

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Директор по учебной работе и
образовательным инновациям

О.Н. Здрок

«06» января 2022 г.

Регистрационный № УД – 10763/уч.

ТЕОРИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:

- | | |
|---------------|--|
| 1-31 03 01 | Математика (по направлениям)
направление специальности: |
| 1-31 03 01-04 | Математика (научно-конструкторская деятельность) |

2022 г.

Учебная программа составлена на основе типового учебного плана G31-1-001/пр-тип. от 31.03.2021 и учебного плана G31-1-018/уч. от 25.05.2021

СОСТАВИТЕЛЬ:

Таразевич Ю.Г., старший преподаватель кафедры математической кибернетики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук.

РЕЦЕНЗЕНТ:

Лепин В.В., ученый секретарь государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси», кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой математической кибернетики Белорусского государственного университета
(протокол № 4 от 22.11.2021);

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета
(протокол № 3 от 06.01.2022)

Заведующий кафедрой
математической кибернетики _____ А.Л. Гладков

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины – обучение студентов базовым разделам теории булевых функций для развития у них навыков дискретного математического мышления и умения использования их при решении актуальных прикладных проблем современного общества.

Задачами учебной дисциплины являются изучение терминологии, основных утверждений и методов их доказательства, освоение методов решения типовых задач, а также ознакомление со способами моделирования практических задач в терминах задач из рассматриваемых разделов теории булевых функций.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Теория булевых функций является важной составной частью дискретной математики. Значение дискретной математики и теории булевых функций в системе подготовки специалиста с высшим образованием в настоящее время определяется многими факторами. Так, их можно рассматривать в качестве теоретической основы компьютерной математики. Кроме того, модели и методы дискретной математики являются хорошим средством и языком для построения и анализа моделей в различных науках, включая химию, биологию, генетику, физику, социологию, психологию, экологию и др. Наконец, дискретная математика является важным звеном общего математического образования.

Учебная дисциплина относится **к модулю** «Дискретная математика и математическая кибернетика» компонента учреждения высшего образования.

Для понимания учебной дисциплины студенту требуется минимум предварительных математических знаний и навыков. В частности, нужно иметь самые начальные сведения из общей теории отображений, теории множеств и линейной алгебры, которые даются в учебных дисциплинах «Математический анализ» и «Алгебра и теория чисел» государственного компонента.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Теория булевых функций» должно обеспечить формирование следующих универсальных, базовых профессиональных и специализированных компетенций.

универсальные компетенции:

- УК-1. Владеть основами исследовательской деятельности, осуществлять поиск, анализ и синтез информации;
- УК-2. Решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе применения информационно-коммуникационных технологий;

- УК-4. Работать в команде, толерантно воспринимать социальные, этнические, конфессиональные, культурные и иные различия;
- УК-5. Быть способным к саморазвитию и совершенствованию в профессиональной деятельности;
- УК-6. Проявлять инициативу и адаптироваться к изменениям в профессиональной деятельности.

базовые профессиональные компетенции:

- БПК-4. Применять теоретические знания и навыки в самостоятельной исследовательской деятельности;
- БПК-5. Применять основные алгебраические и геометрические понятия, конструкции и методы при решении теоретических и прикладных математических задач.

специализированные компетенции:

- СК-5. Применять основные понятия, утверждения и методы решения базовых задач дискретной математики.

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать: основные понятия и утверждения из рассматриваемых разделов теории булевых функций;

уметь: доказывать основные утверждения и применять их для решения типовых задач;

владеть: основными методами решения типовых задач из рассматриваемых разделов теории булевых функций.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина «Теория булевых функций» изучается во 2-м семестре. Учебная программа предназначена для студентов очной формы получения образования. Всего на изучение учебной дисциплины отведено 90 учебных часов, из которых 34 аудиторных часа, в том числе: лекции – 18 часов, лабораторные занятия – 12 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Введение.

Тема 1.1. n -мерный булев куб. k -мерный подкуб n -мерного куба.

Тема 1.2. Определение булевых функций. Способы задания. Существенные и фиктивные переменные. Элементарные булевы функции.

Раздел 2. Реализация булевых функций формулами.

Тема 2.1. Формулы над элементарными булевыми функциями. Таблицы истинности.

Тема 2.2. Эквивалентность формул. Двойственность. Эквивалентные преобразования и минимизация формул.

Раздел 3. Реализация булевых функций дизъюнктивными, конъюнктивными и полиномиальными нормальными формами.

Тема 3.1. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Минимизация ДНФ и КНФ.

Тема 3.2. Полиномы Жегалкина. Полиномы Рида-Маллера. Построение полиномов.

Раздел 4. Замкнутые и полные системы булевых функций.

Тема 4.1. Формулы над произвольной системой булевых функций. Замкнутые и полные системы функций. Основные замкнутые классы булевых функций.

Тема 4.2. Критерий полноты Поста. Следствия.

Раздел 5. Реализация булевых функций контактными схемами и схемами из функциональных элементов.

Тема 5.1. Контактные схемы (КС). Проводимость контактной схемы. Сложность контактной схемы. Параллельно-последовательные контактные схемы (π -схемы). Двойственность. Синтез, эквивалентные преобразования и минимизация КС. Метод Шеннона и метод каскадов для КС.

Тема 5.2. Схемы из функциональных элементов (СФЭ). Синтез, эквивалентные преобразования и минимизация СФЭ. Метод Шеннона и метод каскадов для СФЭ.

Тема 5.3. Нижние оценки сложности реализации булевых функций в классах контактных схем и схем из функциональных элементов. Мощностной метод Шеннона и его применение для КС и СФЭ.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования с применением электронных средств обучения (ДО)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Литература	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Введение	2			2				
1.1	<i>n</i> -мерный булев куб. <i>k</i> -мерный подкуб <i>n</i> -мерного куба.	1			1			[1, 2, 6]	Устный опрос
1.2	Определение булевых функций. Способы задания. Существенные и фиктивные переменные. Элементарные булевы функции.	1			1			[1, 2, 5, 6]	Устный опрос
2	Реализация булевых функций формулами	2			2				
2.1	Формулы над элементарными функциями. Таблицы истинности.	1			1			[1, 2, 5, 6]	Экспресс-опрос
2.2	Эквивалентность формул. Двойственность. Эквивалентные преобразования и минимизация формул.	1			1			[1, 2, 5, 6]	Устный опрос
3	Реализация булевых функций дизъюнктивными, конъюнктивными и полиномиальными нормальными формами	4			3		1		
3.1	Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Минимизация ДНФ и КНФ	2			1		1	[1, 2, 5, 6]	Устный опрос, контрольная работа № 1

3.2	Полиномы Жегалкина. Полиномы Рида-Маллера. Построение полиномов.	2			2			[1, 2, 5]	Коллоквиум
4	Замкнутые и полные системы булевых функций	4			2		1		
4.1	Формулы над произвольной системой булевых функций. Замкнутые и полные системы функций. Основные замкнутые классы булевых функций	2			1		1	[1, 2, 5]	Устный опрос, контрольная работа № 2
4.2	Критерий полноты Поста. Следствия.	2			1			[1, 2, 5]	Устный опрос
5	Реализация булевых функций контактными схемами и схемами из функциональных элементов	6			3		2		
5.1	Контактные схемы (КС). Проводимость КС. Сложность КС. π -схемы. Двойственность. Синтез, эквивалентные преобразования и минимизация КС. Метод Шеннона и метод каскадов для КС.	2			1		1	[2, 3, 6, 7]	Коллоквиум, контрольная работа № 3
5.2	Схемы из функциональных элементов (СФЭ). Синтез, эквивалентные преобразования и минимизация СФЭ. Метод Шеннона и метод каскадов для СФЭ	2			1		1	[1, 2, 4, 6]	Коллоквиум, контрольная работа № 4
5.3	Нижние оценки сложности КС и СФЭ. Мощностной метод Шеннона и его применение для КС и СФЭ.	2			1			[4, 6]	Коллоквиум
ИТОГО		18			12		4		

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику: Учеб. пособие для вузов / Под ред. В.А. Садовниченко. – 4-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2003. – 384 с.
2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 416 с.
3. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. (Изд. второе, исправленное.) – М.: URSS. Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 392 с.
4. Яблонский С.В. Элементы математической кибернетики. – М.: Высшая школа, 2007. – 188 с.

Перечень дополнительной литературы

5. Супрун В.П. Основы теории булевых функций. – М.: ЛЕНАНД, 2017. – 208 с.
6. Нигматуллин Р.Г. Сложность булевых функций. – М.: Наука, 1991. – 240 с.
7. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. – М.: Наука, 1974. – 368 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Формой текущей аттестации по дисциплине «Теория булевых функций» учебным планом предусмотрен зачет.

При формировании итоговой оценки используется рейтинговая оценка знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику прогресса достижения целей обучения. Рейтинговая оценка предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

С целью текущего контроля знаний студентов предусматривается проведение устных опросов, экспресс-опросов, коллоквиумов и контрольных работ. Весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний и текущей аттестации в рейтинговую оценку:

- устный опрос – 17 %;
- экспресс-опрос – 17 %;
- коллоквиум – 33 %;
- контрольная работа – 33 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 3.1. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Минимизация ДНФ и КНФ. (1 ч).

1. Произвольная булева функция 3-х аргументов задана таблицей или формулой. Для заданной функции построить сокращенную и минимальную ДНФ.
2. Произвольная булева функция 3-х аргументов задана таблицей или формулой. Для заданной функции построить сокращенную и минимальную КНФ.
3. Произвольная булева функция 3-х аргументов задана таблицей или формулой. Для заданной функции построить совершенную ДНФ и совершенную КНФ.

(Форма контроля – устный опрос и контрольная работа № 1).

Тема 4.1. Формулы над произвольной системой функций. Замкнутые и полные системы функций. Основные замкнутые классы функций. (1 ч.)

1. Множество булевых функций n аргументов задано произвольной формулой в базисе {объединение, пересечение, дополнение} с участием произвольных предполных классов алгебры логики кроме класса монотонных функций. Найти мощность данного множества.

2. Найти мощность множества всех булевых функций, зависящих от заданных n аргументов, входящих в объединение всех предполных классов функций алгебры логики.
3. Верно ли, что каждая четвертая булева функция является функцией Шеффера?
(Форма контроля – устный опрос и контрольная работа № 2).

Тема 5.1. Контактные схемы (КС). Проводимость схемы. Сложность схемы. π -схемы. Двойственность. Синтез, эквивалентные преобразования и минимизация КС. Метод Шеннона и метод каскадов для КС. (1 ч)

1. Минимизировать произвольную геометрически заданную параллельно-последовательную контактную схему 3-х переменных.
2. Булева функция 3-х аргументов задана таблицей или формулой. Для заданной функции построить минимальную контактную схему.
3. Для произвольной геометрически заданной плоской контактной схемы построить двойственную контактную схему.
4. Верно ли, что двойственные контактные схемы реализуют двойственные булевы функции?
(Форма контроля – коллоквиум и контрольная работа № 3).

Тема 5.2. Схемы из функциональных элементов (СФЭ). Синтез, эквивалентные преобразования и минимизация СФЭ. Метод Шеннона и метод каскадов для СФЭ. (1 ч)

1. Линейную булеву функцию 2-х аргументов реализовать плоской СФЭ в базисе $\{v, \&, -\}$.
2. Реализовать «скрещивание» ребер плоской СФЭ (с 2-мя входами и 2-мя выходами) в базисе $\{+\}$.
3. Реализовать «скрещивание» ребер плоской СФЭ (с 2-мя входами и 2-мя выходами) в базисе $\{v, \&, -\}$.
4. Доказать, что любая булева функция реализуется плоской СФЭ в базисе $\{v, \&, -\}$.
5. К заданной СФЭ в базисе $\{v, \&, -\}$ применить роцедуру поднятия инверторов.
(Форма контроля – коллоквиум и контрольная работа № 4).

Примерная тематика контрольных работ

- Контрольная работа № 1 «Эквивалентные преобразования и минимизация ДНФ и КНФ».
- Контрольная работа № 2 «Исследование систем булевых функций на замкнутость, полноту и независимость».
- Контрольная работа № 3 «Эквивалентные преобразования и минимизация контактных схем».

- Контрольная работа № 4 «Эквивалентные преобразования и минимизация схем из функциональных элементов».

Примерная тематика лабораторных занятий

1. n -мерный булев куб. k -мерный подкуб n -мерного куба. (1 ч.).
2. Определение булевых функций. Способы задания. Существенные и фиктивные переменные. Элементарные булевы функции. (1 ч.).
3. Формулы над элементарными функциями. Таблицы истинности. (1 ч.).
4. Эквивалентность формул. Двойственность. Эквивалентные преобразования и минимизация формул. (1 ч.).
5. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Минимизация ДНФ и КНФ. (1 ч.).
6. Полиномы Жегалкина и Рида-Маллера. Построение полиномов. (2 ч.).
7. Формулы над произвольной системой функций. Замкнутые и полные системы функций. Основные замкнутые классы функций. (1 ч.).
8. Критерий полноты Поста. Следствия. (1 ч.).
9. Контактные схемы (КС). Проводимость схемы. Сложность схемы. π -схемы. Двойственность. Синтез, эквивалентные преобразования и минимизация КС. Метод Шеннона и метод каскадов для КС. (1 ч.).
10. Схемы из функциональных элементов (СФЭ). Синтез, эквивалентные преобразования и минимизация СФЭ. Метод Шеннона и метод каскадов для СФЭ. (1 ч.).
11. Нижние оценки сложности КС и СФЭ. Мощностной метод Шеннона и его применение для КС и СФЭ. (1 ч.).

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется *эвристический подход*, который предполагает:

- осуществление студентами лично-значимых открытий окружающего мира;
- демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем;
- творческую самореализацию обучающихся в процессе создания образовательных продуктов;
- индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности.

Наиболее эффективной предполагается следующая форма реализации эвристического подхода: доказательства громоздких теорем, а также решения

сложных задач разбиваются на этапы, после чего обучаемые подводятся к самостоятельному определению действий на этапах.

При организации образовательного процесса используется также *практико-ориентированный подход*, который предполагает:

- освоение содержания образования через решение практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по индивидуально заданной теме дисциплины;
- выполнение домашнего задания;
- проведение научно-исследовательских работ;
- подготовка к участию в научных и научно-практических конференциях и конкурсах.

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Булевы функции и способы их задания. Элементарные булевы функции.
2. Формулы над системой элементарных булевых функций. Построение таблиц истинности.
3. Равенство булевых функций. Существенные и фиктивные переменные.
4. Эквивалентность формул. Эквивалентные преобразования формул.
5. Система эквивалентных преобразований для формул в базисе $\{\vee, \&, -\}$.
6. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Совершенная, сокращенная, тупиковая и минимальная ДНФ (КНФ). Алгоритм минимизации ДНФ (КНФ).
7. Полиномы Жегалкина. Свойства кольца полиномов Жегалкина. Методы построения полиномов Жегалкина.
8. Формулы в произвольном базисе. Замкнутые и полные системы функций.
9. Определение основных замкнутых классов булевых функций.
10. Лемма о несамодвойственной функции.
11. Лемма о немонотонной функции.
12. Лемма о нелинейной функции.
13. Теорема Поста (критерий полноты).
14. Следствия из теоремы Поста.

15. Полные независимые системы булевых функций. Примеры. Свойства.
16. Применение критерия Поста для распознавания полноты и независимости систем булевых функций.
17. Графы и способы их задания (аналитический, графический, матричный).
18. Определение контактной схемы (КС). Сложность КС. Вычисление функции проводимости КС.
19. Параллельно-последовательные КС. Связь с формулами в базисе $\{v, \&, -\}$. Двойственные КС.
20. Эквивалентные преобразования и минимизация КС.
21. Метод Шеннона и метод каскадов для КС.
22. Мощностной метод Шеннона для КС.
23. Алгебраические, физические, комбинаторные расширения класса КС. Гиперконтактные и контактно-трансформаторные схемы. Контактные матрицы.
24. Схемы из функциональных элементов (СФЭ). Связь с формулами. Сложность реализации булевых функций в классах СФЭ.
25. Синтез, эквивалентные преобразования и минимизация СФЭ.
26. СФЭ в базисе $\{v, \&, -\}$. Метод Шеннона и метод каскадов. Алгоритм поднятия инверторов для СФЭ в базисе $\{v, \&, -\}$.
27. Мощностной метод Шеннона для СФЭ.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Математическая логика	Кафедра математической кибернетики	Нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 4 от 22.11.2021)
Математический анализ	Кафедра теории функций	Нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 4 от 22.11.2021)
Алгебра и теория чисел	Кафедра высшей алгебры и защиты информации	Нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 4 от 22.11.2021)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
на ____ / ____ учебный год

№№ пп	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры математической кибернетики (протокол № ____ от _____ 20__ г.)

Заведующий кафедрой
доктор физ.-мат. наук, профессор

А.Л. Гладков

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
доктор физ.-мат. наук, доцент

С.М. Босяков