УДК 517.936+531.314.3

ОБ АБСОЛЮТНОМ ПОЛНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ИНВАРИАНТЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

А. Ф. Проневич

e-mail: pranevich@grsu.by

В работе для системы уравнений в полных дифференциалах дан обзор результатов, связанных с построением их интегральных инвариантов. Установлено взаимно однозначное соответствие между существованием абсолютного интегрального инварианта полного порядка и последним множителем Якоби, доказан аналог теоремы Ж. Лиувилля о сохранении величины фазового объема. Для гамильтоновых систем уравнений в полных дифференциалах полученные утверждения конкретизированы.

Ключевые слова: *система в полных дифференциалах; гамильтонова дифференциальная система; абсолютный интегральный инвариант полного порядка; последний множитель.*

ON ABSOLUTE TOTAL INTEGRAL INVARIANT FOR SYSTEM OF TOTAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. F. Pranevich

e-mail: pranevich@grsu.by

In this paper, we consider systems of total differential equations. A survey of the results on construction of integral invariants of these systems. The one-to-one correspondence between the existence of total absolute integral invariant and Jacobi's last multiplier is obtained, the analogue of Liouville's theorem about invariance of the volume in the phase space is proved. For Hamiltonian systems in total differentials these statements are concretized.

Keywords: *system of total differential equations; Hamiltonian differential system; total absolute integral invariant; last multiplier.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 37C79, Secondary 37J06.

1. Введение и постановка задачи

Теория интегральных инвариантов была заложена Анри Пуанкаре в работе «*О проблеме трех тел и уравнениях динамики*» [1] и позднее в расширенном виде изложена им в книге «*Новые методы небесной механики*» [2]. При этом важные конкретные примеры интегральных инвариантов были известны и ранее (например, теоремы У. Томсона и Г.Л.Ф. Гельмгольца из гидродинамики о сохранении циркуляции и потока вихря [3, с. 122–127]).

Интегральным инвариантом k-го порядка дифференциальной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \quad X_i \in C^1(D), \quad D = \mathcal{T} \times G \subset \mathbb{R}^{1+n},$$

следуя [2, с. 13], будем называть k-кратный интеграл

$$I_k = \overbrace{\int \ldots \int_{V^k}}^{k} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} J_{i_1 \ldots i_k}(t, x_1, \ldots, x_n)\, \delta x_{i_1} \ldots \delta x_{i_k},$$

который сохраняет постоянное значение в процессе движения точек многообразия V^k вдоль интегральных кривых этой дифференциальной системы. Здесь V^k есть произвольное многообразие размерности $k \leq n$ из области G фазового пространства $\mathbb{R}^n$, на котором параметр t имеет постоянное значение. Интегральный инвариант называется *абсолютным*, если свойство инвариантности имеет место для любых областей интегрирования, и *относительным*, если это свойство имеет место только для замкнутых областей.

А. Пуанкаре установил связь между относительными интегральными инвариантами k-го порядка и абсолютными $(k+1)$-го порядка, а также связал теорию интегральных инвариантов с теорией первых интегралов систем уравнений в вариациях и с теорией последнего множителя Якоби. Он широко применял интегральные инварианты для изучения движения небесных тел, и в частности, для изучения устойчивости асимптотических и двояко-асимптотических движений в задаче трех тел. Наконец, А. Пуанкаре указал на интегральные инварианты как на одно из эффективных средств проверки решений задачи трех тел, получающихся в форме рядов после трудоемких вычислений. Подводя итоги своих научных трудов А. Пуанкаре отметил [4; 5, с. 579–663], что гамильтоновы обыкновенные дифференциальные системы

$$\frac{dq_i}{dt} = \partial_{p_i} H(t,q,p), \quad \frac{dp_i}{dt} = -\partial_{q_i} H(t,q,p), \quad i=1,\ldots,n, \quad H \in C^2(D), \quad D \subset \mathbb{R}^{2n+1},$$

обладают универсальными инвариантами (имеют место для любой гамильтоновой системы)

$$I_1 = \oint \sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i\,, \qquad I_2 = \iint \sum_{i=1}^{n} \delta p_i\,\delta q_i\,,$$

$$I_3 = \oint\oint\oint \sum_{i_1,i_2=1}^{n} p_{i_1}\,\delta q_{i_1}\,\delta p_{i_2}\,\delta q_{i_2}\,, \qquad I_4 = \iiiint \sum_{i_1,i_2=1}^{n} \delta p_{i_1}\,\delta q_{i_1}\,\delta p_{i_2}\,\delta q_{i_2}\,, \quad \ldots,$$

$$I_{2n-1} = \overbrace{\oint \ldots \oint}^{2n-1} \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{n} p_{i_1}\,\delta q_{i_1} \ldots \delta p_{i_n}\,\delta q_{i_n}\,, \qquad I_{2n} = \overbrace{\int \ldots \int}^{2n} \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{n} \delta p_{i_1}\,\delta q_{i_1} \ldots \delta p_{i_n}\,\delta q_{i_n}\,,$$

которые «проливают яркий свет» на свойства этих дифференциальных систем. Это обстоятельство сразу привлекло внимание ученых к теории интегральных инвариантов. Так, бельгийский математик Т. Дондер в 1901 году доказал [6] обратную теорему теории интегральных инвариантов о том, что если обыкновенная дифференциальная система $2n$-го порядка

$$\frac{dq_i}{dt} = X_i(t,q,p), \qquad \frac{dp_i}{dt} = Y_i(t,q,p), \quad i=1,\ldots,n,$$

имеет интегральный инвариант Пуанкаре I_1, то она является гамильтоновой.

Французский математик и астроном Ж. Шази в работе [7] методом интегральных инваринтов вслед за А. Пуанкаре еще раз анализирует проблему трех тел и приходит к новым интересным результатам (см., например, научный обзор В.М. Алексеева в статье [8]). В частности, из конечности интегральных инвариантов Ж. Шази делает вывод об устойчивости движения. В ряде работ Т. Дондера, Р. Донто, Э. Вессио были рассмотрены интегральные инварианты термодинамики, оптики, гидродинамики и общей теории относительности [9–13].

Дальнейшее развитие теории интегральных инвариантов связано с работами французского математика Э. Картана [14–17], который при изучении дифференциальных уравнений, допускающих данные преобразования, пришел к рассмотрению некоторых дифференциальных выражений, названных им интегральными формами: они характеризуются тем свойством, что могут быть выражены через первые интегралы данных дифференциальных уравнений и через их дифференциалы. Оказалось, что понятие интегральной формы не отличается существенно от понятия интегрального инварианта. Сопоставляя эти два понятия Э. Картан в работе «Лекции об интегральных инвариантах» [15, 16] с помощью метода внешних форм завершил построение теории интегральных инвариантов, основанной А. Пуанкаре. При этом общая теория интегральных инвариантов, развитая Э. Картаном, была применена им к проблеме трех тел, к задаче о распространению света в однородной среде, а также, к другим задачам механики и математической физики. Отметим также и то, что результаты, приведенные в книге [15, 16], оказали существенное влияние на геометрическую теорию дифференциальных уравнений и особенно на теорию гамильтоновых систем (см., например, [18–22]).

В 1947 году китайский ученый Ли Хуа-Чжун доказал [23; 24, с. 305–311] единственность универсальных интегральных инвариантов $I_k, \ k=1,\ldots,2n$, для гамильтоновых обыкновенных дифференциальных систем. Он показал, что всякий другой универсальный интегральный инвариант отличается постоянным множителем от одного из интегралов $I_k, \ k=1,\ldots,2n$.

Советский механик В.В. Добронравов распространил теорию интегральных инвариантов на неголономные системы референции [25] и нашел, используя теорему Пуанкаре о связи между последним множителем Якоби и интегральным инвариантом, последний множитель Якоби для канонических дифференциальных уравнений в неголономных координатах в виде определителя от матрицы перехода от голономных координат к неголономным.

Для задач небесной механики А. Вилькенсом в 1955 году была построена [26] система интегральных инвариантов теории возмущения для достижения контроля численного решения задачи. Эти исследования дали важные результаты при изучении движения астероидов и комет (см., например, работы [26; 27, с. 98–99]). Применение теории интегральных инвариантов к задаче n тел, построению новых локальных первых интегралов и изучению устойчивости движений посвящены работы французского механика Л. Лоско [28–30].

Использование интегральных инвариантов позволяет не только исследовать движение динамических систем, но и получать новые соотношения между специальными функциями, описывающими решения этих динамических систем. Так, например, Ю.П. Сурков в 1975 году изучая [31] интегральные инварианты физического маятника установил новые интегральные соотношения между эллиптическими функциями Якоби.

В 1998 году академиком В.В. Козловым в работе «*Интегральные инварианты после Пуанкаре и Картана*» [32] сделан обзор литературы и научных результатов по теории интегральных инвариантов, полученных после классических работ А. Пуанкаре и Э. Картана.

В данной работе теория интегральных инвариантов порядка n для обыкновенных дифференциальных систем распространена на системы уравнений в полных дифференциалах

$$dx_i = \sum_{j=1}^{m} X_{ij}(t,x)\,dt_j\,, \quad i=1,\ldots,n, \tag{1.1}$$

где функции $X_{ij}\colon D\to\mathbb{R},\ i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m$, непрерывно дифференцируемы на области $D=\mathcal{T}\times G,\ \mathcal{T}\in\mathbb{R}^m,\ G\in\mathbb{R}^n$, из расширенного фазового пространства $\mathbb{R}^{n+m}$.

Система (1.1) индуцирует линейные дифференциальные операторы первого порядка

$$\mathfrak{X}_j(t,x) = \partial_{t_j} + \sum_{i=1}^{n} X_{ij}(t,x)\,\partial_{x_i} \quad \forall (t,x)\in D, \quad j=1,\ldots,m.$$

Систему уравнений в полных дифференциалах (1.1) назовем *вполне разрешимой* на области D, если в любой точке $(t_0,x_0)\in D$ решение задачи Коши с начальными данными (t_0,x_0) единственно [33, с. 17; 34, с. 21]. Система (1.1) вполне разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия Фробениуса [33, с. 19; 34, с. 113], которые с помощью скобок Пуассона дифференциальных операторов $\mathfrak{X}_j$ выражаются системой тождеств [33, с. 112–113]

$$\big[\mathfrak{X}_j(t,x),\mathfrak{X}_\xi(t,x)\big] = \mathfrak{O} \quad \forall (t,x)\in D, \quad j=1,\ldots,m, \quad \xi=1,\ldots,m, \tag{1.2}$$

где $\mathfrak{O}$ — нулевой линейный дифференциальный оператор первого порядка.

Наряду с дифференциальной системой (1.1) будем рассматривать также гамильтонову систему уравнений в полных дифференциалах [35–37]

$$dq_i = \sum_{j=1}^{m} \partial_{p_i} H_j(t,q,p)\, dt_j\,, \qquad dp_i = -\sum_{j=1}^{m} \partial_{q_i} H_j(t,q,p)\, dt_j\,, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{1.3}$$

с дважды непрерывно дифференцируемыми на области $\widetilde{D}$ из пространства $\mathbb{R}^{2n+m}$ гамильтонианами $H_j\colon \widetilde{D} \to \mathbb{R},\ j = 1,\ldots,m$, которая индуцирует линейные дифференциальные операторы

$$\mathfrak{G}_j(t,q,p) = \partial_{t_j} + \sum_{i=1}^{n} \big(\partial_{p_i} H_j(t,q,p)\,\partial_{q_i} - \partial_{q_i} H_j(t,q,p)\,\partial_{p_i}\big) \quad \forall (t,q,p) \in \widetilde{D}, \quad j = 1,\ldots,m.$$

Гамильтонову систему (1.3) можно представить в виде системы (1.1), состоящей из $2n$ дифференциальных уравнений, положив, что переменные $x_i = q_i,\ x_{n+i} = p_i,\ i = 1,\ldots,n$, а функции на области $\widetilde{D}$ имеют вид

$$X_{ij}\colon (t,x) \to \partial_{p_i} H_j(t,q,p), \quad X_{n+i,j}\colon (t,x) \to -\partial_{q_i} H_j(t,q,p), \quad i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m.$$

Для системы уравнений в полных дифференциалах (1.1) установлено взаимно однозначное соответствие (теорема 2.1) межу существованием абсолютного интегрального инварианта полного порядка и последним множителем Якоби, а также доказан аналог теоремы Ж. Лиувилля о сохранении величины фазового объема (теорема 2.2). Для гамильтоновых систем уравнений в полных дифференциалах (1.3) полученные в работе утверждения (теоремы 2.1 и 2.2) конкретизированы (следствия 2.1 и 2.2).

2. Интегральные инварианты системы

Рассмотрим n-кратный интеграл от дифференциальной n-формы

$$I_n = \int\limits_{V^n} \mu(t,x)\,\delta x_1 \wedge \ldots \wedge \delta x_n\,, \tag{2.1}$$

где $\mu\colon D' \to \mathbb{R}$ есть непрерывно дифференцируемая на области $D' \subset D$ скалярная функция, а V^n — произвольное гладкое n-мерное многообразие из области $G' \subset G$ фазового пространства $\mathbb{R}^n$ такое, что кратный интеграл (2.1) существует.

Теория интегральных инвариантов полного порядка (порядок равен n) систем уравнений в полных дифференциалах тесно связана с теорией последнего множителя Якоби этих дифференциальных систем. Более точно имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Интеграл* (2.1) *будет абсолютным интегральным инвариантом полного порядка системы в полных дифференциалах* (1.1), *если и только если функция* $\mu\colon D' \to \mathbb{R}$ *будет последним множителем Якоби системы в полных дифференциалах* (1.1).

Доказательство. С учетом того, что V^n есть произвольное гладкое n-мерное многообразие из области G', получаем, что кратный интеграл (2.1) будет абсолютным интегральным инвариантом порядка n системы уравнений в полных дифференциалах (1.1) тогда и только тогда, когда имеет место тождество

$$d\big(\mu(t,x)\,\delta x_1 \wedge \ldots \wedge \delta x_n\big) = 0 \quad \forall (t,x) \in D'$$

или тождество

$$d\mu(t,x)\,\delta x_1 \wedge \ldots \wedge \delta x_n + \mu(t,x) \sum_{i=1}^{n} \delta x_1 \wedge \ldots \wedge \delta x_{i-1} \wedge d(\delta x_i) \wedge \delta x_{i+1} \wedge \ldots \wedge \delta x_n = 0 \quad \forall (t,x) \in D'.$$

Отсюда, на основании того, что дифференциал в силу системы уравнений в полных дифференциалах (1.1) скалярной функции $\mu\colon D' \to \mathbb{R}$ равен

$$d\,\mu(t,x) = \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{X}_j\,\mu(t,x)\,dt_j \quad \forall (t,x)\in D'$$

и вариации координат являются изохронными, а значит, $d\,(\delta x_i) = \delta\,(dx_i),\ i = 1,\ldots,n$, то

$$\sum_{j=1}^{m} \mathfrak{X}_j\,\mu(t,x)\,dt_j\ \delta x_1 \wedge \ldots \wedge \delta x_n + \mu(t,x)\sum_{i=1}^{n} \delta x_1 \wedge \ldots \wedge \delta x_{i-1} \wedge \delta(dx_i) \wedge \delta x_{i+1} \wedge \ldots \wedge \delta x_n = 0.$$

или, с учетом системы уравнений в полных дифференциалах (1.1), на области D' имеем

$$\sum_{j=1}^{m} \mathfrak{X}_j\,\mu(t,x)\,dt_j\ \delta x_1 \wedge \ldots \wedge \delta x_n + \mu(t,x)\sum_{i=1}^{n} \delta x_1 \wedge \ldots \wedge \delta x_{i-1} \wedge \delta \sum_{j=1}^{m} X_{ij}(t,x)\,dt_j \wedge \delta x_{i+1} \wedge \ldots \wedge \delta x_n = 0.$$

Так как вариации

$$\delta X_{ij}(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} X_{ij}(t,x)\,\delta x_k \quad \forall (t,x)\in D, \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m,$$

переменные $t_j,\ j = 1,\ldots,m$, независимы, а $\delta x_i \wedge \delta x_i = 0,\ i = 1,\ldots,n$, то на области D'

$$\sum_{j=1}^{m}\Bigl(\mathfrak{X}_j\,\mu(t,x)\,\delta x_1 \wedge \ldots \wedge \delta x_n +$$

$$+\ \mu(t,x)\sum_{i=1}^{n} \delta x_1 \wedge \ldots \wedge \delta x_{i-1} \wedge \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} X_{ij}(t,x)\,\delta x_k \wedge \delta x_{i+1} \wedge \ldots \wedge \delta x_n\Bigr) dt_j = 0$$

или

$$\Bigl(\mathfrak{X}_j\,\mu(t,x) + \mu(t,x)\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} X_{ij}(t,x)\Bigr)\,\delta x_1 \wedge \ldots \wedge \delta x_n = 0 \quad \forall (t,x)\in D', \quad j = 1,\ldots,m,$$

а значит,

$$\mathfrak{X}_j\,\mu(t,x) + \mu(t,x)\,\mathrm{div}\,\mathfrak{X}_j(t,x) = 0 \quad \forall (t,x)\in D', \quad j = 1,\ldots,m.$$

Отсюда, основываясь на определении последнего множителя системы уравнений в полных дифференциалах, заключаем, что имеет место утверждение теоремы 2.1.

С учетом того, что для любой гамильтоновой системы уравнений в полных дифференциалах (1.3) функция $\mu\colon (t,q,p) \to 1\ \ \forall (t,q,p) \in \widetilde{D}$ является последним множителем этой системы, на основании теоремы 2.1, устанавливаем следующее утверждение.

С л е д с т в и е 2.1. *Гамильтонова система уравнений в полных дифференциалах* (1.3) *допускает универсальный абсолютный интегральный инвариант полного порядка*

$$I_{2n} = \int\limits_{V^{2n}} \delta q_1 \wedge \ldots \wedge \delta q_n \wedge \delta p_1 \wedge \ldots \wedge \delta p_n\,,$$

где V^{2n} — произвольное гладкое $2n$-мерное многообразие такое, что интеграл существует.

Для обыкновенных дифференциальных систем утверждения аналогичные теореме 2.1 и следствию 2.1 установлены в [2, с. 44–46]. Аналогом теоремы Ж. Лиувилля о сохранении величины фазового объема [38, с. 180–184] на многомерный случай является

Т е о р е м а 2.2. *Пусть вполне разрешимая система в полных дифференциалах* (1.1)–(1.2) *такова, что расходимости ее операторов равны нулю на области D, т.е. верны тождества*

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{X}_j(t,x) = 0 \quad \forall (t,x)\in D, \quad j = 1,\ldots,m. \tag{2.2}$$

Тогда на решениях этой дифференциальной системы сохраняется величина фазового объема.

Доказательство. Так как система уравнений в полных дифференциалах (1.1) является вполне разрешимой на области D из расширенного пространства $\mathbb{R}^{n+m}$, то задача Коши для системы (1.1) с произвольными начальными данными $(t_0, x_0) \in D$ имеет единственное решение

$$x\colon t \to \varphi(t; t_0, x_0) \quad \forall t \in \mathcal{T}_{(t_0, x_0)} \subset \mathcal{T}.$$

Зафиксируем начальное значение t_0 независимой переменной t и будем изменять начальные значения x_0 зависимой переменной x на некоторой ограниченной области $G_{t_0} \subset G$ фазового пространства $\mathbb{R}^n$. Получим параметрическое семейство решений вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах (1.1), заданное векторной функцией

$$x\colon (t, x_0) \to \varphi(t; t_0, x_0) \quad \forall t \in \mathcal{T}_{(t_0, x_0)}, \quad \forall x_0 \in G_{t_0}. \tag{2.3}$$

Отображение (2.3) при каждом $t \in \mathcal{T}_{(t_0, x_0)}$ устанавливает диффеоморфизм между областями G_{t_0} и $G_t = \{x\colon x = \varphi(t; t_0, x_0) \ \forall x_0 \in G_{t_0}\}$ фазового пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть V_0 есть объем области G_{t_0}, а $V(t)$ есть объем области G_t. Тогда

$$V_0 = \overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{G_{t_0}} dx_{10} \ldots dx_{n0}, \qquad x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0}),$$

а

$$V(t) = \overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{G_t} dx_1 \ldots dx_n, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n). \tag{2.4}$$

Используя формулу замены переменных для кратных интегралов перейдем в n-кратном интеграле (2.4) от переменных x к переменным x_0:

$$V(t) = \overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{G_{t_0}} J(t, x_0)\, dx_{10} \ldots dx_{n0},$$

где якобиан преобразования

$$J(t, x_0) = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(x_{10}, \ldots, x_{n0})}\,(t, x_0) = \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_{10}, \ldots, x_{n0})}\,(t, x_0) =$$

$$= \begin{vmatrix} \partial_{x_{10}} \varphi_1(t; t_0, x_0) & \ldots & \partial_{x_{n0}} \varphi_1(t; t_0, x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial_{x_{10}} \varphi_n(t; t_0, x_0) & \ldots & \partial_{x_{n0}} \varphi_n(t; t_0, x_0) \end{vmatrix} \quad \forall t \in \mathcal{T}_{(t_0, x_0)}, \quad \forall x_0 \in G_{t_0}.$$

Если $t = t_0$, то из задания отображения (2.3) следует, что $\varphi(t_0; t_0, x_0) = x_0 \ \ \forall x_0 \in G_{t_0}$, а значит, якобиан $J(t_0, x_0) = 1 \ \forall x_0 \in G_{t_0}$ и объем $V(t_0) = V_0$.

Покажем, что при выполнении для системы (1.1) тождеств (2.2) имеет место тождество $V(t) = V_0 \ \ \forall t \in \mathcal{T}_{(t_0, x_0)}$, т.е. функция $V(t)$ не зависит от переменной t (является постоянной).

По теореме о дифференцируемости кратного интеграла по параметру [39, с. 298] имеем:

$$\partial_{t_j} V(t) = \overbrace{\int\ldots\int}^{n}_{G_{t_0}} \partial_{t_j} J(t,x_0)\,dx_{10}\ldots dx_{n0} \quad \forall t \in \mathcal{T}_{(t_0,x_0)}, \quad j=1,\ldots,m.$$

На основании правила дифференцирования определителей получаем, что

$$\partial_{t_j} J(t,x_0) = \sum_{i=1}^{n} J_{ij}(t,x_0) \quad \forall t \in \mathcal{T}_{(t_0,x_0)}, \quad \forall x_0 \in G_{t_0}, \quad j=1,\ldots,m,$$

где определители n-го порядка J_{ij}, $i=1,\ldots,n,$ $j=1,\ldots,m$, равны

$$J_{ij}(t,x_0) = \begin{vmatrix} \partial_{x_{10}}\varphi_1(t;t_0,x_0) & \ldots & \partial_{x_{n0}}\varphi_1(t;t_0,x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial_{t_j}\big(\partial_{x_{10}}\varphi_i(t;t_0,x_0)\big) & \ldots & \partial_{t_j}\big(\partial_{x_{n0}}\varphi_i(t;t_0,x_0)\big) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial_{x_{10}}\varphi_n(t;t_0,x_0) & \ldots & \partial_{x_{n0}}\varphi_n(t;t_0,x_0) \end{vmatrix} \quad \forall t \in \mathcal{T}_{(t_0,x_0)}, \quad \forall x_0 \in G_{t_0},$$

и получены из определителя J в результате замены его i-ой строки на строку

$$\Big(\partial_{t_j}\big(\partial_{x_{10}}\varphi_i(t;t_0,x_0)\big),\ldots,\partial_{t_j}\big(\partial_{x_{n0}}\varphi_i(t;t_0,x_0)\big)\Big), \quad i=1,\ldots,n, \quad j=1,\ldots,m.$$

При этом, так как функции (2.3) являются решениями вполне разрешимой системы в полных дифференциалах (1.1) с функциями $X_{ij} \in C^1(D)$, $i=1,\ldots,n,$ $j=1,\ldots,m$, то

$$\partial_{t_j}\big(\partial_{x_{\xi 0}}\varphi_i(t;t_0,x_0)\big) = \partial_{x_{\xi 0}}\big(\partial_{t_j}\varphi_i(t;t_0,x_0)\big) = \partial_{x_{\xi 0}} X_{ij}\big(t,\varphi(t;t_0,x_0)\big) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \partial_{x_l} X_{ij}(t,x)\big|_{x=\varphi(t;t_0,x_0)} \partial_{x_{\xi 0}}\varphi_l(t;t_0,x_0) \quad \forall t \in \mathcal{T}_{(t_0,x_0)},\ \forall x_0 \in G_{t_0},\ \xi,i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m.$$

С учетом этих тождеств в каждом из определителей J_{ij}, $i=1,\ldots,n$, умножим l-ые строки $(l \neq i)$, $l=1,\ldots,n$, на $\partial_{x_l} X_{ij}(t,x)\big|_{x=\varphi(t;t_0,x_0)}$ и вычтем эти строки из i-ой строки. Тогда с учетом того, что определитель не изменится, если от элементов некоторой строки вычесть соответствующие элементы другой строки, предварительно умножив их на один и тот же множитель, получим, что

$$J_{ij}(t,x_0) = \begin{vmatrix} \partial_{x_{10}}\varphi_1(t;t_0,x_0) & \ldots & \partial_{x_{n0}}\varphi_1(t;t_0,x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial_{x_i} X_{ij}(t,x)\big|_{x=\varphi(t;t_0,x_0)} \partial_{x_{10}}\varphi_i(t;t_0,x_0) & \ldots & \partial_{x_i} X_{ij}(t,x)\big|_{x=\varphi(t;t_0,x_0)} \partial_{x_{n0}}\varphi_i(t;t_0,x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial_{x_{10}}\varphi_n(t;t_0,x_0) & \ldots & \partial_{x_{n0}}\varphi_n(t;t_0,x_0) \end{vmatrix} =$$

$$= \partial_{x_i} X_{ij}(t,x)\big|_{x=\varphi(t;t_0,x_0)} J(t,x_0) \quad \forall t \in \mathcal{T}_{(t_0,x_0)}, \quad \forall x_0 \in G_{t_0}, \quad i=1,\ldots,n, \quad j=1,\ldots,m.$$

Следовательно,

$$\partial_{t_j} J(t,x_0) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} X_{ij}(t,x)\big|_{x=\varphi(t;t_0,x_0)} J(t,x_0) \quad \forall t\in \mathcal{T}_{(t_0,x_0)}, \quad \forall x_0 \in G_{t_0}, \quad j=1,\ldots,m.$$

Отсюда, на основании системы тождеств (2.2) имеем

$$\partial_{t_j} J(t,x_0) = 0 \quad \forall t\in \mathcal{T}_{(t_0,x_0)}, \quad \forall x_0 \in G_{t_0}, \quad j=1,\ldots,m,$$

а значит $\partial_{t_j} V(t) = 0 \ \ \forall t\in \mathcal{T}_{(t_0,x_0)},\ j=1,\ldots,m$, или $V(t)=\mathrm{const}$.

Из того, что $V(t_0)=V_0$ получаем, что объем $V(t)=V_0 \ \ \forall t\in \mathcal{T}_{(t_0,x_0)}$. Теорема доказана.

Из теоремы 2.2 для вполне разрешимых гамильтоновых систем получаем

Следствие 2.2. *При перемещении точек фазового объема по траекториям вполне разрешимой гамильтоновой системы уравнений в полных дифференциалах* (1.3) *величина фазового объема не меняется.*

Доказательство. Утверждение следует из того, что для гамильтоновых систем уравнений в полных дифференциалах расходимости

$$\operatorname{div}\mathfrak{G}_j(t,q,p) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\partial_{q_i}\big(\partial_{p_i} H_j(t,q,p)\big) - \partial_{p_i}\big(\partial_{q_i} H_j(t,q,p)\big)\Big) = 0 \quad \forall (t,q,p)\in \widetilde{D}, \quad j=1,\ldots,m.$$

По следствию 2.2, интеграл, который определяет объем в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$,

$$I_{2n} = \overbrace{\int\ldots\int}^{2n}_{V(t)} \delta q_1 \ldots \delta q_n\, \delta p_1 \ldots \delta p_n$$

является интегральным инвариантом полного порядка (или интегральным инвариантом Лиувилля) для вполне разрешимой гамильтоновой системы уравнений в полных дифференциалах (1.3). При этом инвариантность понимается в следующем смысле: если каждую точку некоторого начального объема V_0 в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ перемещать по траекториям вполне разрешимой гамильтоновой системы уравнений в полных дифференциалах, то величина фазового объема $V(t)$, который займут точки к моменту t, не зависит от t, т.е. не меняется.

Замечание. Как отмечено Э.Т. Уиттекером [40, с. 413] интегральные инварианты полного и первого порядков наиболее важны для классической динамики. Изучению интегральных инвариантов первого порядка систем в полных дифференциалах посвящена работа [41]:

— для системы уравнений в полных дифференциалах (1.1) установлены критерии существования абсолютного и относительного линейных интегральных инвариантов первого порядка, приведены необходимые условия существования автономных и цилиндричных по части зависимых и независимых переменных абсолютных линейных интегральных инвариантов первого порядка, установлены аналитические связи между абсолютными линейными интегральными инвариантами и первыми интегралами системы;

— для гамильтоновых систем в полных дифференциалах (1.3) полученные критерии конкретизированы, а также доказано отсутствие универсальных абсолютных линейных интегральных инвариантов первого порядка, отличных от тождественного нуля, и указан аналитический вид универсального относительного линейного интегрального инварианта первого порядка.

Литература

1. *Poincaré H.* Sur le probléme des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Mathematica.* Vol. 13 (1890), 3–270.

2. *Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Том II. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел.* М., Наука, 1972.

3. *Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике.* М., Наука, 1966.

4. *Poincaré H.* Analyse de ses travaux scientifiques. *Acta Mathematica.* Vol. 38 (1921), 36–135.

5. *Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Том III. Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественнонаучных работ Анри Пуанкаре.* М., Наука, 1974.

6. *Donder Th.De.* Sur les invariants intégraux. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (France).* Vol. 133, №11 (1901), 129–137.

7. *Chazy J.* Sur l'allure finale du mouvement dans le probléme des trois corps. *Journal de mathématiques pures et appliquées.* Vol. 8 (1929), 353–380.

8. *Алексеев В.М.* Финальные движения в задаче трех тел и символическая динамика. *Успехи математических наук.* Т. 36, No. 4 (1981), 161–176.

9. *Donder Th.De.* Sur le mouvementde la chaleur dans un corps athermane. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (France).* Vol. 157 (1913), 1400–1403.

10. *Donder Th.De.* Sur les invariants intégraux de l'optique. *Bulletin de la société mathématique de France.* Vol. 42 (1914), 91–95.

11. *Dontot R.* Sur les invariants intégraux et quelques points d'optique géométrique. *Bulletin de la société mathématique de France.* Vol. 42 (1914), 53–91.

12. *Vessiot E.* Sur les invariants intégraux de la propagation par ondes. *Bulletin de la société mathématique de France.* Vol. 42 (1914), 142–167.

13. *Vessiot E.* Sur un invariant intégral de l' Hydrodynamique et sur son application á la theorie de la relativite génerale. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (France).* Vol. 167 (1918), 1065–1068.

14. *Cartan E.* Sur l'intégration des systémes différentiels complétement intégrables I, II. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (France).* Vol. 134 (1902), 1415–1418, 1564–1566.

15. *Cartan E. Leçons sur les invariants intégraux.* Paris, 1922.

16. *Картан Э. Интегральные инварианты.* М.–Л., Гостехиздат, 1940.

17. *Акивис М.А., Розенфельд Б.А. Эли Картан (1869 – 1951).* М., Наука, 2007.

18. *Арнольд В.И. Математические методы классической механики.* М., Наука, 1974.

19. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения.* М., Наука, 1986.

20. *Биркгоф Дж. Динамические системы.* М–Ижевск, 2002.

21. *Мозер Ю. Интегрируемые гамильтоновы системы и спектральная теория.* Ижевск, 1999.

22. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Алгебра и геометрия интегрируемых Гамильтоновых дифференциальных уравнений.* М., 1995.

23. *Hwa-Chung Lee* Invariants of Hamilton systems and applications to the theory of canonical transformations. *Proc. Roy. Soc. Edinbough.* Vol. LXII, Ser. A (1947), 237–247.

24. *Айзерман М.А. Классическая механика.* М., Наука, 1980.

25. *Добронравов В.В.* Аналитическая динамика в неголономных координатах. *Ученые записки МГУ.* Т. 2, Вып. 122 (1948), 77–182.

26. *Wilkens A.* Über die Integral – Invarianten der Störungstheorie. *Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Math.-Naturwiss.* №7 (1955), 123–173.

27. *Тяпкин А.А., Шибанов А.С. Пуанкаре.* М., 1982.

28. *Losco L.* Sur une application des invariants intégraux au probléme des n corps. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (France).* Vol. 277 (1973), 323–325.

29. *Losco L.* Sur un invariant inégral du probléme des n corps: conséquence de l'homogénéité du potentiel.. *The stability of the solar system and of small stellar systems: Proceedings of the Symposium, Poland, Warsaw, September 5–8, 1973 / International Astronomical Union, International Union of Theoretical and Applied Mechanics, and Polska Akademia Nauk / Dordrecht (D. Reidel Publishing Co.).* (1974), 249–255.

30. *Losco L.* Le probléme des n corps et les invariants intégraux. *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy.* Vol. 15, №4 (1977), 477–488.

31. *Сурков Ю.П.* Интегральные инварианты физического маятника.. *Сборник научно-методических статей по теоретической механике. Вып. 5. М.: Высшая школа.* (1975), 56–58.

32. *Козлов В.В.* Интегральные инварианты после Пуанкаре и Картана.. *Библиотека «R&C Dynamics». Т. 1.* (1998), 217–260.

33. *Горбузов В.Н. Интегралы дифференциальных систем.* Гродно, 2006.

34. *Гайшун И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения.* М., 2004.

35. *Аржаных И.С.* Об интегрировании канонической системы уравнений в точных дифференциалах. *Успехи математических наук.* Т. VIII, вып. 3 (1953), 99–104.

36. *Гайшун И.В.* Устойчивость линейных гамильтоновых систем в полных дифференциалах с периодическими коэффициентами. *Дифференц. уравнения.* Т. 41, No. 1 (2005), 33–40.

37. *Проневич А.Ф.* Теорема Пуассона построения стационарных интегралов автономных систем уравнений в полных дифференциалах. *Проблемы физики, математики и техники.* No. 3 (2016), 52–57.

38. *Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики.* М., 2004.

39. *Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть II.* М., 2000.

40. *Уиттекер Э.Т. Аналитическая динамика.* Ижевск, 1999.

41. *Проневич А.Ф.* Необходимые условия и критерии существования линейных интегральных инвариантов многомерных дифференциальных систем. *Дифференц. уравнения и процессы управления.* No. 3 (2017), 176–194.