О ПРОИЗВОДНОЙ π-ДЛИНЕ КОНЕЧНОЙ π-РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

Д.В. Грицук, В.С. Монахов

Гомельский университет им. Ф. Скорины
Советская, 104, 246019 Гомель, Беларусь
{Dmitry.Gritsuk,Victor.Monakhov}@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и определения соответствуют [1].

Пусть G — π-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом, факторы которого являются либо π'-группами, либо абелевыми π-группами. Наименьшее число абелевых π-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется производной π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l^a_\pi(G)$. Ясно, что

$$l_\pi(G) \leqslant l^a_\pi(G) \leqslant l_\pi(G)d(G_\pi),$$

где $l_\pi(G)$ — π-длина π-разрешимой группы G, а $d(G_\pi)$ – производная длина ее π-холловой подгруппы G_π.

Каждая π-разрешимая группа будет π_1-разрешимой для любого непустого подмножества π_1 из π. Понятно, что $l^a_{\pi_1}(G) \leqslant l^a_\pi(G)$. Аналогичное неравенство $l_{\pi_1}(G) \leqslant l_\pi(G)$ нарушается. Простейшим примером служит симметрическая группа S_4 степени 4, у которой $l_2(S_4) = 2$, а $l_{\{2,3\}}(S_4) = 1$.

Доказана следующая

Теорема. *Если G — π-разрешимая группа и $\pi_1 \subset \pi$, то $l^a_\pi(G) \leqslant l^a_{\pi_1}(G) + l^a_{\pi\setminus\pi_1}(G)$.*

Для π-длины $l_\pi(G)$ аналогичное утверждение также справедливо [2, 1.7.15].

Следствие 1. *Если G — π-разрешимая группа, то $l^a_\pi(G) \leqslant \sum_{p\in\pi} l^a_p(G) \leqslant \sum_{p\in\pi} l_p(G)d(G_p)$.*

Следствие 2. *Если G — π-разрешимая группа и $l_p(G) \leqslant 1$ для всех $p \in \pi$, то $l^a_\pi(G) \leqslant \sum_{p\in\pi} d(G_p)$.*

Следствие 3. *Если G — π-разрешимая группа с абелевыми силовскими p-подгруппами для всех $p \in \pi$, то $l^a_\pi(G) \leqslant |\pi(G_\pi)|$.*

Литература

1. Монахов В. С. *Введение в теорию конечных групп и их классов.* Мн.: Вышэйшая школа, 2006.
2. Ballester-Bolinches A., Estaban-Romero R., Asaad M. *Products finite groups.* De Gruyter Expositions in Mathematics, 53. 2010.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛОКАЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ AFA-ГРУПП

О.Ю. Дашкова

Днепропетровский национальный университет, механико-математический факультет
Гагарина 72, 49010 Днепропетровск, Украина
odashkova@yandex.ru

Пусть A — векторное пространство над полем F. Подгруппы группы $GL(A)$ всех автоморфизмов пространства A называются линейными группами. Если A имеет конечную размерность над полем F, $GL(A)$ можно рассматривать как группу невырожденных $(n \times \times n)$-матриц, где $n = \dim_F A$. Конечномерные линейные группы играют важную роль в различных областях науки, и изучались достаточно много. В случае, когда пространство A

имеет бесконечную размерность над полем F, ситуация кардинально меняется. Бесконечномерные линейные группы исследовались мало. Изучение этого класса групп требует дополнительных ограничений. К таким ограничениям относятся различные условия конечности. Одним из условий конечности, которое достойно особого внимания, является финитарность линейной группы. Группа G называется финитарной, если для каждого ее элемента g подпространство $C_A(g)$ имеет конечную коразмерность в A (см., например [1, 2]). Финитарные линейные группы изучались многими алгебраистами, и в этом направлении был получен ряд интересных результатов [2].

В [3] авторы ввели в рассмотрение антифинитарные линейные группы. Пусть $G \leqslant GL(A)$, $A(wFG)$ — фундаментальный идеал группового кольца FG. Авторы полагают $\operatorname{aug}\dim_F(G) = \dim_F(A(wFG))$. Линейная группа G называется антифинитарной, если любая собственная подгруппа H группы G, для которой размерность $\operatorname{aug}\dim_F(H)$ бесконечна, конечно порождена. В [3] исследовались антифинитарные локально разрешимые линейные группы.

Если $G \leqslant GL(A)$, то A можно рассматривать как FG-модуль. Естественным обобщением этого случая является рассмотрение $\mathbf{R}G$-модуля A, где $\mathbf{R}$ — кольцо. Б.А.Ф. Верфриц ввел в рассмотрение артиново-финитарные группы автоморфизмов модуля M над кольцом $\mathbf{R}$ и нетерово-финитарные группы автоморфизмов модуля M над кольцом $\mathbf{R}$, являющиеся аналогами финитарных линейных групп [4–6]. Подгруппа $F_1\mathrm{Aut}_{\mathbf{R}}M$ группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}_{\mathbf{R}}M$ модуля M над кольцом $\mathbf{R}$ называется артиново-финитарной группой автоморфизмов, если $A(g-1)$ является артиновым $\mathbf{R}$-модулем для любого элемента $g \in F_1Aut_{\mathbf{R}}M$. Подгруппа $F\mathrm{Aut}_{\mathbf{R}}M$ группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}_{\mathbf{R}}M$ модуля M над кольцом $\mathbf{R}$ называется нетерово-финитарной группой автоморфизмов, если $A(g-1)$ является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем для любого элемента $g \in F\mathrm{Aut}_{\mathbf{R}}M$. Б.А.Ф. Верфриц исследовал связь между группами $F_1\mathrm{Aut}_{\mathbf{R}}M$ и $F\mathrm{Aut}_{\mathbf{R}}M$ [6].

При изучении модулей над групповыми кольцами с различными условиями конечности важную роль играет понятие коцентрализатора подгруппы H в модуле A, введенное в [7].

Определение. Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, где $\mathbf{R}$ — кольцо, G — группа. Если $H \leqslant G$, то фактор-модуль $A/C_A(H)$, рассматриваемый как $\mathbf{R}$-модуль, называется коцентрализатором подгруппы H в модуле A.

В настоящей работе рассматривается аналог антифинитарных линейных групп в теории модулей над групповыми кольцами. Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, где $\mathbf{R}$ — кольцо, G — группа. Будем говорить, что группа G является AFA-группой, если любая собственная подгруппа H группы G, коцентрализатор которой в модуле A не является артиновым $\mathbf{R}$-модулем, конечно порождена.

Пусть $AD(G)$ — множество всех элементов $x \in G$, таких, что коцентрализатор группы $\langle x \rangle$ в модуле A — артинов $\mathbf{R}$-модуль. Из определения $AD(G)$ вытекает, что $AD(G)$ является нормальной подгруппой группы G.

В работе изучаются локально разрешимые AFA-группы. Далее всюду рассматривается AFA–группа G, такая, что A — $\mathbb{Z}_{p^\infty}G$–модуль, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ — кольцо целых p-адических чисел, $C_G(A) = 1$.

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть G – локально разрешимая* AFA*-группа. Если коцентрализатор группы G в модуле A является артиновым $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-модулем, то группа G разрешима.*

Теорема 2. *Пусть G — локально разрешимая* AFA*-группа. Тогда группа G гиперабелева.*

Теорема 3. *Пусть G — конечно порожденная разрешимая* AFA*-группа. Если коцентрализатор группы G в модуле A не является артиновым $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-модулем, справедливы следующие утверждения:*

1) *коцентрализатор подгруппы $AD(G)$ в модуле A является артиновым $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-модулем;*

2) *группа G содержит нормальную нильпотентную подгруппу U, такую, что фактор-группа G/U полициклическая.*

Литература

1. Phillips R. E. *The structure of groups of finitary transformations* // J. Algebra. 1988. V. 119. № 2. P. 400–448.

2. Phillips R. E. *Finitary linear groups: a survey* // "Finite and locally finite groups". NATO ASI ser. C Math. Phys. Sci., Kluver Acad. Publ., Dordreht. 1995. V. 471. P. 111–146.

3. Kurdachenko L. A., Muñoz-Escolano J. M., Otal J. *Antifinitary linear groups* // Forum Math. 2008. V. 20. № 1. P. 27–44.

4. Wehrfritz B. A. F. *Artinian-finitary groups over commutative rings* // Illinois J. Math. 2003. V. 47. № 1–2. P. 551–565.

5. Wehrfritz B. A. F. *Artinian-finitary groups over commutative rings and non-commutative rings* // J. Lond. Math. Soc. (2). 2004. V. 70. № 2. P. 325–340.

6. Wehrfritz B. A. F. *Artinian-finitary groups are locally normal-finitary* // J. Algebra. 2005. V. 287. № 2. P. 417–431.

7. Курдаченко Л. А. *О группах с минимаксными классами сопряженных элементов* // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Акад. наук Украины, Киев. 1993. С. 160–177.

НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОДГРУПП КОНЕЧНОГО ИНДЕКСА ГРУПП БАУМСЛАГА — СОЛИТЕРА

Ф.А. Дудкин

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. ак. Коптюга 4, 630090 Новосибирск, Россия
DudkinF@ngs.ru

Группа называется *хопфовой*, если всякий ее гомоморфизм на себя имеет тривиальное ядро, т. е. является автоморфизмом. Далее будем считать, что p и q — взаимно простые целые числа (пишем $p \perp q$). Баумслаг и Солитер [1] впервые предложили серию примеров нехопфовых групп с двумя порождающими элементами и одним соотношением, они теперь обозначаются $BS(p,q) = \langle a, t \mid t^{-1}a^p t = a^q \rangle$. Эти группы оказались интересными и с других точек зрения: геометрические свойства, функции роста, функция Дэна и т. д.

Д. Маклаури [2], используя факты из алгебраической геометрии, описал все неприводимые представления группы $BS(p,q)$ над $\mathbb{C}$. Мы укажем все неприводимые представления произвольной подгруппы конечного индекса группы $BS(p,q)$ над $\mathbb{C}$. При этом мы используем только описание подгрупп конечного индекса групп Баумслага — Солитера, полученное ранее, и стандартные теоремы линейной алгебры и теории чисел.

Обозначим через H_m группу, заданную своим копредставлением

$$H_m \cong \left\langle a_1, a_2, \ldots, a_m, d \mid a_i^p = a_{i+1}^q, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1, \quad d^{-1}a_m^p d = a_1^q \right\rangle .$$

Заметим, что группа $BS(p,q)$ изоморфна H_1. В [3] доказано, что всякая подгруппа конечного индекса группы $BS(p,q)$ изоморфна некоторой группе H_m. При $\mu, c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $s \in \mathbb{N}$ положим

$$\mathbf{A_{m-i}} = \begin{pmatrix} \mu^{s^i} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu^{s^{i+m}} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \mu^{s^{i+(n-1)m}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & c_n \\ c_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & c_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

здесь $i = 0, 1, \ldots, m-1$.