полуэмпирический метод расчета интенсивностей инфракрасных полос поглощения по модели эффективных атомных зарядов дополнен на основе схемы молекулярных орбит в рамках приближенного метода $NDDO$. Получены аналитические выражения для производных дипольного момента молекул U_2V_6 симметрии D_{3d} по нормальным координатам на основе модели эффективных атомных зарядов, описан метод получения этих производных, найдена связь параметризации по валентнооптической теории с параметризацией по модели эффективных атомных зарядов для молекул данного типа.

Библ. 9 назв., ил. 1.

УДК 621.396.67.012.12

Терехович А. Б., Каплун В. А., Работягин В. А., Зеленкевич В. М. Использование машинных методов при разработке антенных обтекателей.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1.

Рассмотрены проблемы автоматизации проектирования и машинного моделирования излучающих систем «антенна — обтекатель». Исследованы основные элементы автоматизации проектирования и структурные схемы организации комплекса прикладных программ для машинного моделирования излучающих систем «антенна — обтекатель».

Библ. 10 назв., ил. 4.

УДК 539.16

Носиловская В. А. Одночастичная оценка ядерного матричного элемента электрического монополя ядра ^{197}Au в модели Саксона — Вудса.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1.

Произведена теоретическая одночастичная оценка ядерного матричного элемента электрического монополя ядра ^{197}Au для перехода $191 \text{ кэВ } (1/2^+ \rightarrow 1/2^+)$. Для описания среднего поля ядра был выбран потенциал Саксона — Вудса. Учитывались спин-орбитальное и кулоновское взаимодействия. Ядерный матричный элемент электрического монополя $\rho(EO)$ выражен аналитически через функции параболического цилиндра целого отрицательного порядка. Расчетные данные сравниваются с экспериментом.

Библ. 12 назв., табл. 1.

УДК 539.172.84

Левкович А. Д., Перцев А. Н., Тарасенко Н. П. Характеристики ^{239}Pu - ^9Be источника нейтронов типа «Сэндвич».— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1.

Методом протонов отдачи изучен ^{239}Pu - ^9Be источник нейтронов в геометрии «Сэндвич». Источник собран из промышленных α -источников и бериллиевых фольг. Определена максимальная энергия нейтронов (10,6 МэВ), выход нейтронов (1 нейтрон на $2,4 \cdot 10^4 \alpha$ -частиц), восстановлен энергетический спектр нейтронов с энергиями 3,1; 4; 5,4; 7,4; 8,4; 9,3 МэВ.

Библ. 11 назв., ил. 3.

УДК 541.49+546.65+547.47

Ховратович Н. Н., Пупликова О. И., Неокладнова Л. Н., Прокошина Н. А. К вопросу о взаимодействии РЗЭ с глицином.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1.

Содержится химический и спектроскопический анализ полученных комплексов редкоземельных элементов (РЗЭ) с глицином. Показано, что кислород карбоксильной груп-

ды глина способен образовывать при координации с металлом как ионные, так и ковалентные связи. Характер связи определяется металлом и составом комплекса.

Библ. 14 назв., табл. 1.

УДК 621.315.592

Ка м а р а М. С., Ко х а н Е. К., Лу к а ш е в и ч М. Г. Изменение магнитосопротивления арсенида галлия в электрическом поле.— Вести. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1.

Для двухзонной модели проводимости (примесная зона и зона проводимости) проведен расчет зависимости магниторезистивного эффекта от электрического поля. Предполагалось, что изменение магнитосопротивления вызывается уменьшением отрицательной компоненты из-за уменьшения концентрации магнитных центров и увеличением положительной вследствие появления неравновесных носителей в зоне проводимости. Проведено сравнение результатов расчета с экспериментальными данными.

Библ. 5 назв., ил. 1.

УДК 517.53

Та Х о н г Ку а н г, Ру с а к В. Н. Приближение функций рациональными операторами.— Вести. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1.

По заданной системе чисел с положительными мнимыми частями построены рациональные операторы в пространстве непрерывных функций на действительной оси. Найдены соотношения между уклонениями операторов от приближаемых функций и их наилучшими рациональными приближениями.

Библ. 2 назв.

УДК 519.768 : 17

К о р о л ь И. А., С о в п е л ь И. В. Автоматизированная система перевода ключевых слов (Сперкс-1). 1.— Вести. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 3.

Рассматривается автоматизированная система перевода ключевых слов (СПЕРКС-1), которая служит для перевода содержания определенных полей входных документов с одного естественного языка на многие. Дается постановка общей задачи, а также решается частная задача создания оптимальной информационной базы.

Библ. 3 назв.

УДК 517.926

На у м о в и ч Н. Ф. Вырожденные стационарные уравнения с законом площадей.— Вести. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1.

Исследуются системы, обладающие законом площадей, секторная скорость которых принимает одно и то же постоянное значение вдоль каждой траектории системы.

Библ. 2 назв.

УДК 517.512

И б р а г и м о в Э. Дж., Ра д ы н о Я. В. О приближении функций на сфере в метриках $L_{p,\lambda}(S)$ интегралами типа Джексона.— Вести. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1.

Изучается порядок сходимости обобщенных операторов Джексона для сферы. Результаты работы являются развитием результатов, ранее полученных в равномерной метрике.

Библ. 2 назв.

УДК 518 : 517(944)947

Ва ку л ь ч и к П. А. Исследование сходимости метода Ньютона решения нелинейных разностных уравнений, аппроксимирующих смешанную задачу для квазилинейной гиперболической системы.— Вести. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1.

Рассматриваются неявные разностные схемы для квазилинейных и нелинейных гиперболических систем, а также для системы уравнений газовой динамики и доказывалась сходимость метода Ньютона их реализации к решению исходной дифференциальной задачи.

Библ. 9 назв.

УДК 62—50

П и л и п ч у к Л. А. Алгоритм решения двухпродуктовой транспортной задачи с дополнительной матрицей ограничений прямым методом.— Вести. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1.

Строится алгоритм решения двухпродуктовой транспортной задачи с дополнительными ограничениями прямым методом.

Библ. 3 назв.

УДК 517.948.32

Х в о щ и н с к а я Л. А. Замкнутое решение одной краевой задачи.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1.

Рассматривается краевая задача $\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \lambda\Phi(-x)$, $0 < x < 1$. Решение получено в замкнутом виде и выражается через гипергеометрические функции.

Библ. 1 назв.

УДК 538.221

К о ж у х а р ь А. Ю., П о л о н е й ч и к И. И., Ж у к И. И. Магнитные спектры эпитаксиальных феррит-гранатовых структур.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1.

Методом магнитной спектроскопии в диапазоне частот 30—240 МГц исследованы эпитаксиальные феррит-гранатовые магнитные пленки двух составов. Из полученных спектров найден коэффициент затухания, дана попытка интерпретации результатов, полученных при возбуждении образцов на частотах, кратных частоте резонанса доменных границ.

Библ. 4 назв., ил. 1, табл. 1.

УДК 537.311.33 : 535.37

К а р н х Е. Д., У н г е р Ю. Ч. Поперечная диффузия неравновесных носителей заряда в гетеролазерных с полосковым контактом.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1.

Рассмотрена диффузия инжектируемых носителей в активном слое полоскового гетеролазера перпендикулярно к оси резонатора и направлению тока инжекции. Принят во внимание фотонный перенос неравновесных носителей заряда (ННЗ) за счет поглощения собственного рекомбинационного излучения. Приведены результаты численного расчета на ЭВМ профиля концентрации ННЗ в активной области для лазеров с изоляцией протоном бомбардировкой и без нее с учетом растекания тока в пассивных слоях, прилегающих к полосковому контакту.

Библ. 6 назв., ил. 1.

УДК 681.2.082/083 + 535.24

Х о л о н д ы р е в С. В., Х о л о н д ы р е в а С. Г. Определение оптимального времени измерения в режиме счета фотонов.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1.

Получены выражения, позволяющие определить оптимальное распределение времени между измерениями в режиме счета фотонов темнового тока ФЭУ, фона, исследуемого источника излучения и т. п. для случая произвольной функции, по которой вычисляется с учетом измеренных значений некоторая спектрофотометрическая величина.

Библ. 5 назв.

УДК 537.312.8

П а в л о в В. И., Б ы ч к о в Г. Л., Б о г у ш А. К. Магнитосопротивление $\text{La}_{1-x}\text{Ca}_x\text{MnO}_3$ — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1.

Измерено магнитосопротивление поликристаллических образцов

$\text{La}_{1-x}\text{Ca}_x\text{Mn}_{1-x}^{3+}\text{Mn}_x^{4+}\text{O}_3$ ($x = 0 - 0,5$) в температурном интервале 100—400 К в магнитных полях до $7,2 \cdot 10^5$ А/м. Установлено, что на температурной зависимости магнитосопротивления образцов, содержащих 10—20 % ионов Mn^{4+} , имеется два максимума отрицательного магнитосопротивления в области температур 150 и 300 К, в то время как в образцах, содержащих 0—10 и 20—50 % Mn^{4+} , — один максимум при 300 К. Наличие двух максимумов объясняется тем, что в $\Phi_{\text{ом}}$ интервале основное ферромагнитное состояние обусловлено изотропным взаимодействием между ионами Mn^{3+} , а дополнительное ферромагнитное взаимодействие типа «двойного обмена» сосредоточено внутри ферромагнитных примесных кластеров, температура Кюри которых ~ 300 К.

Библ. 5 назв., ил. 2.

УДК 517.926.4

М а з а н и к С. А. О некоторых инвариантах линейных дифференциальных систем.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1.

Построено характеристическое множество матрицы, являющееся асимптотическим инвариантом линейных дифференциальных систем, а также указана полная система инвариантов для ортогональных преобразований Ляпунова, нормированных в нуле.

Библ. 4 назв.

УДК 519.1

Бусинок Н. Н. О числе 3-циклов в графах с данными степенями вершин.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1.

Доказывается теорема о том, что сумма циклов длины 3 в графе и дополнительном графе есть величина постоянная для всех графов из класса графов с заданными степенями вершин.

Библ. 1 назв.

УДК 517.926.45

Сурян Т. Л. Скалярные преобразования систем Лапко—Данилевского.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1.

Изучено влияние скалярных преобразований на показатели Ляпунова систем Лапко—Данилевского. Доказана теорема о том, что фундаментальная матрица решений преобразованной системы выражается через фундаментальную матрицу решений исходной системы и матрицу Ляпунова.

Библ. 3 назв.

УДК 517.926

Табачко Т. О линейных дифференциальных системах с частичной изометрией.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1.

Устанавливаются необходимые и достаточные условия наличия частичной изометрии для линейных дифференциальных систем двух уравнений.

Библ. 2 назв.

УДК 535.5 : 539.194

Буров Л. И., Гончаренко И. И. Эффекты наведенной гиротропии в растворах сложных молекул.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1.

В гармоническом приближении рассмотрены эффекты наведенной гиротропии в сложных молекулах с учетом колебательной структуры электронных состояний. Показано, что полученные результаты в принципе не отличаются от случая обобщенной двухуровневой модели, если в качестве момента перехода использовать определенным образом определенную эффективную величину.

Библ. 3 назв.

УДК 512.8

Шаромет А. А. Об абстрактных изоморфизмах разрешимых алгебраических групп.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1.

Доказано, что изоморфизм групп k -точек связанных разрешимых групп индуцируется изогениями, если его ограничение на унипотентную часть — бирациональное отображение, а в случае конечнопорожденного поля k такой изоморфизм индуцируется бирациональным изоморфизмом.

Библ. 5 назв.

