Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет

Н.И. Ильинкова, О.А.Кононова, Н.К.Филиппова

Интегрирование функций комплексной переменной

Минск
2012

УДК 517.53/.55(075.8)

Решение о депонировании документа вынес
Совет физического факультета, № 3 от 01.11.2012

Авторы:
Н. И. Ильинкова, О. А. Кононова,, Н. К. Филиппова

Рецензенты:
Белявский С. С., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики и экономической кибернетики БГЭУ,
Альсевич Л. А., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики ФПМИ БГУ

Ильинкова Н. И. Интегрирование функций комплексной переменной [Электронный ресурс] : учеб.-метод. пособие / Н. И. Ильинкова, О. А. Кононова, Н. К. Филиппова. – Электрон. текстовые дан. – Минск : БГУ, 2012.

Настоящее учебно-методическое пособие составлено на материале занятий по курсу математического анализа, изучаемого в третьем семестре на физическом факультете университета. В нем излагаются необходимые теоретические сведения из раздела «Интегрирование функций комплексной переменной» в виде определений, формул, теорем и замечаний. Приводится значительное количество наиболее характерных примеров с подробным описанием их решения.

Для организации самостоятельной работы студентов физических и радиофизических специальностей.

Предлагаемое методическое пособие составлено на материале занятий по курсу математического анализа, изучаемого в третьем семестре на физическом факультете Белгосуниверситета. Оно включает некоторые необходимые сведения из теории функций комплексной переменной, методические указания к решению задач. Основное содержание составляют примеры с подробными решениями, которые могут служить основой для самостоятельного освоения студентами раздела "Интегрирование функций комплексной переменной".

1. Некоторые сведения из теории интегрирования функций комплексной переменной

1.1. Основные определения.

Пусть C − кусочно-гладкая кривая в плоскости комплексной переменной $z = x + iy$, а однозначная функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ − непрерывна в точках кривой C. Разобьем кривую C на дуги точками в порядке их следования по кривой: $z_0 = a, z_1, ..., z_n = b$, где a, b − начальная и конечная точки кривой. Составим сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}),$$

где ξ_k − произвольно выбранная точка частичной дуги с номером k.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\delta \to 0} \sigma_n$, где $\delta = \max\limits_{\overline{k=1, n}} |z_k - z_{k-1}|$, и он не зависит от способа разбиения кривой на дуги и выбора точек ξ_k, то его называют интегралом от функции $f(z)$ по кривой C:

$$\lim_{\delta \to 0} \sigma_n = \int_C f(z)dz.$$

Вычисление $\int\limits_C f(z)dz$ сводится к вычислению криволинейных интегралов второго рода от действительных функций $u(x, y),\ v(x, y)$:

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u(x, y)dx - v(x, y)dy) + i\int_C (u(x, y)dy + v(x, y)dx). \qquad (1)$$

Если кривая C задана параметрически уравнением $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, а $a = z(\alpha),\ b = z(\beta)$ − начальная и конечная точки кривой, то

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta (u + iv)(x'(t) + iy'(t))dt = \int_\alpha^\beta f(z(t)) \cdot z'(t)dt. \qquad (2)$$

1.2. Свойства интегралов.

Свойства интегралов от функций комплексной переменной непосредственно вытекают из свойств криволинейных интегралов.

1^0. $\int\limits_{C^+} f(z)dz = -\int\limits_{C^-} f(z)dz$, то есть при изменении ориентации кривой интеграл меняет знак.

2^0. $\int\limits_{C} (af(z) + bg(z))dz = a\int\limits_{C} f(z)dz + b\int\limits_{C} g(z)dz$ − линейность интеграла для любых комплексных чисел a, b.

3^0. $\int\limits_{C} f(z)dz = \int\limits_{C_1} f(z)dz + \int\limits_{C_2} f(z)dz + \dots \int\limits_{Cn} f(z)dz$, если путь интегрирования C описывается движущейся точкой, проходящей последовательно его части $C_1,\ C_{2,}\ \dots, C_n$.

4^0. Если вдоль линии C имеет место неравенство $|f(z)| \le M$, то, обозначая длину кривой через l, имеем оценку интеграла: $\left|\int\limits_{C} f(z)dz\right| \le Ml$.

1.3. Теорема Коши для односвязной области.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D. Тогда интеграл от $f(z)$ по любому замкнутому контуру γ, целиком лежащему в D, равен нулю:

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 0. \tag{3}$$

Следствие. Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D. Тогда интеграл от $f(z)$ не зависит от пути интегрирования. Если кривые $\gamma_1,\ \gamma_2$, лежащие в D, имеют общие начало и конец, то

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz.$$

В этом случае интеграл от функции $f(z)$ по любой кусочно-гладкой кривой, лежащей в D, и соединяющей точки z_1 и z_2, вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \Phi(z)\Big|_{z_1}^{z_2}, \tag{4}$$

где $\Phi(z)$ − любая первообразная $f(z)$.

Справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)g'(z)dz = f(z)g(z)\Big|_{z_1}^{z_2} - \int\limits_{z_1}^{z_2} f'(z)g(z)dz. \tag{5}$$

1.4. Теорема Коши для многосвязной области.

Пусть граница Г многосвязной области D состоит из замкнутой кусочно гладкой кривой γ_0 и попарно не пересекающихся замкнутых кусочно гладких кривых $\gamma_1, \gamma_2, .., \gamma_n$, расположенных внутри γ_0, и пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна вплоть до ее границы. Тогда

$$\oint_{\gamma_0} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)dz = 0.$$

При этом все кривые ориентированы так, что при обходе каждой из этих кривых область D остается слева.

1.5. Интегральная формула Коши.

С помощью интегральной формулы Коши значение аналитической функции внутри области выражается через ее значения на границе этой области.

Теорема 1. . Пусть $f(z)$ аналитична в односвязной области D, а γ − простая замкнутая кривая, лежащая в D. Тогда для любой точки z, лежащей внутри γ, справедлива формула:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(t)dt}{t - z}. \tag{6}$$

Замечание. На практике при вычислении интегралов формулу (6) удобно использовать в виде

$$\oint_{\gamma} \frac{f(t)dt}{t - z} = \begin{cases} 2\pi i f(z), & z \in D_\gamma \\ 0, & z \notin \overline{D_\gamma} \end{cases}. \tag{7}$$

Теорема 2. Пусть $f(z)$ аналитична в области D. Тогда в любой точке $z \in D$ $f(z)$ имеет производные любого порядка:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(t)dt}{(t - z)^{n+1}}, \quad n = 1,2,3... \tag{8}$$

где γ − любой замкнутый контур в D, а $z \in D_\gamma$.

Замечание. При вычислении интегралов формулу (8) используют в случае кратных корней :

$$\oint_{\gamma} \frac{f(t)dt}{(t - z)^{n+1}} = \begin{cases} \dfrac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z), & z \in D_\gamma \\ 0, & z \notin \overline{D_\gamma} \end{cases}. \tag{9}$$

1.6. Однозначные ветви многозначной функции.

Пусть $F(z)$ − функция, заданная в области D и принимающая в каждой точке D одно или несколько (возможно и бесконечно много) значений. Если $f(z)$ − однозначная функция в D, значение которой в каждой точке D совпадают с одним из значений $F(z)$ в той же точке, то

$f(z)$ называют *однозначной ветвью* многозначной функции $F(z)$ в D. Если $f(z)$ − аналитическая функция в D, то ее называют однозначной аналитической ветвью $F(z)$ в D.

Точка, при однократном обходе которой по замкнутому контуру одна ветвь многозначной функции переходит в другую, называется *точкой ветвления* многозначной функции. В окрестности такой точки отдельные ветви многозначной функции уже нельзя рассматривать как различные однозначные функции. Для n-значных функций точки ветвления называются *алгебраическими,* для бесконечнозначных – *логарифмическими.*

Для n-значной функции $w=\sqrt[n]{z}$ точками ветвления являются $z=0$ и $z=\infty$. В односвязной области D, не содержащей эти точки, можно выделить n однозначных ветвей функции: $\left(\sqrt[n]{z}\right)\Big|_k=\sqrt[n]{|z|}\cdot e^{i\frac{\arg z+2\pi k}{n}}$, $k=\overline{0,n-1}$, $-\pi<\arg z\le\pi$. Пример такой области − вся плоскость z с разрезом от 0 до ∞.

Для бесконечнозначной функции Lnz точки ветвления те же: $z=0$ и $z=\infty$. В описанной выше области D также можно выделить однозначные аналитические ветви функции, различающиеся значениями аргумента:

$$\left(\ln z\right)\Big|_k=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k),\ \mathbf{k}=0,\ \pm\mathbf{1},\ \pm 2,\ \mathbf{...}\ .$$

При $k=0$ имеем так называемое главное значение логарифмической функции $\ln z=\ln|z|+i\arg z.$

При интегрировании по кривой необходимо выделить конкретную однозначную ветвь многозначной функции. На практике обычно задают значение многозначной функции в некоторой точке кривой интегрирования. Если кривая замкнута, то начальной точкой пути интегрирования считается та точка, в которой задано значение подынтегральной функции.

2. Примеры вычисления интегралов.

Вычислить следующие интегралы.

1. $\int\limits_C zdz$, C − кривая, соединяющая точку a с точкой b.

Решение. Вычислим интеграл по определению. Разобьем кривую точками $z_0=a, z_1,...,z_n=b$ на дуги, $\delta=\underline{\max}_{k=1,n}|z_k-z_{k-1}|$. После чего:

а) выберем $\xi_k=z_{k-1}$, $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}z_{k-1}\left(z_k-z_{k-1}\right)$;

б) выберем $\xi_k = z_k$, $\widetilde{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k\left(z_k - z_{k-1}\right)$;

$$\int\limits_C z dz = \frac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\left(S_n + \widetilde{S}_n\right) = \frac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(z_k^2 - z_{k-1}^2\right) = b^2 - a^2 .$$

2. $\int\limits_C |z| dz$, C − радиус-вектор точки $z = 2 - i$.

Решение. Параметрическое уравнение кривой C: $z(x) = x - i\,x/2$, $x \notin [0, 2]$.

Тогда

$$\int\limits_C |z| dz = \int\limits_0^2 \frac{\sqrt{5}}{2} x\left(1 - \frac{i}{2}\right)dx = \frac{\sqrt{5}}{2}(2 - i).$$

3. $\int\limits_C z \operatorname{Re}(\sin z) dz$, C − прямая, соединяющая точки $z = \pi/2$ и $z = \pi/2 + i$.

Решение. Параметрическое уравнение кривой C: $z = \pi/2 + iy$, $y \in [0, 1]$. $\operatorname{Re}(\sin z) = \operatorname{Re}\left(\sin\left(\pi/2 + iy\right)\right) = chy$. Тогда

$$\int\limits_C z \operatorname{Re}(\sin z) dz = \int\limits_0^1 \left(\pi/2 + iy\right) chy \cdot i dy = \left(\pi i/2 - 1\right) sh1 + ch1 - 1 .$$

4. $\int\limits_C z^{-2} |z| dz$, C − дуга окружности $|z| = 2$, $\operatorname{Re} z \ge 0$.

Решение. На окружности $z = 2e^{i\varphi}$, $\varphi \in \left[-\pi/2,\ \pi/2\right]$. Тогда

$$\int\limits_C z^{-2} |z| dz = 16i \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-i\varphi} d\varphi = 32i .$$

5. $\int\limits_C \frac{z}{\overline{z}} dz$, C − граница области $1 < |z| < 2$, $\operatorname{Im} z > 0$ проходится в положительном направлении.

Решение. Разобьем границу области на части.

C_1: $|z| = 2$, $\operatorname{Im} z > 0$. На окружности $z = 2e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0,\ \pi]$.

C_2: $z = x$, $x \in [-2,\ -1]$.

C_3: $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z > 0$. На окружности $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [\pi,\ 0]$.

C_4: $z = x$, $x \in [1,\ 2]$.

$$\int\limits_C \frac{z}{\overline{z}} dz = \sum_{k=1}^{4} \int\limits_{C_k} \frac{z}{\overline{z}} dz = i\int\limits_0^{\pi} e^{3i\varphi} d\varphi + 2 = \frac{4}{3} .$$

6. $\int\limits_C \operatorname{Re}\left(z+z^2\right)dz$, C − дуга параболы $y=2x^2$, $x\in[0,\ 1]$.

Решение. Параметрическое представление кривой C:
$z=x+i2x^2$, $x\in[0,\ 1]$.

$$\int\limits_C \operatorname{Re}\left(z+z^2\right)dz=\int\limits_0^1\left(x+x^2-4x^4\right)(1+i4x)dx=\frac{1-i}{30}.$$

7. $\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$, где: а) C − верхняя половина окружности $|z|=\rho$ $(\operatorname{Im}z>0)$, выбирается та ветвь функции $\sqrt{z}$, для которой $\sqrt{1}=1$; б) C − правая половина окружности $[z]=1$ $(\operatorname{Re}z\ge 0)$, выбирается та ветвь функции $\sqrt{z}$, для которой $\sqrt{-i}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$.

Решение.

а) *Первый способ.* Полагаем $z=e^{i\varphi}$, $\varphi\in[0,\ 2\pi]$. Из условия $\sqrt{1}=1$ следует, что $\sqrt{e^{i\varphi}}=e^{i\varphi/2}$. Тогда

$$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}}=\int\limits_0^\pi \frac{ie^{i\varphi}}{e^{i\varphi/2}}d\varphi=i\int\limits_0^\pi e^{i\varphi/2}d\varphi=2(i-1).$$

Второй способ. Согласно формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}}=\int\limits_1^{-1}\frac{dz}{\sqrt{z}}=2\left(\sqrt{-1}-\sqrt{1}\right)=2(i-1).$$

б) $z=e^{i\varphi}$, $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$. Из условия $\sqrt{-i}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ заключаем:
$\sqrt{e^{i\varphi}}=e^{i(\varphi/2+\pi)}=-e^{i\varphi/2}$. Тогда

$$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}}=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{ie^{i\varphi}}{-e^{i\varphi/2}}d\varphi=-i\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{i\varphi/2}d\varphi=-2\left(e^{i\pi/4}-e^{-i\pi/4}\right)=-2\sqrt{2}i.$$

8. $\int\limits_{\pi/2}^{i}\frac{1-ctgz}{\sin^2 z}dz$.

Решение.

$$\int\limits_{\pi/2}^{i}\frac{1-ctgz}{\sin^2 z}dz=\left(ctgz+\frac{ctg^2 z}{2}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{i}=icth1-\frac{cth^2 1}{2}.$$

9. $J=\int\limits_0^i(2z+3i)\cos^2 zdz$.

Решение.

$$J=\int_0^i (2z+3i)\cos^2 z dz=\frac{1}{2}\int_0^i (2z+3i)dz+\frac{1}{2}\int_0^i (2z+3i)\cos 2z dz.$$

При вычислении интегралов используем формулу Ньютона-Лейбница и формулу интегрирования по частям. В результате имеем:

$$J=\left(\frac{z^2}{2}+\frac{3iz}{2}\right)\Bigg|_0^i+\frac{1}{2}\left(z+\frac{3i}{2}\right)\sin 2z\Bigg|_0^i-\frac{1}{2}\int_0^i \sin 2z dz=\frac{ch2-5sh2-9}{4}.$$

10. $J_n=\int\limits_{C_R}(z-a)^n dz$, $C_R: |z-a|=R,\ n$ − целое число.

Решение. На окружности C_R $z=a+R\cdot e^{i\varphi},\ \varphi\in[0,\ 2\pi]$.

$J_n=\int\limits_0^{2\pi} R^n\cdot e^{in\varphi}\cdot Rie^{i\varphi}d\varphi=R^{n+1}\cdot i\int\limits_0^{2\pi} e^{i\varphi(n+1)}d\varphi.$ При $n=-1$ $J_{-1}=i\int\limits_0^{2\pi} d\varphi=2\pi i$. При $n\neq-1$ $J_n=\frac{R^{n+1}}{n+1}e^{i\varphi(n+1)}\Big|_0^{2\pi}=0$. Таким образом,

$$J_n=\begin{cases}2\pi i, & n=-1\\ 0, & n\neq-1\end{cases}.$$

11. $\int\limits_C \ln z dz$, C − окружность $|z|=1$, начальная точка интегрирования $z=-1$, $\ln z=\ln|z|+i\arg z$ − главное значение функции Lnz.

Решение.

На окружности $z=e^{i\varphi}$ $\ln z=i\varphi$. Поэтому $\int\limits_C \ln z dz=\int\limits_{-\pi}^{\pi} i\varphi\cdot ie^{i\varphi}d\varphi=-2\pi i$.

12. $\int\limits_C \mathrm{Re}(\cos z)\cdot\sin z dz$, C: $\mathrm{Im}\, z=\mathrm{Re}\, z,\ 0\le \mathrm{Re}\, z\le 1$.

Решение. На указанной прямой C $z=x(1+i),\ x\in[0,\ 1]$. Тогда $\mathrm{Re}(\cos z)=\mathrm{Re}(\cos(1+i)x)=\cos x\cdot chx,\ \ \sin z=\sin((1+i)x)=\sin x\cdot chx+i\cos x\cdot shx$ $dz=(1+i)dx,\ x\in[0,\ 1]$. В результате

$$\int\limits_C \mathrm{Re}(\cos z)\cdot\sin z dz=(1+i)\cdot\int_0^1 \cos x\cdot chx(\sin x\cdot chx+i\cos x\cdot shx)dx=$$

$$=\frac{1+i}{4}\int_0^1 \sin 2x(1+ch2x)dx+\frac{i-1}{4}\int_0^1 sh2x(1+\cos 2x)dx=\frac{1+i}{4}\int_0^1 \sin 2x dx+\frac{i-1}{4}\int_0^1 sh2x dx+$$

$$+\frac{1+i}{4}\int_0^1 \sin(2(1+i)x)dx=\frac{i-1}{8}ch2-\frac{1+i}{8}\cos 2-\frac{1}{8}\cos 2(1+i)+\frac{3}{8}.$$

Далее вычисление интегралов проводить с помощью интегральной формулы Коши (все замкнутые кривые обходятся в положительном направлении).

13. $\int\limits_C \frac{e^{iz}dz}{z^2+5z-6}$, $C: |z+i|=3$.

Решение.Внутри окружности $|z+i|=3$ знаменатель дроби обращается в нуль только в одной точке $z_0=1$. Чтобы применить для вычисления интеграла формулу (7), преобразуем интеграл следующим образом:

$\int\limits_C \frac{e^{iz}dz}{z^2+5z-6} = \int\limits_C \frac{e^{iz}dz}{(z-1)(z+6)} = \int\limits_C \frac{e^{iz}/(z+6)}{(z-1)}dz$. Функция $\frac{e^{iz}}{z+6}$ аналитична в области, ограниченной контуром C, поэтому, согласно формуле (7), имеем:

$$\int\limits_C \frac{e^{iz}dz}{z^2+5z-6} = 2\pi i\left(\frac{e^{iz}}{z+6}\right)\Bigg|_{z=1} = -\frac{2\pi}{7}\sin 1 + i\frac{2\pi}{7}\cos 1.$$

14. $\int\limits_C \frac{ctg(z+i)dz}{z^2+1}$, $C: |z-i|=1$.

Решение. Рассмотрим подынтегральную функцию $f(z)=\frac{ctg(z+i)}{z^2+1}=$ $=\frac{\cos(z+i)}{\sin(z+i)(z-i)(z+i)}$. Внутри контура $|z-i|=1$ $\sin(z+i)\neq 0,\ z+i\neq 0$. С учетом последнего приводим интеграл к виду:

$$\int\limits_C \frac{ctg(z+i)dz}{z^2+1} = \int\limits_C \frac{ctg(z+i)/(z+i)}{z-i}dz = 2\pi i\left(\frac{ctg(z+i)}{z+i}\right)\Bigg|_{z=i} = \frac{2\pi i\cdot ctg2i}{2i} = -\pi i\cdot cth2$$

.

15. $\int\limits_C \frac{e^{1/(z+2)}dz}{z^3-z^2+4z-4}$, $C: |z-2i|=1$.

Решение. Преобразуем интеграл:

$$\int\limits_C \frac{e^{1/(z+2)}dz}{z^3-z^2+4z-4}=\int\limits_C \frac{e^{1/(z+2)}dz}{(z-1)(z^2+4)}=\int\limits_C \frac{e^{1/(z+2)}dz}{(z-1)(z-2i)(z+2i)}$$. Внутри контура интегрирования находится только точка $z=2i$, а функция $\frac{e^{1/(z+2)}}{(z-1)(z+2i)}$ – аналитична. Применим формулу (7):

$$\int\limits_C \frac{e^{1/(z+2)}dz}{z^3-z^2+4z-4}=2\pi i\left.\left(\frac{e^{1/(z+2)}}{(z^2+4)}\right)\right|_{z=1}=\frac{2\pi i}{5}\sqrt[3]{e}\,.$$

16. $\int\limits_C \frac{\cos(z-\pi i)dz}{(z-2)(e^z+3)},\ \ C:\ |z|=1$.

Решение. Знаменатель дроби обращается в нуль в точках $z=2,\ z_k=\ln 3+i\pi(2k+1),\ k=0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$. Подынтегральная функция аналитична в замкнутой области $|z|\le 1$ и, согласно формуле (7), имеем:

$$\int\limits_C \frac{\cos(z-\pi i)dz}{(z-2)(e^z+3)}=0\,.$$

17. $\int\limits_C \frac{ch(z-i)dz}{z^2-3z+2},\ \ C:\ |z|=3$.

Решение. В области $|z|<3$ знаменатель дроби имеет два корня: $z=1,\ z=2$. Поэтому применять формулу (7) непосредственно нельзя.

Первый способ.

Разложим дробь $\frac{1}{z^2-3z+2}$ на простейшие:

$$\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=$$

$$=\frac{1}{(z-2)}-\frac{1}{(z-1)}$$. Вычисляемый интеграл разобьем на два интеграла и к каждому из них применим формулу (7):

$$\int\limits_C \frac{ch(z-i)dz}{z^2-3z+2}=\int\limits_C \frac{ch(z-i)dz}{z-2}-\int\limits_C \frac{ch(z-i)dz}{z-1}=2\pi i\left(ch(z-i)\big|_{z=2}-ch(z-i)\big|_{z=1}\right)=$$

$$=2\pi i\left(ch(2-i)-ch(1-i)\right).$$

Второй способ.

Проведем окружности $\gamma_1,\ \gamma_2$ (с центрами в точках $z=1$ и $z=2$ соответственно) достаточно малых радиусов, таких, чтобы эти окружности не пересекались и целиком лежали в области $|z|<3$. В образованной трехсвязной области, ограниченной контуром $|z|=3$ извне и контурами γ_1, γ_2 изнутри, подынтегральная функция $\dfrac{ch(z-i)}{z^2-3z+2}$ аналитична и, согласно теореме Коши для многосвязной области, имеем:

$$\int_C \frac{ch(z-i)dz}{z^2-3z+2} = \int_{\gamma 1} \frac{ch(z-i)\big/(z-2)\,dz}{z-1} + \int_{\gamma 2} \frac{ch(z-i)\big/(z-1)\,dz}{z-2} = 2\pi i \left.\frac{ch(z-i)}{z-2}\right|_{z=1} +$$

$$+ 2\pi i \left.\frac{ch(z-i)}{z-1}\right|_{z=2} = 2\pi i\big(ch(2-i) - ch(1-i)\big).$$

18. $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{ze^z dz}{z^3+4z^2+z+4} = \int_{|z|=2} \frac{ze^z dz}{(z-i)(z+i)(z+4)}$, внутри окружности $|z|=2$ лежат точки $z=\pm i$.

Решение. Аналогично способу, рассмотренному в примере 17, проведем непересекающиеся окружности γ_1, γ_2 с центрами в точках $z=i$ и $z=-i$ столь малых радиусов, чтобы γ_1, γ_2 полностью лежали в области $|z|<2$. В трехсвязной области, ограниченной извне контуром $|z|=2$, а изнутри − контурами γ_1, γ_2, подынтегральная функция аналитична. Учитывая это, получаем:

$$\int_{|z|=2} \frac{ze^z dz}{z^3+4z^2+z+4} = \int_{\gamma_1} \frac{ze^z dz}{(z-i)(z+i)(z+4)} + \int_{\gamma_2} \frac{ze^z dz}{(z-i)(z+i)(z+4)} =$$

$$= 2\pi i\left(\left.\frac{ze^z}{(z+i)(z+4)}\right|_{z=i} + \left.\frac{ze^z}{(z-i)(z+4)}\right|_{z=-i} \right) = 2\pi i\left(\frac{e^i}{2(4+i)} + \frac{e^{-i}}{2(4-i)} \right) =$$

$$= \frac{\pi i}{17}(8\cos 1 + 2\sin 1).$$

19. $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^4-1}$, $C: |z-1-i| = \sqrt{2}$.

Решение. Уравнение $z^4-1=0$ имеет четыре корня: $z=\pm 1$, $z=\pm i$, из которых корни $z=i$ и $z=1$ принадлежат области $|z-1-i|<\sqrt{2}$. Аналогично решению примера 18, имеем:

$$\int_C \frac{dz}{z^4-1} = \int_{\gamma_1} \frac{1\big/((z^2-1)(z+i))\,dz}{(z-i)} + \int_{\gamma 2} \frac{1\big/((z^2+1)(z+1))\,dz}{(z-1)} =$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{\left(z^2-1\right)\left(z+i\right)}\Bigg|_{z=i} + \frac{1}{\left(z^2+1\right)\left(z+1\right)}\Bigg|_{z=1}\right) = \frac{\pi}{2}\left(i-1\right).$$

20. $\int\limits_C \frac{e^z dz}{z\left(z-2\right)^3}$, $C: \left|z-2\right| = 1$.

Решение.Подынтегральная функция аналитична в области $\left|z-2\right| < 1$ всюду, за исключением точки $z = 2$. Для вычисления интеграла будем использовать формулу (9:)

$$\int\limits_C \frac{e^z/z}{\left(z-2\right)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}\cdot\left(\frac{e^z}{z}\right)''\Bigg|_{z=2} = \pi i\left(\frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{2}{z^3}\right)e^z\Bigg|_{z=2} = \frac{\pi i}{4}e^2.$$

21. $\int\limits_C \frac{\sin\frac{\pi}{z-1}dz}{\left(z-i\right)^2}$, $C: \left|z-2i\right| = 2$.

Решение. В области, ограниченной контуром $\left|z-2i\right| = 2$, подынтегральная функция аналитична всюду, кроме точки $z = i$. Согласно формуле (9):

$$\int\limits_C \frac{\sin\frac{\pi}{z-1}dz}{\left(z-i\right)^2} = 2\pi i\left(\sin\frac{\pi}{z-1}\right)'\Bigg|_{z=i} = 2\pi i\cdot\cos\frac{\pi}{i-1}\cdot\left(-\frac{\pi}{\left(i-1\right)^2}\right) = -i\pi^2\cdot sh\frac{\pi}{2}$$

.

22. $\int\limits_C \frac{e^{\pi iz}\cdot\sin(\pi z)dz}{z^3 - z^2} = \int\limits_C \frac{e^{\pi iz}\cdot\sin(\pi z)dz}{z^2\left(z-1\right)}$, $C: \left|z\right| = 2$.

Решение. Подынтегральная функция аналитична внутри контура $z = 2$ всюду, кроме точек $z = 0$ и $z = 1$. Разбиваем интеграл на два интеграла (см. пример 18):

$$\int\limits_C \frac{e^{\pi iz}\cdot\sin(\pi z)dz}{z^2\left(z-1\right)} = \int\limits_{\gamma_1} \frac{\left(e^{\pi iz}\cdot\sin(\pi z)\right)/\left(z-1\right)}{z^2}dz + \int\limits_{\gamma_2} \frac{\left(e^{\pi iz}\cdot\sin(\pi z)\right)/z^2}{z-1}dz =$$

$$= 2\pi i\left(\left(\frac{e^{\pi iz}\sin\left(\pi z\right)}{z-1}\right)'\Bigg|_{z=0} + \left(\frac{e^{\pi iz}\sin\left(\pi z\right)}{z^2}\right)\Bigg|_{z=1}\right) = 2\pi i\left(\frac{e^{2\pi iz}-1}{2i\left(z-1\right)}\right)'\Bigg|_{z=0} =$$

$$= \pi\cdot\frac{2\pi ie^{2\pi iz}\left(z-1\right) - e^{2\pi iz} + 1}{\left(z-1\right)^2}\Bigg|_{z=0} = -2\pi^2 i.$$

23. $\int\limits_C \frac{z\sin z}{(z-1)^5}dz$, $C:\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}=1$.

Решение.Согласно формуле (9):

$$\int\limits_C \frac{z\sin z}{(z-1)^5}dz = \frac{2\pi i}{4!}(z-\sin z)^{(4)}\Big|_{z=1} = \frac{\pi i}{12}\left(\sum_{k=0}^{4} C_4^k z^{(k)}\cdot(\sin z)^{(4-k)}\right)\Bigg|_{z=1} =$$

$$= \frac{\pi i}{12}\left(z(\sin z)^{(4)} + 4(\sin z)^{(3)}\right)\Big|_{z=1} = \frac{\pi i}{12}(-4\cos 1+\sin 1).$$

Оглавление

Используемая литература

1. А.Г.Свешников, А.Н.Тихонов. Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука, 2010.– 336с.
2. Ю.В.Сидоров, М.В.Федорюк, М.И.Шабунин. Лекции по теории функций комплексного переменного.– М.: Наука, 1989.– 480с.
3. И.И.Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного.– М.: Высшая школа, 1999.– 432с.
4. Л.И.Волковыский, Г.Л.Лунц, И.Г.Араманович. Сборник задач по теории функций комплексного переменного.– М.: Наука, 1970.– 320с.