УДК 330.4

АНАЛИТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ УЧЕТА АВТОНОМНОГО ЭКЗОГЕННОГО НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА В ТРЕХФАКТОРНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ

А. Ф. Проневич[1], Г. А. Хацкевич[2]

e-mail: [1]pranevich@grsu.by, [2]Khatskevich@sbmt.by

Для динамических трехфакторных производственных функций представлена классификация учета автономного экзогенного научно-технического прогресса. Установлены аналитические критерии того, что заданная динамическая трехфакторная производственная функция учитывает продуктоувеличивающий научно-технический прогресс, трудодобавляющий научно-технический прогресс, капиталодобавляющий научно-технический прогресс и природодобавляющий научно-технический прогресс.

Ключевые слова: *производственная функция; научно-технический прогресс (НТП); продуктоувеличивающий НТП; капиталодобавляющий НТП; трудодобавляющий НТП; природодобавляющий НТП.*

ANALYTICAL CRITERIA OF ACCOUNTING FOR AUTONOMOUS EXOGENOUS TECHNOLOGICAL PROGRESS IN THREE-FACTOR PRODUCTION FUNCTIONS

A. F. Pranevich[1], G. A. Khatskevich[2]

e-mail: [1]pranevich@grsu.by, [2]Khatskevich@sbmt.by

In this article, we presented a classification of autonomous exogenous technological progress for dynamic three-factor production functions. The analytical criteria that dynamic three-factor production functions have product-augmenting technological progress, labor-augmenting technological progress, capital-augmenting technological progress, and environment-augmenting technological progress are proved.

Keywords: *production function; technological progress; product-augmenting technological progress; capital-augmenting technological progress, labor-augmenting technological progress; environment-augmenting technological progress.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 91B02, Secondary 91B32.

1. Введение

Экономический рост любой страны складывается под воздействием многих составляющих, таких, как характер социальных институтов, отраслевая и воспроизводственная структура народного хозяйства, место и роль страны в системе международных отношений, природные условия и т.д. Агрегированно эти все составляющие можно представить в виде четырех факторов экономического роста [1, с. 982]: капитал (оборудование, фабрики, заводы, дороги и т.п.); человеческие ресурсы (предложение труда, образование, дисциплина, мотивация); природные ресурсы (земля, полезные ископаемые, топливо, качество окружающей среды); научно-технический прогресс (наука, технологии, инжиниринг, менеджмент, предпринимательство). Однако, начиная с начала прошлого века на первое место среди этих факторов во всех экономически развитых странах вышел научно-технический прогресс (НТП). Именно НТП на современном этапе в решающей степени определяет темпы и пропорции экономического роста в этих странах, поскольку возможности экстенсивного расширения производства в основном исчерпаны.

В современной экономической литературе нет однозначной трактовки понятия «научно-технический прогресс» (см., например, [2, с. 77–78; 3]). Существует множество различных определений, объяснений и толкований этого термина, подчас диаметрально противоположных. Однако условно можно выделить «экономико-инженерную» и «затратно-результатную» трактовки НТП [4, с. 29–30], причем первая трактовка является традиционной [5; 6]. При экономико-инженерной трактовке под НТП понимается перестройка технического базиса производства, совершенствование средств труда, улучшение организации трудовой деятельности, использование новых видов сырья и энергии, появление новых продуктов и технологий, а также повышение образовательного уровня рабочей силы и происходящее с течением времени изменения профессионально-квалификационной структуры занятых. В рамках такого подхода обычно не принимаются во внимание ни затраты, связанные с НТП, ни эффективность его реализации. В случае же затратно-результатной трактовки НТП рассматривается прежде всего с точки зрения экономического результата, безотносительно к материальному содержанию процессов, изменяющих облик производства. С этой точки зрения НТП имеет место тогда и только тогда, когда происходит повышение эффективности хозяйственной деятельности, т.е. отдача от используемых производственных факторов растет. Данная трактовка НТП сформировалась и получила первоначальное развитие в рамках теории производственных функций [2; 7; 8], а затем, вышла далеко за рамки этой экономической концепции. Отметим и то, что для экономической теории и практики одинаково важны эти два подхода к анализу НТП: изучение как материальных процессов, составляющих основу НТП, так и экономической эффективности НТП. Выбор того или иного подхода полностью зависит от объекта и цели проводимого исследования. В данной работе используется затратно-результатная трактовка НТП на основе теории динамических производственных функций. Наиболее простым способом отражения НТП в рамках макроэкономических производственных функций является такой, при котором НТП задается экзогенно как функция времени, а его воздействие на экономику проявляется лишь в повышении эффективности производства, т.е. в возможности увеличения выпуска продукции без привлечения дополнительных ресурсов. Такое модельное построение называется концепцией экзогенного НТП. При принятии этой концепции динамическая агрегированная производственная функция (ПФ) имеет аналитический вид [9]

$$Y = F(K, L, N, t), \tag{1.1}$$

где Y — выпуск продукции, K — капитал, L — трудовые ресурсы, N — природные ресурсы (земля, нефть, газ и др.), t — параметр времени из числового луча $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$, каждое значение которого выражает определенный уровень НТП, а неотрицательная функция F является дважды непрерывно дифференцируемой на множестве $D = G \times \mathbb{R}_+$, экономическая область $G \subset \mathbb{R}^3_+ = \{(K, L, N) \in \mathbb{R}^3 \colon K \geq 0,\ L \geq 0,\ N \geq 0\}$.

В рамках ПФ (1.1) капитал, труд и природные ресурсы являются агрегированными и не различаются по «возрасту» (капитал — по времени ввода в строй, рабочая сила — по времени начала трудовой деятельности). Таким образом, при использовании агрегированной ПФ (1.1) предполагается, что НТП одинаково воздействует как на вновь вводимые, так и на уже функционирующие производственные ресурсы. Такой НТП называется автономным.

Обе гипотезы (экзогенность и автономность) являются существенным упрощением реальности, но для многих задач, особенно для анализа долгосрочных тенденций, они могут рассматриваться как приемлемые. Из реальных процессов, на которых обычно фокусируется изучение НТП, этим гипотезам в наибольшей степени удовлетворяют совершенствование организации и управления производством, рационализация хозяйственных связей, изменения в отраслевой структуре производства, в меньшей степени — повышение квалификации и образовательного уровня рабочей силы. Автономность и экзогенность НТП — две совершенно различные и не связанные друг с другом концепции, которые отражают различные свойства НТП в рамках теории макроэкономических ПФ. Экзогенность означает, что НТП никак не связан с динамикой экономических показателей, а автономность — НТП одинаково воздействует на ресурсы разного возраста. Альтернативным понятием к экзогенному НТП является эндогенный НТП, а к автономному НТП — материализованный (или воплощенный) НТП. При этом [4, с. 31] термины «автономный» и «материализованный» не очень удачны, однако они являются довольно устоявшиеся в литературе, посвященной макроэкономическим динамическим ПФ.

При анализе НТП в рамках некоторой конкретной экономической единицы, рассматриваемой в определенный период времени, прежде всего необходимо конкретизировать зависимость в рамках аналитического представления ПФ (1.1). Этот выбор осуществляется из содержательных представлений о моделируемом объекте и о существе решаемой задачи. Для динамической трехфакторной ПФ (1.1) будем использовать следующую классификацию учета автономного экзогенного НТП (для двухфакторной ПФ см., например, [10, с. 83–85; 11–14]):

1. *Продуктоувеличивающий* НТП

$$F(K, L, N, t) = A(t)\widetilde{F}(K, L, N), \tag{1.2}$$

где строго возрастающая функция $A(t)$ есть индекс НТП, увеличивающий выпуск продукции;

2. *Капиталодобавляющий* (или *капиталосберегающий*) НТП

$$F(K, L, N, t) = \widetilde{F}(A(t)\,K, L, N), \tag{1.3}$$

трудодобавляющий (или *трудосберегающий*) НТП $F(K, L, N, t) = \widetilde{F}(K, B(t)\,L, N)$ и *природодобавляющий* (или *природосберегающий*) НТП $F(K, L, N, t) = \widetilde{F}(K, L, C(t)\,N)$;

3. *Капитало- и трудодобавляющий* НТП

$$F(K, L, N, t) = \widetilde{F}(A(t)\,K, B(t)\,L, N), \tag{1.4}$$

капитало- и природодобавляющий НТП $F(K, L, N, t) = \widetilde{F}(A(t)\,K, L, C(t)\,N)$, *трудо- и природодобавляющий* НТП $F(K, L, N, t) = \widetilde{F}(K, B(t)\,L, C(t)\,N)$;

4. *Капитало-, трудо- и природодобавляющий* НТП

$$F(K, L, N, t) = \widetilde{F}(A(t)\,K, B(t)\,L, C(t)\,N), \tag{1.5}$$

где строго возрастающие функции $A(t),\ B(t)$ и $C(t)$ такие, что $A(0) = B(0) = C(0) = 1$, представляют собой индексы НТП по капиталу, труду и природным ресурсам, соответственно, а трехфакторная функция $\widetilde{F}$ является дважды непрерывно дифференцируемой на области G.

Отметим, что значимость использования трехфакторных ПФ (1.1) в экономическом анализе впервые была теоретически обоснована в монографии английского экономиста Д.Э. Мида [9]. В настоящее время, модели экономического роста с трехфакторными ПФ применяются для изучения «голландской болезни» и «ресурсного проклятия» (см., например, [15; 16]).

В данной работе авторами получены аналитические критерии того, что динамическая трехфакторная ПФ (1.1) учитывает автономный экзогенный НТП. Способ доказательства и установления аналитической формы ПФ основан на нахождении решений линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [17, с. 255–256].

2. Продуктоувеличивающий НТП

Приведем аналитические критерии учета ПФ (1.1) продуктоувеличивающего НТП.

Теорема 2.1. *Динамическая трехфакторная ПФ* (1.1) *учитывает продуктоувеличивающий НТП тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств*

$$\begin{gathered}\partial_K \ln F(K, L, N, t) = \varphi(K, L, N), \quad \partial_L \ln F(K, L, N, t) = \psi(K, L, N), \\ \partial_N \ln F(K, L, N, t) = \rho(K, L, N) \quad \forall (K, L, N, t) \in G' \times T' \subset G \times T,\end{gathered} \tag{2.1}$$

где φ, ψ и ρ — некоторые непрерывно дифференцируемые на области $G' \subset G$ функции, которые не зависят от параметра НТП t.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть ПФ (1.1) учитывает продуктоувеличивающий НТП. Тогда ее можно представить в аналитической форме (1.2). Частные производные

$$\partial_K \ln F(K,L,N,t) = \frac{\partial_K F(K,L,N,t)}{F(K,L,N,t)} = \frac{\partial_K \big(A(t)\widetilde{F}(K,L,N)\big)}{A(t)\widetilde{F}(K,L,N)} = \frac{\partial_K \widetilde{F}(K,L,N)}{\widetilde{F}(K,L,N)} = \partial_K \ln \widetilde{F}(K,L,N),$$

$$\partial_L \ln F(K,L,N,t) = \frac{\partial_L F(K,L,N,t)}{F(K,L,N,t)} = \frac{\partial_L \big(A(t)\widetilde{F}(K,L,N)\big)}{A(t)\widetilde{F}(K,L,N)} = \frac{\partial_L \widetilde{F}(K,L,N)}{\widetilde{F}(K,L,N)} = \partial_L \ln \widetilde{F}(K,L,N),$$

$$\partial_N \ln F(K,L,N,t) = \frac{\partial_N F(K,L,N,t)}{F(K,L,N,t)} = \frac{\partial_N \big(A(t)\widetilde{F}(K,L,N)\big)}{A(t)\widetilde{F}(K,L,N)} = \frac{\partial_N \widetilde{F}(K,L,N)}{\widetilde{F}(K,L,N)} = \partial_N \ln \widetilde{F}(K,L,N),$$

а значит, на области $G' \times T'$ имеет место система тождеств (2.1) при $\varphi(K,L,N) = \partial_K \ln \widetilde{F}(K,L,N)$, $\psi(K,L,N) = \partial_L \ln \widetilde{F}(K,L,N)$, $\rho(K,L,N) = \partial_N \ln \widetilde{F}(K,L,N)$.

Достаточность. Пусть динамическая ПФ (1.1) такова, что выполняются тождества (2.1). Тогда из первого уравнения системы уравнений в частных производных (2.1) находим, что

$$\ln F(K,L,N,t) = \int \varphi(K,L,N)\,dK + C(L,N,t),$$

где $C(L,N,t)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Подставляя это выражение во второе уравнение системы уравнений в частных производных первого порядка (2.1), получаем

$$\int \partial_L \varphi(K,L,N)\,dK + \partial_L C(L,N,t) = \psi(K,L,N).$$

Отсюда следует, что функция $\partial_L C(L,N,t)$ не зависит от параметра НТП t, а является функцией только от двух переменных L и N, т.е. $\partial_L C(L,N,t) = \widetilde{C}(L,N)$, а значит, функция $C(L,N,t) = \int \widetilde{C}(L,N)\,dL + \widetilde{A}(t)$.

Следовательно, функция

$$F(K,L,N,t) = \exp\bigg(\int \varphi(K,L,N)\,dK + \int \widetilde{C}(L,N)\,dL + \widetilde{A}(t)\bigg) = A(t)\widetilde{F}(K,L,N),$$

где приняты следующие обозначения

$$A(t) = \exp \widetilde{A}(t), \quad \widetilde{F}(K,L,N) = \exp\bigg(\int \varphi(K,L,N)\,dK + \int \widetilde{C}(L,N)\,dL\bigg).$$

Таким образом, для динамической трехфакторной ПФ (1.1) имеет место представление (1.2), а значит, ПФ (1.1) учитывает продуктоувеличивающий НТП. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Теорему 2.1 можно сформулировать в следующей форме: динамическая ПФ (1.1) учитывает продуктоувеличивающий НТП, если и только если непрерывные темпы прироста по капиталу, по труду и по природным ресурсам не зависят от параметра НТП.

Теорема 2.2. *Для того, чтобы динамическая трехфакторная ПФ (1.1) учитывала продуктоувеличивающий НТП необходимо и достаточно выполнения тождества*

$$\partial_t \ln F(K,L,N,t) = \theta(t) \quad \forall (K,L,N,t) \in G' \times T', \tag{2.2}$$

где θ — некоторая функция (темп прироста индекса НТП), которая зависит только от параметра НТП t.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть ПФ (1.1) учитывает продуктоувеличивающий НТП. Тогда ее можно представить в аналитической форме (1.2). Частная производная

$$\partial_t \ln F(K,L,N,t) = \frac{\partial_t F(K,L,N,t)}{F(K,L,N,t)} = \frac{\partial_t\big(A(t)\widetilde{F}(K,L,N)\big)}{A(t)\widetilde{F}(K,L,N)} = \frac{A'(t)}{A(t)}\,,$$

а значит, верно тождество (2.2) при $\theta(t) = A'(t)/A(t)\ \ \forall t \in T'$.

Достаточность. Пусть для ПФ (1.1) выполняется тождество (2.2). Тогда

$$\ln F(K,L,N,t) = \int \theta(t)\,dt + C(K,L,N),$$

где C — произвольная функция (постоянная интегрирования). Значит, функция

$$F(K,L,N,t) = \exp\Big(\int \theta(t)\,dt + C(K,L,N)\Big) = A(t)\widetilde{F}(K,L,N),$$

где положено $A(t) = \exp\int \theta(t)\,dt$ и $\widetilde{F}(K,L,N) = \exp C(K,L,N)$.

Таким образом, для динамической трехфакторной ПФ (1.1) верно представление (1.2), а значит, она учитывает продуктоувеличивающий НТП. Теорема доказана.

3. Капиталодобавляющий НТП

Приведем критерии того, что ПФ (1.1) учитывает капиталодобавляющий НТП (теорема 3.1), трудодобавляющий НТП (теорема 3.2) и природодобавляющий НТП (теорема 3.3).

Теорема 3.1. *Динамическая трехфакторная ПФ* (1.1) *учитывает капиталодобавляющий НТП, если и только если выполняется тождество*

$$\frac{\partial_t F(K,L,N,t)}{K\,\partial_K F(K,L,N,t)} = \alpha(t) \quad \forall (K,L,N,t) \in G' \times T' \subset G \times T, \tag{3.1}$$

где α есть скалярная функция, зависящая только от параметра НТП t.

Доказательство. *Необходимость.* Если динамическая ПФ (1.1) учитывает капиталодобавляющий НТП, то, на основании представления (1.3), получаем, что отношение

$$\frac{\partial_t F(K,L,N,t)}{K\,\partial_K F(K,L,N,t)} = \frac{\partial_t \widetilde{F}(A(t)\,K,L,N)}{K\,\partial_K \widetilde{F}(A(t)K,L,N)} =$$

$$= \frac{\partial_\xi \widetilde{F}(\xi,L,N)\big|_{\xi=A(t)K}\,\partial_t\big(A(t)K\big)}{K\,\partial_\xi \widetilde{F}(\xi,L,N)\big|_{\xi=A(t)K}\,\partial_K\big(A(t)K\big)} = \frac{A'(t)}{A(t)} \quad \forall (K,L,N,t) \in G' \times T',$$

т.е имеет место тождество (3.1) при скалярной функции $\alpha(t) = A'(t)/A(t)\ \ \forall t \in T'$.

Достаточность. Пусть ПФ (1.1) удовлетворяет тождеству (3.1). Тогда она будет решением дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$\partial_t F - \alpha(t) K\,\partial_K F = 0. \tag{3.2}$$

Для дифференциального уравнения (3.2) запишем характеристическую систему

$$\frac{dK}{-\,\alpha(t)K} = \frac{dL}{0} = \frac{dN}{0} = \frac{dt}{1}\,.$$

Из дифференциального уравнения $\dfrac{dK}{-\,\alpha(t)K} = \dfrac{dt}{1}$, разделяя переменные, находим

$$\ln K + \int \alpha(t)\,dt = \widetilde{C}_1, \qquad K \exp\int \alpha(t)\,dt = C_1,$$

где $C_1 = \exp \widetilde{C}_1$, а $\widetilde{C}_1$ — произвольная вещественная постоянная.

Из дифференциальных уравнений $\dfrac{dL}{0} = \dfrac{dt}{1}$ и $\dfrac{dN}{0} = \dfrac{dt}{1}$ находим первые интегралы $L = C_2$ и $N = C_3$, где C_2 и C_3 — произвольные вещественные постоянные.

Тогда общее решение дифференциального уравнения (3.2) имеет вид

$$F(K, L, N, t) = \widetilde{F}\Big(K \exp \int \alpha(t)\, dt, L, N\Big) = \widetilde{F}(A(t)K, L, N),$$

где $\widetilde{F}$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция от трех переменных, а индекс НТП по капиталу есть функция $A(t) = \exp \int \alpha(t)\, dt$.

Следовательно, на основании представления (1.3) получаем, что функция (1.1) учитывает капиталодобавляющий НТП. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Тождество (3.1) можно записать в аналитической форме

$$\partial_t \ln F(K, L, N, t) = \alpha(t)\, E_K(F) \quad \forall (K, L, N, t) \in G' \times T',$$

где $E_K(F)$ есть эластичность выпуска по капиталу, а теорему 3.1 сформулировать в следующем виде: динамическая ПФ (1.1) учитывает капиталодобавляющий НТП, если и только если непрерывный темп прироста по параметру НТП является линейно связанным через некоторую функцию от параметра НТП с эластичностью выпуска по капиталу.

Аналогично теореме 3.1 доказываются следующие утверждения (теоремы 3.2 и 3.3).

Теорема 3.2. *Динамическая трехфакторная ПФ* (1.1) *учитывает трудодобавляющий НТП в том и только в том случае, когда имеет место тождество*

$$\frac{\partial_t F(K, L, N, t)}{L\, \partial_L F(K, L, N, t)} = \beta(t) \quad \forall (K, L, N, t) \in G' \times T' \subset G \times T,$$

где β есть скалярная функция, зависящая только от параметра НТП t.

Замечание 3.2. Теорему 3.2 можно сформулировать в следующем виде: динамическая трехфакторная ПФ (1.1) учитывает трудодобавляющий НТП, если и только если непрерывный темп прироста по параметру НТП является линейно связанным через некоторую функцию от параметра НТП с эластичностью выпуска по трудовым ресурсам.

Теорема 3.3. *Динамическая трехфакторная ПФ* (1.1) *учитывает природодобавляющий НТП тогда и только тогда, когда имеет место тождество*

$$\frac{\partial_t F(K, L, N, t)}{N\, \partial_N F(K, L, N, t)} = \gamma(t) \quad \forall (K, L, N, t) \in G' \times T' \subset G \times T,$$

где γ есть скалярная функция, зависящая только от параметра НТП t.

Замечание 3.3. Теорему 3.3 можно сформулировать в следующем виде: динамическая трехфакторная ПФ (1.1) учитывает природодобавляющий НТП, если и только если непрерывный темп прироста по параметру НТП является линейно связанным через некоторую функцию от параметра НТП с эластичностью выпуска по природным ресурсам.

4. Капитало- и трудодобавляющий НТП

Теорема 4.1. *Динамическая трехфакторная ПФ* (1.1) *учитывает капитало- и трудодобавляющий НТП тогда и только тогда, когда темп прироста по параметру НТП является линейно связанным через некоторые функции от параметра НТП с эластичностями выпуска продукции по капиталу и труду, т.е. верно тождество*

$$\partial_t \ln F(K,L,N,t) = \alpha(t)\, E_K(F) + \beta(t)\, E_L(F) \quad \forall (K,L,N,t) \in G' \times T', \tag{4.1}$$

где α и β есть некоторые функции, зависящая только от параметра НТП t, а $E_K(F)$ и $E_L(F)$ есть эластичности выпуска продукции по капиталу и по труду, соответственно.

Доказательство. *Необходимость.* Если ПФ (1.1) учитывает капитало- и трудодобавляющий НТП, то, на основании представления (1.4), находим темп прироста по параметру НТП:

$$\partial_t \ln F(K,L,N,t) = \frac{\partial_t F(K,L,N,t)}{F(K,L,N,t)} = \frac{\partial_t \widetilde{F}(A(t)\,K, B(t)\,L, N)}{\widetilde{F}(A(t)\,K, B(t)\,L, N)} =$$

$$= \frac{\partial_\xi \widetilde{F}(\xi,\zeta,N)\Big|_{\substack{\xi = A(t)K \\ \zeta = B(t)L}} \partial_t\big(A(t)K\big) + \partial_\zeta \widetilde{F}(\xi,\zeta,N)\Big|_{\substack{\xi = A(t)K \\ \zeta = B(t)L}} \partial_t\big(B(t)L\big)}{\widetilde{F}(A(t)\,K, B(t)\,L, N)} =$$

$$= \frac{A'(t)\,K}{F(K,L,N,t)}\, \partial_\xi \widetilde{F}(\xi,\zeta,N)\Big|_{\substack{\xi = A(t)K \\ \zeta = B(t)L}} + \frac{B'(t)\,L}{F(K,L,N,t)}\, \partial_\zeta \widetilde{F}(\xi,\zeta,N)\Big|_{\substack{\xi = A(t)K \\ \zeta = B(t)L}} =$$

$$= A'(t)\, E_K(F) + B'(t)\, E_L(F) \quad \forall (K,L,N,t) \in G' \times T',$$

т.е имеет место тождество (4.1) при скалярных функциях $\alpha(t) = A'(t)$ и $\beta(t) = B'(t)$.

Достаточность. Пусть ПФ (1.1) удовлетворяет тождеству (4.1). Тогда она будет решением дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$\partial_t F - \alpha(t) K\, \partial_K F - \beta(t) L\, \partial_L F = 0. \tag{4.2}$$

Для дифференциального уравнения (4.2) запишем характеристическую систему

$$\frac{dK}{-\,\alpha(t)K} = \frac{dL}{-\,\beta(t)L} = \frac{dN}{0} = \frac{dt}{1}\,.$$

Из дифференциального уравнения $\dfrac{dK}{-\,\alpha(t)K} = \dfrac{dt}{1}$, разделяя переменные, находим

$$\ln K + \int \alpha(t)\, dt = \widetilde{C}_1, \qquad K \exp \int \alpha(t)\, dt = C_1,$$

где $C_1 = \exp \widetilde{C}_1$, а $\widetilde{C}_1$ — произвольная вещественная постоянная.

Из дифференциального уравнения $\dfrac{dL}{-\,\beta(t)L} = \dfrac{dt}{1}$, разделяя переменные, находим

$$\ln L + \int \beta(t)\, dt = \widetilde{C}_2, \qquad L \exp \int \beta(t)\, dt = C_2,$$

где $C_2 = \exp \widetilde{C}_2$, а $\widetilde{C}_2$ — произвольная вещественная постоянная.

Из дифференциального уравнения $\dfrac{dN}{0} = \dfrac{dt}{1}$ находим первый интеграл $N = C_3$, где C_3 — произвольная вещественная постоянная.

Тогда общее решение дифференциального уравнения (4.2) имеет вид

$$F(K,L,N,t) = \widetilde{F}\Big(K \exp\int \alpha(t)\, dt,\ L \exp\int \beta(t)\, dt, N\Big) = \widetilde{F}(A(t)K, B(t)L, N),$$

где $\widetilde{F}$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция от трех переменных, а индексы НТП по капиталу и по труду соответственно равны $A(t) = \exp\int \alpha(t)\, dt$ и $B(t) = \exp\int \beta(t)\, dt$.

Следовательно, на основании представления (1.4) получаем, что функция (1.1) учитывает капитало- и трудодобавляющий НТП. Теорема доказана.

В случае, когда индексы НТП по капиталу и по трудовым ресурсам равны, т.е. $A(t) \equiv B(t)$, из теоремы 4.1 получаем следующее утверждение.

Следствие 4.1. *Динамическая трехфакторная ПФ* (1.1) *учитывает капитало- и трудодобавляющий НТП с равными индексами НТП по капиталу и по трудовым ресурсам в том и только в том случае, когда имеет место тождество*

$$\frac{\partial_t F(K,L,N,t)}{K\,\partial_K F(K,L,N,t) + L\,\partial_L F(K,L,N,t)} = \alpha(t) \quad \forall (K,L,N,t) \in G' \times T' \subset G \times T,$$

где α есть некоторая скалярная функция, зависящая только от параметра НТП t.

Методом, аналогичным использованному при доказательстве утверждения теоремы 4.1, устанавливаем критерии учета в задании динамической ПФ (1.1) капитало- и природодобавляющего НТП (теорема 4.2) и трудо- и природодобавляющего НТП (теорема 4.3).

Теорема 4.2. *Динамическая трехфакторная ПФ* (1.1) *учитывает капитало- и природодобавляющий НТП в том и только в том случае, когда темп прироста по параметру НТП является линейно связанным через некоторые функции от параметра НТП с эластичностями выпуска продукции по капиталу и природным ресурсам, т.е. имеет место тождество*

$$\partial_t \ln F(K,L,N,t) = \alpha(t)\,E_K(F) + \gamma(t)\,E_N(F) \quad \forall (K,L,N,t) \in G' \times T',$$

где α и γ есть некоторые функции, зависящая только от параметра НТП, а $E_K(F)$ и $E_N(F)$ есть эластичности выпуска продукции по капиталу и природным ресурсам, соответственно.

Теорема 4.3. *Динамическая трехфакторная ПФ* (1.1) *учитывает трудо- и природодобавляющий НТП в том и только в том случае, когда темп прироста по параметру НТП является линейно связанным через некоторые функции от параметра НТП с эластичностями выпуска продукции по труду и природным ресурсам, т.е. имеет место тождество*

$$\partial_t \ln F(K,L,N,t) = \beta(t)\,E_L(F) + \gamma(t)\,E_N(F) \quad \forall (K,L,N,t) \in G' \times T',$$

где β и γ есть некоторые функции, зависящая только от параметра НТП, а $E_L(F)$ и $E_N(F)$ есть эластичности выпуска продукции по труду и по природным ресурсам, соответственно.

5. Капитало-, трудо- и природодобавляющий НТП

Теорема 5.1. *Динамическая трехфакторная ПФ* (1.1) *учитывает капитало-, трудо- и природодобавляющий НТП тогда и только тогда, когда темп прироста по параметру НТП является линейно связанным через некоторые функции от параметра НТП с эластичностями выпуска продукции по капиталу, труду и природным ресурсам, т.е. верно тождество*

$$\partial_t \ln F(K,L,N,t) = \alpha(t)\,E_K(F) + \beta(t)\,E_L(F) + \gamma(t)\,E_N(F) \quad \forall (K,L,N,t) \in G' \times T', \tag{5.1}$$

где α, β и γ есть некоторые скалярные функции, зависящая только от параметра НТП t, а $E_K(F)$, $E_L(F)$ и $E_N(F)$ есть эластичности выпуска продукции по капиталу, по трудовым ресурсам и по природным ресурсам, соответственно.

Доказательство. *Необходимость.* Если ПФ (1.1) учитывает капитало-, трудо- и придобавляющий НТП, то, на основании (1.5), находим темп прироста по параметру НТП:

$$\partial_t \ln F(K,L,N,t) = \frac{\partial_t F(K,L,N,t)}{F(K,L,N,t)} = \frac{\partial_t \widetilde{F}(A(t)\,K, B(t)\,L, C(t)\,N)}{\widetilde{F}(A(t)\,K, B(t)\,L, C(t)\,N)} =$$

$$= \frac{\Big(\partial_\xi \widetilde{F}(\xi,\zeta,\rho)\,\partial_t\big(A(t)K\big) + \partial_\zeta \widetilde{F}(\xi,\zeta,\rho)\,\partial_t\big(B(t)L\big) + \partial_\rho \widetilde{F}(\xi,\zeta,\rho)\,\partial_t\big(C(t)N\big)\Big)\Big|_{\substack{\xi = A(t)K\\ \zeta = B(t)L\\ \rho = C(t)N}}}{\widetilde{F}(A(t)\,K, B(t)\,L, C(t)\,N)} =$$

$$= \left(\frac{A'(t)\,K}{F(K,L,N,t)}\,\partial_\xi \widetilde{F}(\xi,\zeta,\rho) + \frac{B'(t)\,L}{F(K,L,N,t)}\,\partial_\zeta \widetilde{F}(\xi,\zeta,\rho) + \frac{C'(t)\,N}{F(K,L,N,t)}\,\partial_\rho \widetilde{F}(\xi,\zeta,\rho)\right)\Bigg|_{\substack{\xi=A(t)K\\ \zeta=B(t)L\\ \rho=C(t)N}} =$$

$$= A'(t)\,E_K(F) + B'(t)\,E_L(F) + C'(t)\,E_N(F) \quad \forall (K,L,N,t) \in G' \times T',$$

т.е имеет место тождество (5.1) при функциях $\alpha(t) = A'(t),\ \beta(t) = B'(t)$ и $\gamma(t) = C'(t)$.

Достаточность. Пусть ПФ (1.1) удовлетворяет тождеству (5.1). Тогда она будет решением дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$\partial_t F - \alpha(t) K\,\partial_K F - \beta(t) L\,\partial_L F - \gamma(t) N\,\partial_N F = 0. \tag{5.2}$$

Для дифференциального уравнения (5.2) запишем характеристическую систему

$$\frac{dK}{-\,\alpha(t)K} = \frac{dL}{-\,\beta(t)L} = \frac{dN}{-\,\gamma(t)N} = \frac{dt}{1}\,.$$

Из дифференциального уравнения $\dfrac{dK}{-\,\alpha(t)K} = \dfrac{dt}{1}$, разделяя переменные, находим

$$\ln K + \int \alpha(t)\,dt = \widetilde{C}_1, \qquad K \exp \int \alpha(t)\,dt = C_1,$$

где $C_1 = \exp \widetilde{C}_1$, а $\widetilde{C}_1$ — произвольная вещественная постоянная.

Из дифференциального уравнения $\dfrac{dL}{-\,\beta(t)L} = \dfrac{dt}{1}$, разделяя переменные, находим

$$\ln L + \int \beta(t)\,dt = \widetilde{C}_2, \qquad L \exp \int \beta(t)\,dt = C_2,$$

где $C_2 = \exp \widetilde{C}_2$, а $\widetilde{C}_2$ — произвольная вещественная постоянная.

Из дифференциального уравнения $\dfrac{dN}{-\,\gamma(t)N} = \dfrac{dt}{1}$, разделяя переменные, находим

$$\ln N + \int \gamma(t)\,dt = \widetilde{C}_3, \qquad N \exp \int \gamma(t)\,dt = C_3,$$

где $C_3 = \exp \widetilde{C}_3$, а $\widetilde{C}_3$ — произвольная вещественная постоянная.

Тогда общее решение дифференциального уравнения (5.2) имеет вид

$$F(K,L,N,t) = \widetilde{F}\Big(K \exp\!\int \alpha(t)\,dt,\ L \exp\!\int \beta(t)\,dt,\ N \exp\!\int \gamma(t)\,dt\Big) = \widetilde{F}(A(t)K, B(t)L, C(t)N),$$

где $\widetilde{F}$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция от трех переменных, а индексы НТП по капиталу, труду и природным ресурсам соответственно равны

$$A(t) = \exp\!\int \alpha(t)\,dt, \quad B(t) = \exp\!\int \beta(t)\,dt, \quad C(t) = \exp\!\int \gamma(t)\,dt.$$

Следовательно, на основании представления (1.5) получаем, что функция (1.1) учитывает капитало-, трудо- и природодобавляющий НТП. Теорема доказана.

В случае, когда индексы НТП по капиталу, по труду и по природным ресурсам равны, т.е. $A(t) \equiv B(t) \equiv C(t)$, из теоремы 5.1 получаем следующее утверждение.

Следствие 5.1. *Динамическая трехфакторная ПФ* (1.1) *учитывает капитало-, трудо- и природодобавляющий НТП с равными индексами НТП по капиталу, труду и природным ресурсам, если и только если на области $G' \times T' \subset G \times T$ имеет место тождество*

$$\frac{\partial_t F(K, L, N, t)}{K\,\partial_K F(K, L, N, t) + L\,\partial_L F(K, L, N, t) + N\,\partial_N F(K, L, N, t)} = \alpha(t),$$

где α есть некоторая скалярная функция, зависящая только от параметра НТП t.

Работа выполнена при поддержке государственной программы научных исследований «*Общество и гуманитарная безопасность белорусского государства*» на 2021 – 2025 годы (научно-исследовательская работа «*Разработка и применение эконометрических моделей развития малого и среднего предпринимательства в регионах для анализа и прогнозирования производства и экспорта товаров и услуг*, No. ГР 20211753»).

Литература

1. *Самуэльсон П., Нордхаус В.Д. Экономика.* СпБ., 2020.

2. *Плакунов М.К., Раяцкас Р.Л. Производственные функции в экономическом анализе.* Вильнюс, 1984.

3. *Ковалева Т.Ю.* Обзор методических подходов к оценке уровня научно-технического прогресса: страновой и региональный аспекты. *Вестник АГТУ. Сер. Экономика.* No. 3 (2015), 20–32.

4. *Паппэ Я.Ш. Малоразмерные макроэкономические модели экономического роста и научно-технического прогресса.* М., 1992.

5. *Варшавский А.Е. Научно-технический прогресс в моделях экономического развития: методы анализа и оценки.* М., 1984.

6. *Байнев В.Ф., Дадеркина Е.А. Научно-технический прогресс и устойчивое развитие.* Минск, 2008.

7. *Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение.* М., 1986.

8. *Горбунов В.К. Производственные функции: теория и построение.* Ульяновск, 2013.

9. *Meade J.E. A neo-classical theory of economic growth.* New York, 1961.

10. *Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике.* М., 1979.

11. *Хацкевич Г.А., Проневич А.Ф.* Классификация Сато – Беккмана учета научно-технического прогресса: генезис, обобщение и дополнение. *Журнал Белорусского государственного университета. Экономика.* No. 2 (2020), 4–17.

12. *Проневич А.Ф., Хацкевич Г.А.* Научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу: генезис, построение и обобщение. *Белорусский экономический журнал.* No. 3 (2020), 87–105.

13. *Проневич А.Ф., Хацкевич Г.А.* Автономный экзогенный научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу. *Вестник института экономики НАН Беларуси.* Вып. 2 (2021), 105–120.

14. *Проневич А.Ф., Хацкевич Г.А.* Трудодобавляющий научно-технический прогресс и нейтральность по Харроду. *Экономика, моделирование, прогнозирование.* Вып. 15 (2021), 236–246.

15. *Полтерович В.М., Попов В.В., Тонис А.С. Экономическая политика, качество институтов и механизмы «ресурсного проклятия».* М., 2007.

16. *Кирилюк И.Л.* Модели производственных функций для российской экономики. *Компьютерные исследования и моделирование.* Т. 5, No. 2 (2013), 293–312.

17. *Богданов Ю.С., Мазаник С.А., Сыроид Ю.Б. Курс дифференциальных уравнений.* Минск, 1996.