О ЛОКАЛЬНОМ ЗАДАНИИ ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С K-$\mathfrak{F}$-СУБНОРМАЛЬНЫМИ СИЛОВСКИМИ ПОДГРУППАМИ

А.С. Вегера

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
Советская 104, 246019 Гомель, Беларусь, artem.vegera@gmail.com

В данной работе рассматриваются только конечные группы. Свойства вложения силовских подгрупп в группу позволяют во многих случаях установить структуру самой группы. Например, группа нильпотентна, если любая ее силовская подгруппа субнормальна в ней. В работе [1] было начато рассмотрение следующей проблемы.

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Что можно сказать о структуре группы G, если все ее силовские подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны в G?

В статьях [2–4] были продолжены исследования по данной проблеме. В 1978 г. О. Кегель [5] ввел понятие $\mathfrak{F}$-достижимой (или K-$\mathfrak{F}$-субнормальной) подгруппы в группе.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа H группы G называется K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_m = G$ такая, что либо подгруппа H_{i-1} субнормальна в H_i, либо $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$ для любого $i = 1, \ldots, m$.

Будем обозначать H K-$\mathfrak{F}$-sn G в случае, когда H является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Класс групп $\widehat{\mathrm{w}}\mathfrak{F}$ определяется следующим образом: $\widehat{\mathrm{w}}\mathfrak{F} = (G \mid$ для любой $H \in \mathrm{Syl}(G)$ подгруппа H K-$\mathfrak{F}$-sn $G)$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если она является насыщенным классом, т.е. если $G/N \in \mathfrak{F}$, $N \trianglelefteq G$, $N \leqslant \Phi(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация и h — ее максимальный внутренний локальный экран. Обозначим через h^* локальный экран такой, что $h^*(p) = (G \in \mathfrak{S} \mid$ любая силовская подгруппа из G принадлежит $h(p))$.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная разрешимая формация, h — ее максимальный внутренний локальный экран, $\pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$. Тогда $\widehat{\mathrm{w}}\mathfrak{F} = LF(h^*)$ и h^* — максимальный внутренний локальный экран формации $\widehat{\mathrm{w}}\mathfrak{F}$.*

Литература

1. Васильев А. Ф. *О влиянии примарных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп на строение группы* // Вопросы алгебры. 1995. Вып. 8. С. 31–39.

2. Прокопенко А. И. *О конечных группах с $\mathfrak{F}$-достижимыми силовскими подгруппами* // Известия Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2004. № 6 (27). С. 101–103.

3. Васильева Т.И., Прокопенко А. И. *Конечные группы с формационно субнормальными подгруппами* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2006. № 3. С. 25–30.

4. Васильев А. Ф., Васильева Т. И. *О конечных группах с обощенно субнормальными силовскими подгруппами* // Проблемы физики, математики и техники. 2011. № 4 (9). С. 86–91.

5. Kegel O. H. *Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten* // Arch. Math. 1978. Vol. 30, № 3. P. 225–228.

О ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В.Ф. Велесницкий, В.Н. Семенчук

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, математический факультет
Кирова 119, 246019 Гомель, Беларусь, velogos@rambler.ru

Согласно классическому результату Виландта [1], в любой конечной группе порождение субнормальных подгрупп является субнормальной подгруппой.

В теории классов групп естественным обобщением субнормальности является понятие обобщенной субнормальности.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Напомним, что подгруппу H называют $\mathfrak{F}$-достижимой (обобщенно субнормальной), если существует цепь подгрупп $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_m = H$ такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

В 1978 году Кегель [2] и Л.А. Шеметков [3] поставили задачу о нахождении новых классов конечных групп, обладающих тем свойством, что в любой конечной группе порождение обобщенно субнормальных подгрупп есть обобщенно субнормальная подгруппа.

В настоящее время данная задача полностью решена в классе наследственных насыщенных формаций. В классе разрешимых групп ее решение получили Баллестер-Болинше, Дерк и Перец-Рамош в работе [4] и в произвольном случае А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук [5].

Если условия порождения $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп заменить более слабым условием — произведением перестановочных $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп, то задачу Кегеля-Шеметкова можно сформулировать следующим образом: найти новые классы групп, обладающих тем свойством, что в любой конечной группе произведение перестановочных обобщенно субнормальных подгрупп является обобщенно субнормальной подгруппой.

Нами показано, что таким свойством, в частности, обладают классы всех p-разложимых, p-нильпотентных, p-замкнутых групп. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная сверхрадикальная формация. Тогда для любой группы G и для любых ее перестановочных $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп H и K подгруппа HK $\mathfrak{F}$-достижима в G.*

Литература

1. Wielandt H. *Uber den Normalisator der subnormalen Untergruppen* // Math. Z. 1958. Vol. 69, № 8. P. 463–465.

2. Kegel O. H. *Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die Subnormalteilerverband echt enthalten* // Arch. Math. 1978. Vol. 30, № 3. P. 225–228.

3. Шеметков Л. А. *Формации конечных групп.* М.: Наука, 1978.

4. Ballester-Bolinches A., Doerk K., Perez-Ramos M. D. *On the lattice of $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups* // J. Algebra. 1992. Vol. 148, № 2. P. 42–52

5. Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н. *О решетках подгрупп конечных групп* // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы / Ин-т математики Акад. Украины; редкол.: Н.С. Черников [и др.]. Киев, 1993. С. 27–54.

О ПРОБЛЕМЕ ОПИСАНИЯ НАИМЕНЬШЕГО ЭЛЕМЕНТА СЕКЦИИ ЛОКЕТТА ФИТТИНГОВА ФУНКТОРА

Е.А. Витько, Н.Т. Воробьев

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова
Московский пр-т 33, 210038 Витебск, Беларусь
{alenkavit,vorobyovnt}@tut.by

В определениях и обозначениях мы следуем [1]. Рассматриваемые в работе группы конечны.

Фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор мы называем пронормальным, если каждая подгруппа $X \in f(G)$ является пронормальной в группе $G \in \mathfrak{X}$.