УДК 517.956.32

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С МЛАДШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ И ОДНОЙ КРАТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Е. С. Чеб

e-mail: cheb@bsu.by

В работе рассматривается построение классического решения смешанной задачи для линейного однородного нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка, оператор которого представляет собой четырехкратную композицию оператора первого порядка специального вида, с постоянными коэффициентами и одной характеристикой кратности четыре. Для корректной постановки данной задачи граничные условия задаются не на всей боковой границе, что является ее особенностью. Для построения решения используется метод характеристик. Классическое решение построено для случая наличия производных младших порядков.

Получены достаточные условия гладкости и согласований граничных условий с начальными условиями и уравнением. Показано, что требования гладкости для данной задачи повышаются, чем в случае наличия у уравнения четырех разных характеристик. Доказана теорема существования единственного классического решения этой смешанной задачи.

Ключевые слова: *нестрого гиперболическое уравнение четвертого порядка; смешанная задача; классическое решение; метод характеристик; условия гладкости и согласования.*

CLASSICAL SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR LINEAR NONSTRICTLY HYPERBOLIC FOURTH-ORDER WITH AND MULTIPLE CHARACTERISTIC

E. S. Cheb

e-mail: cheb@bsu.by

In the work, it is considered the construction of a classical solution to the mixed problem for a linear homogeneous not strictly hyperbolic fourth-order equation whose operator is quadruple composition of the first-order operator of the special type, with constant coefficients and one multiplicity of the characteristic four. We use the method of characteristics to solve this problem. For the correct formulation of this problem, the boundary conditions are not specified on the entire lateral boundary, which is its peculiarity. To construct a solution, the method of characteristics is used. The classical solution is constructed for the case of the presence of derivatives lower orders.

We obtained matching conditions for initial and boundary conditions. Shown, that smoothness requirements for this problem are higher than in the case the equation has four different characteristics. A theorem on the existence of a unique classical solution has been proved.

Keywords: *partial differential hyperbolic equation of the fourth order; initial value problem; boundary value problem; classical solution; method of characteristics; smoothness and matching conditions.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 35G15, Secondary 35L25.

Введение

Настоящая работа связана с публикацией [6], где авторами построено в явном виде классическое решение корректной по Адамару граничной задачи для нестрого гиперболического однородного уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами и одной кратной характеристикой в полуполосе плоскости и получены достаточные условия гладкости начальных и граничных функций. В настоящей работе рассматривается уравнение более общего вида. В основу построения решения положен метод характеристик [1], который позволяет не только построить классическое решение, но указать на особенность задания граничных условий. В силу того, что уравнение является нестрого гиперболическим, т.е. имеет кратные характеристики, граничные условия задаются не на всей границе. Такая особенность была подмечена уже для уравнений второго порядка [2, 3]. Кратность характеристик непосредственно влияет и на гладкость входных начальных и граничных данных [5, 6]. Используя метод характеристик, можно получить необходимые и достаточные условия корректной разрешимости смешанных задач для нестрого гиперболических уравнений, как это сделано в [3, 4, 7]. С повышением порядка уравнения, получаемые условия, как правило, являются достаточными [5, 6]. При их выводе существенно используется структура решения уравнения.

1. Постановка начально-краевой задачи

В области $Q = (0, \infty) \times \Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, рассмотрим линейное нестрого гиперболическое уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами в предположении, что гиперболический оператор уравнения L представим в виде композиции операторов первого порядка специального вида

$$Lu \equiv \prod_{i=1}^{4} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_i \frac{\partial}{\partial x} + b \right) u(t,x) = 0, \quad a_i = a > 0,\ b > 0, \quad (t,x) \in Q, \tag{1.1}$$

где $\Omega = (0, l)$, $l > 0$.

К уравнению (1.1) присоединим начальные условия

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad x \in \Omega, \quad j = 0, 1, 2, 3, \tag{1.2}$$

и граничные условия

$$u(t,0) = \mu_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \mu_2(t), \quad t \in \left(\frac{l}{a}, +\infty \right), \tag{1.3}$$

$$u(t,l) = \nu_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \nu_2(t), \quad t \in (0, +\infty). \tag{1.4}$$

Условия (1.3)–(1.4) выбираются таким образом, чтобы смешанная (начально-граничная) задача (1.1)–(1.4) была корректно поставленной по Адамару, т.е. всегда существовало единственное и устойчивое по исходным данным ее классическое решение. Наша задача: построить в явном виде классическое решение $u \in C^{(4)}(\overline{Q})$, $\overline{Q} = [0, \infty) \times [0, l]$, уравнения (1.1) из класса четырежды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих уравнению (1.1) на Q в обычном смысле, а начальным (1.2) и граничным условиям (1.3)–(1.4) в смысле пределов значения решения $u(t,x)$ во внутренних точках $(t,x) \in Q$. Найти достаточные требования гладкости исходных данных φ_j $(j = \overline{0,3})$, $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ и условия согласования между ними и уравнением для корректной разрешимости поставленной задачи (1.1)–(1.4).

2. Решение начально-краевой задачи

Уравнение (1.1) является нестрого гиперболическим и имеет одно семейство характеристик $x + at = C$, $C \in \mathbb{R}$, кратности четыре. Характеристикой $x + at = l$, которая называется критической [1], область Q разбивается на две подобласти

$$Q^{(0)} = \left\{(t,x):\ 0 < t < \frac{l-x}{a},\ 0 < x < l\right\},\ Q^{(1)} = \left\{(t,x):\ t > \frac{l-x}{a},\ 0 < x < l\right\},$$

$\overline{Q} = \overline{Q^{(0)}} \cup \overline{Q^{(1)}}$.

Определим необходимые требования на гладкость входных функций и соотношения между ними для однозначной разрешимости поставленной задачи. Из определения классического решения $u \in C^{(4)}(\overline{Q})$ задачи (1.1)–(1.4) следует, что

$$\varphi_0 \in C^{(4)}(\overline{\Omega}),\ \varphi_1 \in C^{(3)}(\overline{\Omega}),\ \varphi_2 \in C^{(2)}(\overline{\Omega}),\ \varphi_3 \in C^{(1)}(\overline{\Omega}), \tag{2.1}$$

$$\mu_1 \in C^{(4)}\left[\frac{l}{a},\infty\right),\ \mu_2 \in C^{(3)}\left[\frac{l}{a},\infty\right),\ \nu_1 \in C^{(4)}[0,\infty),\ \nu_2 \in C^{(3)}[0,\infty). \tag{2.2}$$

Дополнительные условия получаются, следуя работе [6].

$$\frac{d^s\nu_1(t)}{dt^s}\Big|_{t=0} = \varphi_s(l), \quad \frac{d^s\nu_2(t)}{dt^s}\Big|_{t=0} = \varphi'_s(l),\ s = 0,1,2,3, \tag{2.3}$$

$$\nu_1^{(4)}(0) = -b^4\varphi_0(l) - 4b^3\varphi_1(l) - 6b^2\varphi_2(l) - 4b\varphi_3(l) + 4ab^3\varphi_0'(l) + 12ab^2\varphi_1'(l) + 12ab\varphi_2'(l) +$$
$$+4a\varphi_3'(l) - 6a^2b^2\varphi_0''(l) - 12a^2b\varphi_1''(l) - 6a^2\varphi_2''(l) + 4a^3\varphi_0^{(3)}(l) + 4a^3\varphi_1^{(3)}(l) - a^4\varphi_0^{(4)}(l). \tag{2.4}$$

Условие согласования (2.4) при $b = 0$ имеют вид

$$\nu_1^{(4)}(0) = 4a\varphi_3'(l) - 6a^2\varphi_2''(l) + 4a^3\varphi_1^{(3)}(l) - a^4\varphi_0^{(4)}(l). \tag{2.5}$$

и совпадает с аналогичным условием, полученным в [6].

Упростим задачу (1.1)–(1.4), введя замену переменных

$$u(t,x) = e^{-bt}v(t,x). \tag{2.6}$$

С учетом замены переменных (2.6) задача (1.1)–(1.4) примет вид

$$Lv \equiv \prod_{i=1}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_i\frac{\partial}{\partial x}\right)v(t,x) = 0, \quad a_i = a > 0, \quad (t,x) \in Q, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial^j v}{\partial t^j}\Big|_{t=0} = \overline{\varphi}_j(x), \quad x \in \Omega, \quad j = 0,1,2,3, \tag{2.8}$$

$$v(t,0) = \overline{\mu}_1(t), \quad \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0} = \overline{\mu}_2(t), \quad t \in \left(\frac{l}{a},+\infty\right), \tag{2.9}$$

$$v(t,l) = \overline{\nu}_1(t), \quad \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=l} = \overline{\nu}_2(t), \quad t \in (0,+\infty). \tag{2.10}$$

Новые граничные и начальные функции определятся формулами

$$\overline{\varphi}_0(x) = \varphi_0(x), \quad \overline{\varphi}_1(x) = \varphi_1(x) + b\varphi_0(x),$$

$$\overline{\varphi}_2(x) = \varphi_2(x) + 2b\varphi_1(x) + b^2\varphi_0(x), \quad \overline{\varphi}_3(x) = \varphi_3(x) + 3b\varphi_2(x) + 3b^2\varphi_1(x) + b^3\varphi_0(x). \tag{2.11}$$

$$\overline{\mu}_i(t) = e^{bt}\mu_i(t), \quad \overline{\nu}_i(t) = e^{bt}\nu_i(t), \quad i = 1,2. \tag{2.12}$$

Разрешимость задачи (2.7)–(2.10) с начальными и граничными условиями задаваемыми функциями (2.11), (2.12), подробно изучена в работе [6]. Выведена формула решения в явном виде задачи Коши (2.7)–(2.8)

$$v_0(t,x) = \overline{\varphi}_0(x+at) + t\big[\overline{\varphi}_1(x+at) - a\overline{\varphi}_0'(x+at)\big] + \frac{1}{2}t^2\big[\overline{\varphi}_2(x+at) - 2a\overline{\varphi}_1'(x+at) + a^2\overline{\varphi}_0''(x+at)\big] +$$

$$+\frac{1}{6}t^3\big[\overline{\varphi}_3(x+at) - 3a\overline{\varphi}_2'(x+at) + 3a^2\overline{\varphi}_1''(x+at) - a^3\overline{\varphi}_0^{(3)}(x+at)\big], \quad (t,x)\in Q^{(0)}, \tag{2.13}$$

и граничной задачи (2.7)–(2.10) методом характеристик

$$v_1(t,x) = \frac{(l-x)^2(l+2x)}{l^3}\,\overline{\mu}_1\left(t+\frac{l}{a}\right) + \frac{x(l-x)^2}{l^2}\,\overline{\mu}_2\left(t+\frac{l}{a}\right) + \frac{x^2(3l-2x)}{l^3}\,\overline{\nu}_1\left(t-\frac{l-x}{a}\right) -$$

$$-\frac{x^2(l-x)}{l^2}\,\overline{\nu}_2\left(t-\frac{l-x}{a}\right) - \frac{x(l-x)^2}{al^2}\,\overline{\mu}_1'\left(t+\frac{l}{a}\right) + \frac{x^2(l-x)}{al^2}\,\overline{\nu}_1'\left(t-\frac{l-x}{a}\right),\ (t,x)\in Q^{(1)}. \tag{2.14}$$

Из решения задачи Коши (2.13) следует, что если $v_0\in C^{(4)}(\overline{Q^{(0)}})$, то достаточные требования на гладкость начальных функций повышаются по сравнению с (2.1), а именно

$$\varphi_0\in C^{(7)}(\overline{\Omega}),\ \varphi_1\in C^{(6)}(\overline{\Omega}),\ \varphi_2\in C^{(5)}(\overline{\Omega}),\ \varphi_3\in C^{(4)}(\overline{\Omega}). \tag{2.15}$$

Аналогично повышаются требования и на гладкость граничных функций

$$\mu_1\in C^{(5)}\left[\frac{l}{a},\infty\right),\ \mu_2\in C^{(4)}\left[\frac{l}{a},\infty\right),\ \nu_1\in C^{(5)}[0,\infty),\ \nu_2\in C^{(4)}[0,\infty). \tag{2.16}$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены требования гладкости начальных и граничных данных (2.15) и (2.16) , и выполнены основные условия согласования (2.3), (2.5) и дополнительные условия согласования*

$$\overline{\mu}_{i+1}\Big(\frac{l}{a}\Big) = \frac{1}{6a^3}\Big[6a^3\overline{\varphi}_0^{(i)}(l) + 6a^2l\overline{\varphi}_1^{(i)}(l) + 3al^2\overline{\varphi}_2^{(i)}(l) + l^3\overline{\varphi}_3^{(i)}(l) - 6a^3\overline{\varphi}_0^{(i+1)}(l)\Big] +$$

$$+\frac{1}{6a^3}\Big[-6a^2l^2\overline{\varphi}_1^{(i+1)}(l) - 3al^3\overline{\varphi}_2^{(i+1)}(l) + 3a^3l^2\overline{\varphi}_0^{(i+2)}(l) + 3a^2l^3\overline{\varphi}_1^{(i+2)}(l) - a^3l^3\overline{\varphi}_0^{(i+3)}(l)\Big],$$

$$\overline{\mu}_{i+1}'\Big(\frac{l}{a}\Big) = \frac{1}{6a^2}\Big[6a^2\overline{\varphi}_1^{(i)}(l) + 6al\overline{\varphi}_2^{(i)}(l) + 3l^2\overline{\varphi}_3^{(i)}(l)\Big] + \frac{1}{6a^2}\Big[-6a^2l\overline{\varphi}_1^{(i+1)}(l) - 6al^2\overline{\varphi}_2^{(i+1)}(l) + l^3\overline{\varphi}_3^{(i+1)}(l)\Big] +$$

$$+\frac{1}{6a^2}\Big[3a^2l^2\overline{\varphi}_1^{(i+2)}(l) - 3al^3\overline{\varphi}_2^{(i+2)}(l) + 3a^2l^3\overline{\varphi}_1^{(i+3)}(l) - a^3l^3\overline{\varphi}_0^{(i+4)}(l)\Big],$$

$$\overline{\mu}_{i+1}''\Big(\frac{l}{a}\Big) = \frac{1}{6a}\Big[6a\overline{\varphi}_2^{(i)}(l) + 6l\overline{\varphi}_3^{(i)}(l) - 6al\overline{\varphi}_2^{(i+1)}(l) + 6l^2\overline{\varphi}_3^{(i+1)}(l) - 15al^2\overline{\varphi}_2^{(i+2)}(l)\Big] +$$

$$+\frac{1}{6a}\Big[l^3\overline{\varphi}_3^{(i+2)}(l) + 12a^2l^2\overline{\varphi}_1^{(i+3)}(l)\Big] +$$

$$+\frac{1}{6a}\Big[-3al^3\overline{\varphi}_2^{(i+3)}(l) - 3a^3l^2\overline{\varphi}_0^{(i+4)}(l) + 3a^2l^3\overline{\varphi}_1^{(i+4)}(l) - a^3l^3\overline{\varphi}_0^{(i+5)}(l)\Big],$$

$$\overline{\mu}_{i+1}^{(3)}\Big(\frac{l}{a}\Big) = \frac{1}{6}\Big[6\overline{\varphi}_3^{(i)}(l) + 18l\overline{\varphi}_3^{(i+1)}(l) - 36al\overline{\varphi}_2^{(i+2)}(l) + 9l^2\overline{\varphi}_3^{(i+2)}(l) + 24a^2l\overline{\varphi}_1^{(i+3)}(l)\Big] +$$

$$+\frac{1}{6}\Big[-24al^2\overline{\varphi}_2^{(i+3)}(l) + l^3\overline{\varphi}_3^{(i+3)}(l) - 6a^3l\overline{\varphi}_0^{(i+4)}(l) + 21a^2l^2\overline{\varphi}_1^{(i+4)}(l) - 3al^3\overline{\varphi}_2^{(i+4)}(l)\Big] +$$

$$+\frac{1}{6}\Big[-6a^3l^2\overline{\varphi}_0^{(i+5)}(l) + 3a^2l^3\overline{\varphi}_1^{(i+5)}(l) - a^3l^3\overline{\varphi}_0^{(i+6)}(l)\Big],\ i=0,1,$$

$$\overline{\mu}_1^{(4)}\Big(\frac{l}{a}\Big) = \frac{a}{6}\Big[24\overline{\varphi}_3'(l) - 36a\overline{\varphi}_2''(l) + 36l\overline{\varphi}_3''(l) + 24a^2\overline{\varphi}_1^{(3)}(l) - 84al\overline{\varphi}_2^{(3)}(l) + 12l^2\overline{\varphi}_3^{(3)}(l)\Big] +$$

$$+\frac{a}{6}\Big[-6a^3\overline{\varphi}_0^{(4)}(l)+66a^2l\overline{\varphi}_1^{(4)}(l)-33al^2\overline{\varphi}_2^{(4)}(l)+l^3\overline{\varphi}_3^{(4)}(l)-18a^3l\overline{\varphi}_0^{(5)}(l)\Big]+$$

$$+\frac{a}{6}\Big[30a^2l^2\overline{\varphi}_1^{(5)}(l)-3al\overline{\varphi}_2^{(5)}(l)-9a^3l^2\overline{\varphi}_0^{(6)}(l)+3a^2l^3\overline{\varphi}_1^{(6)}(l)-a^3l^3\overline{\varphi}_0^{(7)}(l)\Big],$$

$$\overline{\mu}_2^{(4)}\Big(\frac{l}{a}\Big)-\frac{1}{a}\overline{\mu}_1^{(5)}\Big(\frac{l}{a}\Big)=\frac{a}{2}\Big[-12\overline{\varphi}_3''(l)+28a\overline{\varphi}_2^{(3)}(l)-8l\overline{\varphi}_3^{(3)}(l)-22a^2\overline{\varphi}_1^{(4)}(l)\Big]+$$

$$+\frac{a}{2}\Big[22al\overline{\varphi}_2^{(4)}(l)-l^2\overline{\varphi}_3^{(4)}(l)+6a^3\overline{\varphi}_0^{(5)}(l)-20a^2l\overline{\varphi}_1^{(5)}(l)+3al\overline{\varphi}_2^{(5)}(l)\Big]+$$

$$+\frac{a}{2}\Big[6a^3l\overline{\varphi}_0^{(6)}(l)-3a^2l^2\overline{\varphi}_1^{(6)}(l)+a^3l^2\overline{\varphi}_0^{(7)}(l)\Big],$$

$$\overline{\nu}_1^{(5)}(0)-a\overline{\nu}_2^{(4)}(0)=6a^2\overline{\varphi}_3''(l)-12a^3\overline{\varphi}_2^{(3)}(l)+11a^4\overline{\varphi}_1^{(4)}(l)-3a^5\overline{\varphi}_0^{(5)}(l). \tag{2.17}$$

Тогда в классе функций $C^{(4)}(\overline{Q})$ смешанная задача (2.7)–(2.10) имеет единственное классическое решение, определяемое формулами (2.13), (2.14).

Доказательство. Доказательство теоремы рассмотрено в работе [5]. Дополнительные условия согласования (2.17) получены из условия непрерывности решения (2.13) и (2.14) и непрерывности их производных до четвертого порядка включительно на характеристике $x+$ $+at=l$. При выводе условий используется тот факт, что решение имеет вид полинома третьей степени.

Перейдем к рассмотрению исходной задачи (1.1)–(1.4). Учитывая замену (2.6), а также вид начальных и граничных условий (2.11), (2.12), сформулированную выше теорему можно представить в виде.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены требования гладкости начальных и граничных данных (2.15) и (2.16) , и выполнены основные условия согласования (2.3), (2.4) и дополнительные условия согласования (2.17) с учетом формул (2.11), (2.12). Тогда в классе функций $C^{(4)}(\overline{Q})$ смешанная задача (1.1)–(1.4) имеет единственное классическое решение*

$$u_0(t,x)=e^{-bt}\Big\{\varphi_0(x+at)+t\big[\varphi_1(x+at)+b\varphi_0(x+at)-a\varphi_0'(x+at)\big]+$$

$$+\frac{1}{2}t^2\big[\varphi_2(x+at)+2b\varphi_1(x+at)+b^2\varphi_0(x+at)-2a\big(\varphi_1'(x+at)+b\varphi_0'(x+at)\big)+a^2\varphi_0''(x+at)\big]+$$

$$+\frac{1}{6}t^3\big[\varphi_3(x+at)+3b\varphi_2(x+at)+3b^2\varphi_1(x+at)+b^3\varphi_0(x+at)-3a\big(\varphi_2'(x+at)+2b\varphi_1'(x+at)+$$

$$+b^2\varphi_0'(x+at)\big)+3a^2\big(\varphi_1''(x+at)+2b\varphi_0''(x+at)-a^3\varphi_0^{(3)}(x+at)\big)\big]\Big\},\quad (t,x)\in Q^{(0)},$$

$$u_1(t,x)=e^{-bt}\Big\{\frac{(l-x)^2(l+2x)}{l^3}\,\mu_1\Big(t+\frac{l}{a}\Big)+\frac{x(l-x)^2}{l^2}\,\mu_2\Big(t+\frac{l}{a}\Big)+\frac{x^2(3l-2x)}{l^3}\,\nu_1\Big(t-\frac{l-x}{a}\Big)-$$

$$-\frac{x^2(l-x)}{l^2}\,\nu_2\Big(t-\frac{l-x}{a}\Big)-\frac{x(l-x)^2}{al^2}\,\mu_1'\Big(t+\frac{l}{a}\Big)+\frac{x^2(l-x)}{al^2}\,\nu_1'\Big(t-\frac{l-x}{a}\Big)\Big\},\ (t,x)\in Q^{(1)}.$$

3. Заключение

В работе построено единственное классическое решение смешанной задачи в полуполосе для линейного нестрого гиперболического однородного уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами, оператор которого представляет собой произведение одинаковых операторов первого порядка. Получены достаточные требования гладкости входных данных (начальных и граничных функций) и достаточные условия согласования граничных условий с начальными условиями и уравнением. Показано, что при рассмотрении граничной задачи для гиперболического уравнения с кратными характеристиками требования на гладкость начальных и граничных функций повышаются с увеличением кратности характеристик.

Литература

1. *Корзюк В.И. Уравнения математической физики.* М.: ЛЕНАНД, 2021.

2. *Корзюк В.И., Чеб Е.С.* Граничная задача с условиями Неймана для нестрого гиперболического уравнения второго порядка. *Вестник БГУ. Сер.1.* No 2 (2014), 71–76.

3. *Ломовцев Ф.Е., Юрчук Н.И.* Решение начально-краевой задачи для нестрого гиперболического уравнения при смешанных граничных условиях в четверти плоскости. *Весці НАНБ.* No 3 (2016), 51–57.

4. *Петков В.М., Иврий Н.И.* Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений. *Успехи матем. наук.* Т. 29, No 5 (1974), 3–70.

5. *Чеб Е.С.* Классическое решение смешанной задачи для линейного гиперболического уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками. *Вестник ГГУ. Сер.2.* Т. 7, No 3 (2017), 33–41.

6. *Чеб Е.С., Симинская Е.С.* О классическом решении смешанной задачи для линейного нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка с одной кратной характеристикой. *Прикладная математика & Физика.* Т. 1, No 1 (2020), 11–18.

7. *Ломовцев Ф.Е.* Критерий корректности смешанной задачи для одного параболического уравнения на отрезке со смешанными граничными условиями на концах. *Материалы Междунар. конференции "Воронежская зимняя математическая школа". Воронеж: ВГУ.* (2019), 184–185.