

**Белорусский государственный университет**



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по учебной работе и  
образовательным инновациям

О.Г. Прохоренко

«27» июня 2022 г.

Регистрационный № УД – 10776/уч.

## **ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ**

**Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности:**

**1-31 03 03 Прикладная математика (по направлениям)  
направление специальности**

**1-31 03 03-01 Прикладная математика (научно-производственная деятельность)**

2022 г.

Учебная программа составлена на основе типового учебного плана №G 31-1-026/пр.тип. от 30.06.2021 и учебных планов БГУ №G 31-1-030/уч. от 30.06.2021, №G 31-1-022/уч. ин. от 23.07.2021.

#### **СОСТАВИТЕЛИ:**

**М.М. Васьковский**, заведующий кафедрой высшей математики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, доцент;  
**С.А. Мазаник**, профессор кафедры высшей математики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;  
**О.А. Кастрица**, доцент кафедры высшей математики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

#### **РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

**Бровка Н.В.**, заведующий кафедрой теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета доктор педагогических наук, профессор;  
**Вабищевич С.В.**, заведующий кафедрой информатики и методики преподавания информатики УО «Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка», кандидат педагогических наук, доцент.

#### **РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой высшей математики Белорусского государственного университета (протокол № 10 от 24 мая 2022 г.);  
Научно-методическим Советом Белорусского государственного университета (протокол № 5 от 27 мая 2022 г.)

Заведующий кафедрой высшей математики  
Белорусского государственного университета,  
доктор физико-математических наук



М.М. Васьковский

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная программа учебной дисциплины «Числовые и функциональные ряды» разработана в соответствии с учебными планами и образовательным стандартом первой ступени высшего образования по специальности **1-31 03 03 Прикладная математика (по направлениям)** направление специальности 1-31 03 03-01 Прикладная математика (научно-производственная деятельность).

Учебная дисциплина «Числовые и функциональные ряды» знакомит студентов со способами исследования сходимости рядов и свойств функций, задаваемых как суммы функциональных рядов. Изучаемые методы базируются на использовании предельного перехода, дифференциального и интегрального исчисления.

Изучение этой учебной дисциплины базируется на знаниях, полученных студентами при изучении математического анализа.

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Числовые и функциональные ряды» относится к государственному компоненту и входит в **модуль «Математический анализ»** учебного плана специальности 1-31 03 **Прикладная математика (по направлениям)** направление специальности 1-31 03 03-01 Прикладная математика (научно-производственная деятельность).

### **Цели и задачи учебной дисциплины**

**Основные цели** изучения дисциплины «Числовые и функциональные ряды»:

- формирование и развитие практико-ориентированной компетентности, позволяющей использовать полученные знания для решения задач в сфере профессиональной и социальной деятельности;
- формирование логического мышления, позволяющего грамотно анализировать получаемую информацию и делать соответствующие выводы для достижения желаемых результатов;
- овладение методами и средствами приобретения новых знаний, используя современные информационные технологии;
- формирование навыков исследовательской и активной профессиональной деятельности, постановки задач, выработки и принятия решений.

**Основные задачи**, решаемые при изучении учебной дисциплины «Числовые и функциональные ряды»:

- дать студентам базу, необходимую для усвоения материала учебных дисциплин учебного плана специальности;
- сформировать составную часть банка знаний, получаемых будущими специалистами в процессе учебы и необходимых им в дальнейшем для успешной работы.

**Связи** с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Учебная дисциплина «Числовые и функциональные ряды» является базой при изучении учебных дисциплин «Несобственные интегралы», «Теория функций комплексного переменного», «Уравнения математической физики», «Теоретическая механика», «Численные методы», «Численные методы математической физики», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ и интегральные уравнения».

### **Требования к компетенциям**

Освоение учебной дисциплины «Числовые и функциональные ряды» студентами специальности 1-31 03 **Прикладная математика (по направлениям)** направление специальности 1-31 03 03-01 Прикладная математика (научно-производственная деятельность) должно обеспечить формирование следующих **базовых профессиональных компетенций**:

БПК-1. Решать математические задачи и строить логические цепочки утверждений.

БПК-2. Применять основы дифференциального и интегрального исчисления, методы математического анализа к решению прикладных задач.

В результате изучения дисциплины студент должен:

#### **знать:**

- основные методы исследования сходимости числовых рядов;
- методы исследования функций, задаваемых как предел функциональной последовательности или как сумма функционального ряда;
- представление функций в виде сумм степенных рядов.

#### **уметь:**

- исследовать числовые ряды на сходимость;
- находить множество сходимости функциональных рядов;
- изучать свойства суммы функционального ряда;
- строить разложение функций в степенные ряды на заданном множестве.

#### **владеть:**

- основным аппаратом математического анализа;
- навыками исследования сходимости рядов;
- навыками исследования функциональных зависимостей методами математического анализа;
- навыками построения математических моделей естественных процессов.

### **Структура учебной дисциплины**

Дисциплина изучается в 3 семестре.

Всего на изучение учебной дисциплины «Числовые и функциональные ряды» отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 216 часов, в том числе 72 аудиторных часа, из них: лекции – 36 часов, практические занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Форма текущей аттестации – экзамен.

**СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА**

## **Раздел 1. Числовые ряды**

### ***Тема 1.1. Числовой ряд***

Числовой ряд. Сходимость ряда, сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Геометрический и гармонический ряды. Критерий Коши сходимости числового ряда.

### ***Тема 1.2. Признаки сходимости и расходимости рядов***

Положительные ряды. Критерий сходимости положительного ряда. Признаки сходимости, основанные на сравнении положительных рядов. Признаки сходимости Коши, Даламбера, интегральный, Дюамеля-Раабе, Гаусса и др. Признаки Лейбница, Дирихле и Абеля. Абсолютная сходимость.

Ряды с комплексными элементами.

### ***Тема 1.3. Действия над рядами***

Линейная комбинация рядов. Группировка членов ряда. Перестановка членов ряда. Перемножение рядов. Двойные и повторные ряды.

Понятие о других способах суммирования рядов.

## **Раздел 2. Функциональные последовательности и ряды**

### ***Тема 2.1. Функциональные последовательности***

Сходимость функциональных последовательностей. Предельная функция. Равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. Супремальный критерий равномерной сходимости.

### ***Тема 2.2. Функциональные ряды***

Множество сходимости функционального ряда. Функция, определяемая как сумма ряда. Равномерная сходимость функционального ряда. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.

### ***Тема 2.3. Свойства суммы функционального ряда и предельной функции последовательности***

Предельный переход в рядах. Непрерывность суммы ряда и предельной функции последовательности. Теорема Дини. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов и последовательностей.

### ***Тема 2.4. Степенные ряды***

Степенной ряд. Теорема Абеля. Множество сходимости степенного ряда. Радиус сходимости. Свойства суммы степенного ряда. Представление функций степенными рядами. Ряд Тейлора. Степенные ряды с комплексной переменной.

Основные степенные разложения и их приложения.

## **Раздел 3. Ряды Фурье**

### ***Тема 3.1. Ортогональные системы функций***

Скалярное произведение функций. Норма функции. Ортогональные системы функций. Тригонометрическая система. Свойства функций тригонометрической системы. Тригонометрический многочлен. Приближение функций тригонометрическими многочленами. Многочлен Фурье для заданной функции. Ряд Фурье.

### ***Тема 3.2. Сходимость ряда Фурье***

Принцип локализации. Теорема Римана-Лебега. Сходимость ряда Фурье в точке. Равномерная сходимость ряда Фурье. Сходимость ряда Фурье в среднем. Равенство Парсеваля. Полнота и замкнутость тригонометрической системы.

### ***Тема 3.3. Свойства суммы ряда Фурье***

Обобщенное равенство Парсеваля. Почленное интегрирование и дифференцирование рядов Фурье. Ряд Фурье четной (нечетной) функции. Разложение функций в ряды Фурье.

Теорема Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции многочленами.

### ***Тема 3.4. Интеграл Фурье***

Интеграл Фурье. Сходимость. Представление функций интегралом Фурье. Представление интегралом Фурье по синусам, по косинусам.

Интегральное преобразование Фурье. Дискретное преобразование Фурье.

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**  
 Дневная форма получения образования с применением электронных средств обучения (ДО)

Номер раздела, темы	Наименование раздела, темы	Количество аудиторных часов		Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия		
	<b>Раздел 1. Числовые ряды</b>				
1.1	Числовой ряд	2	2		Отчеты по практическим заданиям
1.2	Признаки сходимости и расходимости рядов	4	4	2	Отчеты по практическим заданиям
1.3	Действия над рядами	2	2		Отчеты по практическим заданиям.
	<b>Раздел 2. Функциональные последовательности и ряды</b>				
2.1	Функциональные последовательности	2	2		Собеседование. Отчеты по практическим заданиям
2.1	Функциональные ряды	4	4		Отчеты по практическим заданиям. Контрольная работа №1



2.3	Свойства суммы функционального ряда и предельной функции последовательности	4	4	2	Отчеты по практическим заданиям.
2.4	Степенные ряды	4	4		Отчеты по практическим заданиям. Коллоквиум.
<b>Раздел 3. Ряды Фурье</b>					
3.1	Ортогональные системы функций	2	2		Отчеты по практическим заданиям.
3.2	Сходимость ряда Фурье	4	2		Отчеты по практическим заданиям Контрольная работа №2
3.3	Свойства суммы ряда Фурье	4	2	2	Отчеты по практическим заданиям. Собеседование.
3.3.	Интеграл Фурье	4	2		Отчеты по практическим заданиям. Собеседование.

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Перечень основной литературы

1. Богданов Ю.С. Лекции по математическому анализу. Ч. 2, Мн. – 1978 г.
2. Богданов Ю.С., Кастрица О.А., Сыроид Ю.Б. Математический анализ. М.– 2003.г.
3. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. В 2 ч. М.– 1985, 1987 гг.
4. Кастрица О. А. Ряды и несобственные интегралы: учеб. пособие / О. А. Кастрица, С.А. Мазаник, А.Ф. Наумович, Н. Ф Наумович – Минск: Вышэйш. шк., 2015 г.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1,2,3. М. – 1989 г.
6. Леваков А.А. Математический анализ. Мн. – 2015 г.
7. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М. 1990 г.

### Перечень дополнительной литературы

1. Богданов Ю.С., Кастрица О.А. Начала анализа в задачах и упражнениях. Мн. – 1988 г.
2. Зорич В.А. Математический анализ. Т.1,2. М. – 1981, 1984 гг.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. М. – 1982 г.
4. Кастрица О.А., Мазаник С.А. Математический анализ. Краткий курс. – Мн. 2017 г.
5. Тер–Киркоров А.М., Шабунин М.А., Курс математического анализа. М. – 1988 г.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1–3. М. – 1969, 1970 гг.
10. Электронный учебно-методический комплекс «Высшая математика». Государственный регистр информационных ресурсов. Регистрационное свидетельство №1271101243 от 29 апреля 2011 г. – Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/8436> – Дата доступа: 03.05.2018.
7. Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Основные математические формулы. Мн. – 1988 г.

## **Перечень используемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки**

Итоговая оценка формируется на основе:

Постановления Министерства образования Республики Беларусь № 53 от 29 мая 2012 г. «Об утверждении Правил проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования»;

Положения о рейтинговой системе оценки знаний обучающихся по учебной дисциплине в Белорусском государственном университете (приказ ректора БГУ № 189-ОД от 31.03.2020);

Критериев оценки результатов учебной деятельности обучающихся в учреждениях высшего образования по десятибалльной шкале (Письмо Министерства образования Республики Беларусь от 28.05.2013 г. № 09-10/53-ПО).

Для аттестации обучающихся на соответствие их персональных достижений поэтапным и конечным требованиям образовательной программы используются оценочные средства, включающие следующие формы:

*Устные формы:*

– собеседование.

*Письменные формы:*

– коллоквиум;

– контрольная работа;

– отчеты по практическим заданиям.

*Устно-письменные формы:*

– экзамен по учебной дисциплине.

На лекционных занятиях по учебной дисциплине «Числовые и функциональные ряды» предусматривается изложение теории с включением проблемного подхода к изучению отдельных тем. Обращается внимание на алгоритмические аспекты получаемых результатов.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Числовые и функциональные ряды» учебным планом предусмотрен экзамен.

При формировании итоговой оценки используется рейтинговая оценка знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая оценка предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний и текущей аттестации в рейтинговую оценку:

формирование оценки за текущую успеваемость:

– отчеты по практическим заданиям – 40 %;

– оценки за выполнение всех контрольных работ – 60 %.

Итоговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов.

Вес оценки текущей успеваемости составляет 40 %, вес экзаменационной оценки составляет 60 %.

### **Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов**

#### **Тема 1.2. Признаки сходимости и расходимости рядов (2 ч.)**

Решение задач из учебного пособия: Кастрица О. А. Ряды и несобственные интегралы: учеб. пособие / О. А. Кастрица, С.А. Маза-ник, А.Ф. Наумович, Н. Ф Наумович – Минск: Вышэйш. шк., 2015 г. Глава 1.

**Форма контроля** - отчет о выполнении практических заданий.

#### **Тема 2.3. Свойства суммы функционального ряда и предельной функции последовательности (2 ч.)**

Решение задач из учебного пособия: Кастрица О. А. Ряды и несобственные интегралы: учеб. пособие / О. А. Кастрица, С.А. Маза-ник, А.Ф. Наумович, Н. Ф Наумович – Минск: Вышэйш. шк., 2015 г. Глава 2.

**Форма контроля** - отчет о выполнении практических заданий.

#### **Тема 3.3. Свойства суммы ряда Фурье (2 ч.)**

Решение задач из учебного пособия: Кастрица О. А. Ряды и несобственные интегралы: учеб. пособие / О. А. Кастрица, С.А. Маза-ник, А.Ф. Наумович, Н. Ф Наумович – Минск: Вышэйш. шк., 2015 г. Глава 7.

**Форма контроля** - отчет о выполнении практических заданий.

### **Описание инновационных подходов и методов преподавания учебной дисциплины**

При организации образовательного процесса рекомендуется использовать перечисленные ниже методы.

**Метод учебной дискуссии**, который предполагает участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, идеями для предъявления и/или согласования существующих позиций по определенной проблеме.

Использование метода обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения.

**Метод группового обучения**, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

## Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для обеспечения возможности самостоятельной работы при изучении теории и выполнении практических заданий рекомендуется использовать изданные учебные пособия и методические разработки кафедры, большая часть которых размещена в электронной библиотеке университета.

Для самоконтроля усвоения учебного материала рекомендуется использовать разработанные кафедрой тесты, размещенные в системе “E-University”.

### Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Числовой ряд. Сходимость, сумма. Необходимое условие сходимости. Критерий Коши.
2. Положительные ряды. Критерий сходимости. Геометрический и гармонический ряд.
3. Признаки сравнения для рядов.
4. Признаки сходимости Даламбера и Коши.
5. Интегральный признак сходимости рядов. Степенной признак.
6. Признаки Дюамеля-Раабе и Гаусса.
7. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница. Абсолютная сходимость.
8. Преобразование Абеля. Признак Дирихле для Рядов.
9. Лемма Абеля. Признак Абеля сходимости числового ряда.
10. Критерий абсолютной сходимости. Условия условной сходимости.
11. Группировка и перестановка членов ряда.
12. Произведение рядов. Теорема Коши. Теорема Мертенса.
13. Повторные и двойные ряды.
14. Функциональные последовательности и ряды. Принцип переноса результатов.
15. Равномерная сходимость. Критерий Коши.
16. Признак Вейерштрасса для рядов.
17. Супремальный критерий.
18. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости рядов.
19. Почленный предельный переход в рядах и последовательностях. Теорема Стокса-Зейделя.
20. Теорема Дини. Почленное интегрирование рядов и последовательностей.
21. Почленное дифференцирование рядов и последовательностей. Использование локальной равномерной сходимости.
22. Степенной ряд. Теорема Абеля.
23. Радиус и промежуток сходимости степенного ряда.
24. Свойства суммы степенного ряда.
25. Разложение функции в степенной ряд. Условия и критерий разложимости.
26. Основные разложения в степенной ряд.
27. Формула Стирлинга.
28. Суммирование рядов по методу Чезаро. Линейность и регулярность метода Чезаро.

29. Суммирование рядов по методу Абеля - Пуассона. Линейность и регулярность метода Абеля - Пуассона.
30. Ортогональные функции. Ортогональность тригонометрической системы.
31. Норма функции.
32. Тригонометрический многочлен наименьшего отклонения.
33. Ряд Фурье. Ряд Фурье для периодической функции. Ряд Фурье для четной (нечетной) функции.
34. Ядро Дирихле.
35. Теорема Римана-Лебега.
36. Принцип локализации. Сходимость ряда Фурье в точке.
37. Ряд Фурье  $2l$ -периодической функции. Разложение функций в ряд по синусам, по косинусам.
38. Свойства коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя.
39. Сходимость в среднем ряда Фурье. Равенство Парсеваля.
40. Равномерная сходимость ряда Фурье.
41. Свойства суммы ряда Фурье.
42. Почленное дифференцирование и интегрирование ряда Фурье.
43. Интеграл Фурье. Дополнение к теореме Римана – Лебега.
44. Представление функции интегралами Фурье различного вида.
45. Преобразование Фурье.
46. Дискретное преобразование Фурье.

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу
Методы оптимизации	Кафедра методов оптимального управления	Нет	Изменения не требуются (протокол № 10 от 24 мая 2022 г.)
Теоретическая механика	Кафедра методов оптимального управления	Нет	Изменения не требуются (протокол № 10 от 24 мая 2022 г.)
Функциональный анализ и интегральные уравнения	Кафедра компьютерных технологий и систем	Нет	Изменения не требуются (протокол № 10 от 24 мая 2022 г.)
Уравнения математической физики	Кафедра компьютерных технологий и систем	Нет	Изменения не требуются (протокол № 10 от 24 мая 2022 г.)
Численные методы	Кафедра вычислительной математики	Нет	Изменения не требуются (протокол № 10 от 24 мая 2022 г.)
Численные методы математической физики	Кафедра вычислительной математики	Нет	Изменения не требуются (протокол № 10 от 24 мая 2022 г.)
Теория вероятностей и математическая статистика	Кафедра теории вероятностей и математической статистики	Нет	Изменения не требуются (протокол № 10 от 24 мая 2022 г.)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ**  
на \_\_\_\_ / \_\_\_\_ учебный год

№№ пп	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры высшей математики (протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_)

Заведующий кафедрой  
докт. физ.-мат. наук,  
(ученая степень, звание)

\_\_\_\_\_  
(подпись)

М.М. Васьковский  
(И.О. Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ  
Декана ФПМИ  
докт. техн. наук,  
(ученая степень, звание)

\_\_\_\_\_  
(подпись)

А.М. Недзьведь  
(И.О. Фамилия)