

**А. Ф. Проневич<sup>1</sup>, Г. А. Хацкевич<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Гродненский государственный университет имени Янки Купалы,  
Гродно, Беларусь, [pranevich@grsu.by](mailto:pranevich@grsu.by)

<sup>2</sup> Институт бизнеса БГУ, Минск, Беларусь, [khatskevich@sbmt.by](mailto:khatskevich@sbmt.by)

## **О ДИНАМИЧЕСКИХ ТРЕХФАКТОРНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ, УЧИТЫВАЮЩИХ ПРОДУКТООУВЕЛИЧИВАЮЩИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ПРОГРЕСС**

*В работе приведена классификация учета автономного экзогенного научно-технического прогресса в аналитическом задании динамической трехфакторной производственной функции. Получены экономико-математические признаки учета в задании динамической трехфакторной производственной функции продуктоувеличивающего научно-технического прогресса. Результаты работы могут быть использованы при моделировании реальных производственных процессов на базе трехфакторных производственных функций.*

**Ключевые слова:** производственная функция, научно-технический прогресс, динамическая трехфакторная модель, продуктоувеличивающий прогресс

**A. Pranevich<sup>1</sup>, G. Khatskevich<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Grodno State University named after Ya. Kupala, Grodno, Belarus, [pranevich@grsu.by](mailto:pranevich@grsu.by)

<sup>2</sup> School of Business of BSU, Minsk, Belarus, [khatskevich@sbmt.by](mailto:khatskevich@sbmt.by)

## **ABOUT DYNAMIC THREE-FACTOR PRODUCTION FUNCTIONS WITH PRODUCT-AUGMENTING TECHNOLOGICAL PROGRESS**

*In this paper, we consider dynamic three-factor production functions and present a classification of accounting of autonomous exogenous technological progress. The economic and mathematical criteria of accounting of product-augmenting technological progress in dynamic three-factor production functions are obtained. The obtained results can be applied in modeling of production processes on base dynamic three-factor production functions.*

**Keywords:** production function, technological progress, dynamic three-factor model, product-augmenting technological progress

*Введение и постановка задачи.* Рассмотрим динамическую трехфакторную производственную функцию (ПФ)

$$Y = F(K, L, N, t), \quad (1)$$

где  $Y$  – выпуск продукции,  $K$  – капитал,  $L$  – труд,  $N$  – природные ресурсы (земля, нефть, газ и др.),  $t$  – параметр времени из числового луча  $\mathbf{R}_+ = [0; +\infty)$ , каждое значение которого выражает определенный уровень научно-технического прогресса (НТП), а неотрицательная функция  $F$  является дважды непрерывно дифференцируемой на множестве  $D = G \times \mathbf{R}_+$ , экономическая область  $G \subset \mathbf{R}_+^3 = \{(K, L, N) : K \geq 0, L \geq 0, N \geq 0\}$ .

Отметим, что значимость использования динамических трехфакторных ПФ (1) в экономическом анализе впервые была теоретически обоснована в монографии английского экономиста Д. Э. Мида [1]. В настоящее время, модели экономического роста с трехфакторными ПФ применяются для изучения «голландской болезни» и «ресурсного проклятия» (см., например, [2]).

При анализе НТП в рамках некоторой конкретной экономической единицы, рассматриваемой в определенный период времени, прежде всего необходимо конкретизировать зависимость

в рамках аналитического представления ПФ (1). Этот выбор осуществляется из содержательных представлений о моделируемом объекте и о существе решаемой задачи. Для динамической трехфакторной ПФ (1) будем использовать следующую классификацию учета НТП (для динамической двухфакторной ПФ см., например, [3, с. 152–154; 4–8]):

1. *Продуктоувеличивающий* НТП

$$Y = A(t)\tilde{F}(K, L, N), \quad (2)$$

где функция  $A$  называется *общей производительностью факторов* (total factor productivity, TFP) и характеризует эффективность использования основных факторов производства. Обычно функцию  $A$  интерпретируют как состояние технологии, а резкое увеличение (уменьшение) этого коэффициента называют *положительным (отрицательным) технологическим шоком* [9, с. 53]. В более широком смысле состояние технологии может также включать в себя различные социальные и природные факторы. Примерами положительных шоков являются достижения в науке, промышленная революция, рост Интернета, а примерами отрицательных шоков могут служить повышение цен на энергоносители, национальная забастовка, неурожай, война. Рассмотрение положительных и отрицательных шоков технологий лежит в основе теории реального делового цикла (real business cycle), за разработку которой экономисты Ф. Э. Кидланд и Э. Прескотт были удостоены в 2004 г. премии по экономике памяти А. Нобеля.

2. *Капиталодобавляющий* (или *капиталосберегающий*) НТП

$$Y = \tilde{F}(A(t)K, L, N),$$

*трудо-добавляющий* (или *трудо-сберегающий*) НТП  $Y = \tilde{F}(K, B(t)L, N)$  и *природо-добавляющий* (или *природо-сберегающий*) НТП  $Y = \tilde{F}(K, L, C(t)N)$ ;

3. *Капитало- и трудо-добавляющий* (или *капитало- и трудо-сберегающий*) НТП  $Y = F(A(t)K, B(t)L, N)$ , *капитало- и природо-добавляющий* (или *капитало- и природо-сберегающий*) НТП  $Y = F(A(t)K, L, C(t)N)$ , *трудо- и природо-добавляющий* (или *трудо- и природо-сберегающий*) НТП  $Y = F(K, B(t)L, C(t)N)$ ;

4. *Капитало-, трудо- и природо-добавляющий* (или *капитало-, трудо- и природо-сберегающий*) НТП

$$Y = \tilde{F}(A(t)K, B(t)L, C(t)N), \quad (3)$$

где строго возрастающие функции  $A(t)$ ,  $B(t)$  и  $C(t)$  такие, что  $A(0) = B(0) = C(0) = 1$ , представляют собой индексы НТП по капиталу, труду и природным ресурсам, соответственно. В случае, когда индексы НТП, увеличивающие капитал, труд и природные ресурсы, равны, т. е.  $A(t) = B(t) = C(t)$ , а функция  $\tilde{F}$  является однородной степени  $q \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  на области  $G$ , получаем, что продуктоувеличивающий НТП (2) равносильен капитало-, трудо- и природо-сберегающему НТП (3).

В данной работе авторами получены экономико-математические условия, при выполнении которых динамическая трехфакторная ПФ (1) учитывает продуктоувеличивающий НТП, т. е. аналитические критерии того, что динамическую ПФ (1) можно представить в аналитическом виде (2).

*Основные результаты* работы выражают следующие два критерия.

Утверждение 1. *Динамическая трехфакторная ПФ (1) учитывает продуктоувеличивающий НТП, если и только если верна система тождеств*

$$\partial_K \ln Y = \varphi(K, L, N), \quad \partial_L \ln Y = \psi(K, L, N), \quad \partial_N \ln Y = \chi(K, L, N), \quad (4)$$

где  $\varphi, \psi, \chi$  – некоторые непрерывно дифференцируемые на экономической области  $G$  функции, которые не зависят от параметра НТП  $t$ , а  $\partial_K, \partial_L, \partial_N$  есть частные производные по капиталу, труду и природным ресурсам, соответственно.

**Доказательство. Необходимость.** Пусть ПФ (1) учитывает продуктоувеличивающий НТП. Тогда ее можно представить в аналитической форме (2). Частные производные:

$$\begin{aligned}\partial_K \ln Y &= \frac{\partial_K Y}{Y} = \frac{\partial_K (A(t)\tilde{F}(K, L, N))}{A(t)\tilde{F}(K, L, N)} = \frac{\partial_K \tilde{F}(K, L, N)}{\tilde{F}(K, L, N)} = \partial_K \ln \tilde{F}(K, L, N), \\ \partial_L \ln Y &= \frac{\partial_L Y}{Y} = \frac{\partial_L (A(t)\tilde{F}(K, L, N))}{A(t)\tilde{F}(K, L, N)} = \frac{\partial_L \tilde{F}(K, L, N)}{\tilde{F}(K, L, N)} = \partial_L \ln \tilde{F}(K, L, N), \\ \partial_N \ln Y &= \frac{\partial_N Y}{Y} = \frac{\partial_N (A(t)\tilde{F}(K, L, N))}{A(t)\tilde{F}(K, L, N)} = \frac{\partial_N \tilde{F}(K, L, N)}{\tilde{F}(K, L, N)} = \partial_N \ln \tilde{F}(K, L, N),\end{aligned}$$

а значит, на экономической области  $G$  имеет место система тождеств (4) при условии, что функции  $\varphi(K, L, N) = \partial_K \ln \tilde{F}(K, L, N)$ ,  $\psi(K, L, N) = \partial_L \ln \tilde{F}(K, L, N)$  и  $\chi(K, L, N) = \partial_N \ln \tilde{F}(K, L, N)$ .

**Достаточность.** Пусть динамическая трехфакторная ПФ (1) такова, что выполняются тождества (4). Тогда из первого уравнения системы уравнений в частных производных первого порядка (4) находим, что

$$\ln Y = \int \varphi(K, L, N) dK + C(L, N, t),$$

где  $C(L, N, t)$  есть произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Подставляя это выражение во второе уравнение системы уравнений в частных производных первого порядка (4), получаем

$$\int \partial_L \varphi(K, L, N) dK + \partial_L C(L, N, t) = \psi(K, L, N).$$

Отсюда следует, что функция  $\partial_L C(L, N, t)$  не зависит от параметра НТП  $t$ , а является функцией только от двух переменных  $L$  и  $N$ , т. е.  $\partial_L C(L, N, t) = \tilde{C}(L, N)$ , а значит, функция  $C(L, N, t) = \int \tilde{C}(L, N) dL + \tilde{A}(t)$ .

Следовательно, функция

$$Y = \exp\left(\int \varphi(K, L, N) dK + \int \tilde{C}(L, N) dL + \tilde{A}(t)\right) = A(t)\tilde{F}(K, L, N),$$

где приняты следующие обозначения

$$A(t) = \exp \tilde{A}(t), \quad \tilde{F}(K, L, N) = \exp\left(\int \varphi(K, L, N) dK + \int \tilde{C}(L, N) dL\right).$$

Таким образом, для динамической трехфакторной ПФ (1) имеет место представление (2), а значит, ПФ (1) учитывает продуктоувеличивающий НТП.  $\square$

**Замечание.** Утверждение 1 можно сформулировать в следующей форме: динамическая трехфакторная ПФ (1) учитывает продуктоувеличивающий НТП, если и только если непрерывные темпы прироста по капиталу, по труду и по природным ресурсам не зависят от параметра НТП.

**Утверждение 2.** Динамическая трехфакторная ПФ (1) будет учитывать продуктоувеличивающий НТП в том и только в том случае, когда имеет место тождество

$$\partial_t \ln Y = \theta(t), \quad (5)$$

где  $\theta$  – некоторая функция (темпы прироста индекса НТП), которая зависит только от параметра НТП  $t$ , а  $\partial_t$  есть частная производная по параметру НТП.

**Доказательство. Необходимость.** Пусть динамическая ПФ (1) учитывает продуктоувеличивающий НТП. Тогда ее можно представить в аналитической форме (2). Частная производная

$$\partial_t \ln Y = \frac{\partial_t Y}{Y} = \frac{\partial_t (A(t)\tilde{F}(K, L, N))}{A(t)\tilde{F}(K, L, N)} = \frac{A'(t)}{A(t)},$$

а значит, верно тождество (5) при темпе прироста индекса  $\theta(t) = A'(t) / A(t)$ .

*Достаточность.* Пусть для ПФ (1) выполняется тождество (5). Тогда

$$\ln Y = \int \theta(t) dt + C(K, L, N),$$

где  $C(K, L, N)$  есть произвольная непрерывно дифференцируемая функция (постоянная интегрирования). Значит, функция

$$Y = \exp\left(\int \theta(t) dt + C(K, L, N)\right) = A(t)\tilde{F}(K, L, N),$$

где положено  $A(t) = \exp\int \theta(t) dt$  и  $\tilde{F}(K, L, N) = \exp C(K, L, N)$ .

Таким образом, для динамической трехфакторной ПФ (1) верно представление (2), а значит, она учитывает продуктоувеличивающий НТП.

В статье для динамических трехфакторных ПФ представлена классификация учета автономного экзогенного научно-технического прогресса. Установлены аналитические критерии (утверждения 1 и 2) того, что заданная динамическая трехфакторная ПФ (1) учитывает продуктоувеличивающий НТП. Полученные в работе результаты могут быть использованы при моделирования реальных производственных процессов на основе моделей трехфакторных ПФ.

#### Список использованных источников

1. Meade, J. E. A new-classical theory of economic growth / J. E. Meade. – New York : Oxford University Press, 1961. – 147 p.
2. Полтерович, В. М. Экономическая политика, качество институтов и механизмы «ресурсного проклятия» / В. М. Полтерович, В. В. Попов, А. С. Тонис // Вопросы экономики. – 2007. – № 6. – С. 4–27.
3. Ашманов, С. А. Введение в математическую экономику / С. А. Ашманов. – М. : Наука, 1984. – 296 с.
4. Проневич, А. Ф. Научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу: генезис, построение и обобщение / А. Ф. Проневич, Г. А. Хацкевич // Белорус. эконом. журнал. – 2020. – № 3. – С. 87–105.
5. Pranevich, A. F. Generalized neutral technological progress by Hicks, Harrod and Solow / A. F. Pranevich // Бизнес. Инновации. Экономика : сб. науч. ст. / Ин-т бизнеса БГУ ; редкол. : Г. А. Хацкевич [и др.]. – Минск, 2020. – Вып. 4. – С. 193–201.
6. Хацкевич, Г. А. Классификация Сато – Бекмана учета научно-технического прогресса: генезис, обобщение и дополнение / Г. А. Хацкевич, А. Ф. Проневич // Журн. Белорус. гос. ун-та. Экономика. – 2020. – № 2. – С. 4–16.
7. Проневич, А. Ф. Автономный экзогенный научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу / А. Ф. Проневич, Г. А. Хацкевич // Вестн. Ин-та экономики НАН Беларуси. – 2021. – Вып. 2. – С. 105–120.
8. Проневич, А. Ф. Трудодобавляющий научно-технический прогресс и нейтральность по Харроду / А. Ф. Проневич, Г. А. Хацкевич // Экономика, моделирование, прогнозирование : сб. науч. тр. / [редкол. : М. К. Кравцов (гл. ред.) и др.]. – Минск : НИЭИ М-ва экономики Респ. Беларусь, 2021. – Вып. 15. – С. 236–246.
9. Курзенев, В. Экономический рост / В. Курзенев, В. Матвеев. – СПб. : Питер, 2018. – 608 с.