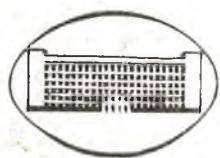


ISSN 3231-0367



ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина

СЕРИЯ I

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

2

1985

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Титов А. Д., Хапалюк А. П. Гибридные направляемые моды асимметричного плоского прозрачного волновода	3
Барышевский В. Г., Метелица О. Н. Угловые распределения γ -квантов распада позитрония в магнитном поле	7
Ямный В. Е., Нгуен Данг Куанг. Исследование диэлектрической абсорбции конденсаторов	10
Комаров А. Ф. Деканализирование ультрарелятивистских электронов в толстых кристаллах при аксиальном каналировании	13
Горушко В. А., Николаева А. Э., Пилипенко В. А., Стержанов Н. И., Чигирь Г. Г. Влияние импульсной оптической обработки на параметры диэлектрических пленок	17
Миксюк Ю. И., Гулис И. М., Горбачевич С. К. Двухканальный импульсный наносекундный лазерный флуорометр	20
Шалаховская Г. В., Бойков В. Н., Красовский А. Н., Умрейко Д. С. Формирование линий низкотемпературных спектров люминесценции ураниловых соединений	23
Лавренов А. Н., Трофименко Е. Е. О применении метода преобразования Лапласа к возмущенному уравнению Шредингера для $1s$ -состояния водородоподобного атома	27
Демчук М. И., Денисенко В. Н., Иванов М. А., Сильнов Л. В. Универсальная измерительная система для анализа двух случайных потоков импульсов	30
Абдулин А. З., Комяк А. И., Муравский А. А., Минько А. А., Рачкевич В. С. Оптические свойства закрученных нематических слоев	33

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Полевиков В. К., Денисенко В. М. Численное исследование равновесных форм капли, вращающейся в гравитационном поле	37
Малюгин В. И. Об оценивании плотности вероятностей случайных векторов с существенно зависимыми компонентами	41
Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. Алгоритм решения линейной экстремальной задачи с континуумом ограничений	44
Забелло И. Н. О разрешимости системы интегральных уравнений с логарифмическим ядром и постоянными коэффициентами	47
Вальк М. Обобщенные потоки и напряжения на графах	51
Забелло И. Е. Об управлении показателем Ляпунова в линейных непрерывных нестационарных системах	55

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Прокошин В. И., Шепелевич В. Г. Термическая стабильность деформированных сплавов висмут — сурьма	59
Будько О. Н. Одно достаточное условие сильной положительности второй вариации для непрерывной системы с запаздыванием по управлению	60
Черников Г. Н., Шпаковский Г. И. О возможности использования перемешивания в задачах изоморфизма	63
Кесси А. Уравнения с неподвижными критическими особыми точками вида $\omega'^m = P_{2m}(z, \omega)$ и их интегрирование	64
Дудин А. Н. Об одной ненадежной системе массового обслуживания с изменяемой скоростью входящего потока	65
Лазакович Н. В. Асимптотические разложения в интегральных предельных теоремах для сумм независимых k -решетчатых случайных векторов	67
Тимохович В. Л. o -Метрики с условием (сК)	69
Аннотации депонированных статей	71



ВЕСТНИК

*Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина*

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ I

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

№ 2
МАИ

Главный редактор М. Д. ТИВО
Зам. главного редактора В. Г. РУДЬ
Ответственный секретарь П. Н. БАРАНОВСКИЙ

Редакционная коллегия серии:

А. И. КОМЯК (*ответственный редактор*),
В. В. БОБКОВ (*зам. ответственного редактора*), Л. М. БА-
РОВСКИЙ (*зам. ответственного редактора*), Б. Ю. ХАНОХ
(*ответственный секретарь*), А. М. БЕЛЬСКИЙ, В. В. ГРУЗИН-
СКИЙ, Е. С. ВОРОПАЙ, Э. И. ЗВЕРОВИЧ, В. И. КОРЗЮК,
Н. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ, Н. А. ЛУКАШЕВИЧ, Г. А. МЕДВЕ-
ДЕВ, И. А. ПРУСОВ, В. Ф. СТЕЛЬМАХ, А. Ф. ЧЕРНЯВ-
СКИЙ, А. М. ШИРОКОВ, Э. М. ШПИЛЕВСКИЙ, С. С. ШУШ-
КЕВИЧ, Н. И. ЮРЧУК

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. И. ЛЕНИНА

Серия 1, физ., мат. и мех., 1985, № 2

Редактор *И. П. Стрельченя*
Младший редактор *Г. М. Добыш*
Художественный редактор *С. В. Баленок*
Технический редактор и корректор *Г. И. Хмарун*

Сдано в набор 26.02.85. Подписано в печать 24.05.85. АТ 17249. Формат
70×108^{1/16}. Бумага типографская № 1. Высокая печать. Усл. печ. л. 7.0.
Усл. кр.-отг. 7,52. Уч.-изд. л. 7,17. Тираж 975 экз. Заказ 112. Цена
95 коп.

Издательство «Университетское». 220048, Минск, проспект Машерова, 11.
Адрес редакции: 220080, Минск, Университетский городок, телефон
20-65-42.

Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП
Белоруссии. 220041, Минск, Ленинский пр., 79.

© Вестник БГУ имени В. И. Ленина, 1985

УДК 621.372.8

А. Д. ТИТОВ, А. П. ХАПАЛЮК

ГИБРИДНЫЕ НАПРАВЛЯЕМЫЕ МОДЫ АСИММЕТРИЧНОГО ПЛОСКОГО ПРОЗРАЧНОГО ВОЛНОВОДА

В работах [1, 2] изучались гибридные направляемые НЕ- и ЕН-моды асимметричного плоского диэлектрического волновода (ПДВ) в общем случае комплексности показателей преломления $N_j = n_j - i\kappa_j$ слоя ($j=1$), покрытия ($j=2$) и подложки ($j=3$). Направляемыми считались моды, у которых нет утечки энергии за пределы волноведущей сердцевины. Показано, что условия направляемости существенно различны для НЕ- и ЕН-мод. Только в случае отсутствия поглощения (усиления) в сердцевине ($\kappa_1=0$) они совпадают и могут быть записаны в виде системы двух уравнений:

$$e_{1x} \frac{\operatorname{ch}(\xi)}{\operatorname{sh}(\xi)} \frac{\operatorname{sh}(\zeta)}{\operatorname{ch}(\zeta)} (kdn_1 e_{2x}) \mp e_{2x} \frac{\cos(\xi)}{\sin(\xi)} \frac{\sin(\zeta)}{\cos(\zeta)} (kdn_1 e_{1x}) = 0, \quad (1)$$

где d — толщина слоя; $k = \omega/c$ — волновое число в вакууме; $\vec{e} = \vec{e}_1 + i\vec{e}_2$ — комплексный единичный вектор волновой нормали; ось x нормальна к границам; вдоль оси z имеет место режим бегущей волны и

$$\operatorname{th}(\xi + i\zeta) = n_1 e_x \frac{f \sqrt{n_2^2 - n_1^2(1 - e_x^2)} - g \sqrt{n_3^2 - n_1^2(1 - e_x^2)}}{n_1^2 e_x^2 - fg \sqrt{n_2^2 - n_1^2(1 - e_x^2)} \sqrt{n_3^2 - n_1^2(1 - e_x^2)}}.$$

Здесь $f=g=1$ для НЕ- и $f=(n_1/n_2)^2$, $g=(n_1/n_3)^2$ для ЕН-мод. В [1] показано, что для направляемых НЕ-мод всегда можно построить универсальные дисперсионные кривые [3, 4], из которых и определяются все возможные модовые решения. Для направляемых ЕН-мод в общем случае наличия поглощения (усиления) таких зависимостей построить нельзя [2]. Покажем, что это возможно в случае прозрачности сред ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0$), когда дисперсионные уравнения можно записать в виде

$$\operatorname{tg}(kd n_1 e_x) = i n_1 e_x \frac{f \sqrt{n_2^2 - n_1^2(1 - e_x^2)} + g \sqrt{n_3^2 - n_1^2(1 - e_x^2)}}{n_1^2 e_x^2 + fd \sqrt{n_2^2 - n_1^2(1 - e_x^2)} \sqrt{n_3^2 - n_1^2(1 - e_x^2)}}. \quad (2)$$

Задача нахождения направляемых ЕН-модовых решений свелась к решению системы трех (одного комплексного (2) и одного действительного (1)) трансцендентных уравнений относительно трех действительных величин e_{1x} , e_{2x} и kd . Вид этих уравнений сохранится, если одновременно изменить знаки e_{1x} и e_{2x} или знаки ξ и ζ , поэтому при их исследовании всегда можно ограничиться неотрицательными значениями e_{1x} и ξ (или e_{2x} и ζ , если $e_{1x}=0$ и $\xi=0$). Уравнения Максвелла и граничные условия не позволяют уточнить знаки корней в правой части (2) [5]. Как и в [1, 2], исследуем возможность реализации направляемых мод для

обоих знаков. Моды, поля которых затухают вне сердцевины при $|x| \rightarrow \infty$, будем называть собственными направляемыми модами; моды с возрастающими полями, не удовлетворяющие условию излучения Зоммерфельда, — несобственными направляемыми модами (экспоненциальное нарастание полей в подложке и в покрытии), несобственными направляемыми модами подложки (экспоненциальное нарастание полей в подложке и затухание в покрытии) и несобственными направляемыми модами покрытия (экспоненциальное нарастание полей в покрытии и затухание в подложке) [6—8], опуская, где это возможно, термин «направляемые». Неравенства $\text{Im} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 (1 - e_x^2)} < 0$ и $\text{Im} \sqrt{n_3^2 - n_1^2 (1 - e_x^2)} < 0$ отвечают собственным, противоположные — различным несобственным модам. Верхнее уравнение (1) имеет ненулевые корни относительно kd только в двух случаях [9]: 1) $e_{2x} = 0, e_{1x} > 0$ (скользящее затухание) и 2) $e_{1x} = 0, e_{2x} > 0$ (скользящее распространение волн [10]).

Скользящее затухание. В этом случае нижнее уравнение (1) выполняется только при $\xi = 0$. Тогда дисперсионное уравнение EH-мод (2) имеет смысл при условии

$$e_{1x}^2 \leq \min \left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2}, \frac{n_1^2 - n_3^2}{n_1^2} \right), \quad (3)$$

согласно которому волноведущая сердцевина должна быть оптически плотнее подложки и покрытия (в дальнейшем без ограничения общности считаем $n_3 > n_2$). При выполнении (3) уравнение (2) становится действительным уравнением относительно параметров e_{1x} и kd . По аналогии с [1, 3, 9], перейдя к нормированным параметрам, уравнение (2) для EH-мод можно представить в удобном для графического анализа виде:

$$V \sqrt{A} = p\pi - \arctg \left[b \sqrt{\frac{1-A}{A}} \right] - \arctg \left[\frac{b}{1+a(1-b)} \sqrt{\frac{1-A+a}{A}} \right], \quad (4)$$

где $p = 0, 1, 2, \dots$ — модовое число; $V = kd \sqrt{n_1^2 - n_3^2} \geq 0$ — нормированная толщина (частота) ПДВ (параметр волновода); $A = n_1^2 e_{1x}^2 / (n_1^2 - n_3^2)$ — нормированный поперечный показатель преломления (фазовый параметр); $(0 \leq A \leq 1)$, $a = (n_3^2 - n_2^2) / (n_1^2 - n_3^2)$ — степень асимметрии волноводной структуры; $b = (n_1/n_3)^2$ — фактор направляемости; отрицательные значения корней в правой части отвечают дисперсионному уравнению собственных, положительные — различных несобственных мод. Величина a принимает значения от нуля (симметричный ПДВ: $n_2 = n_3$) до бесконечности при сильной асимметрии (слабонаправляющий волновод: $n_1 \approx n_3 \gg n_2$ [4]). Величина b принимает значения от единицы (направляющая поверхность [7]) до $1 + 1/a$. В отличие от направляемых HE-мод [1] в уравнении (4), помимо V и a , есть еще один независимый параметр b , необходимый для представления общей волноводной структуры [3]. По сравнению с симметричным ПДВ [9, 11] имеются два дополнительных параметра (a и b). На рис. 1 представлены дисперсионные зависимости $A = A(V)$ для различных степеней асимметрии и факторов направляемости. При $a \rightarrow \infty$ (для заданного b) имеет место вырождение по модовому числу p и кривые собственных и несобственных мод покрытия попарно сливаются (с разными p); аналогичная ситуация имеет место для несобственных мод и несобственных мод подложки. Поэтому при увеличении степени асимметрии свойство направляемости ПДВ уменьшается (полное отражение на границах выполняется для все меньшего диапазона углов падения [4, 12]). При $b \rightarrow 1 + 1/a$ (для заданного a) отмечается аналогичное вырождение по модовому числу p . Очевидно, что в асимметричном ПДВ, в отличие от симметричного [9, 11, 13], при скользящем затухании все собственные моды имеют критическую длину волны (критическую минимальную толщину волновода) [1]. Волноводный

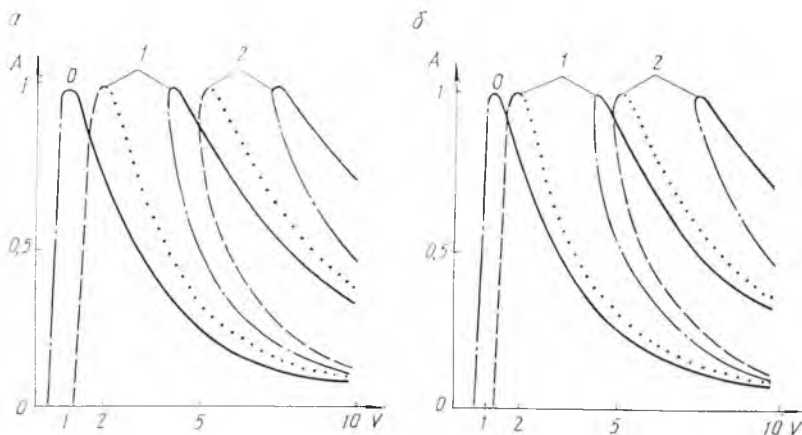


Рис. 1. Случай скользящего затухания:

$a = a=1, v=1,3$; $b = a=3, v=1,1$. Сплошные линии — дисперсионные кривые собственных, штриховые — несобственных мод, штрихпунктирные — несобственных мод покрытия. Цифры отвечают номерам мод

эффект для всех типов мод наблюдается только при длине волны, большей некоторого минимального значения (для заданной толщины). При меньших длинах волн асимметричный слой не может удерживать электромагнитную энергию [12]. Условие отсечки собственных мод (верхний знак, $p=0, 1, 2, \dots$) и несобственных мод покрытия (нижний знак,

$p=1, 2, \dots$) имеет вид $V_p = p\pi \pm \arctg \left[\frac{bV\bar{a}}{1+a(1-b)} \right]$. В этих точках можно аналитически получить решения: $kd = V_p / \sqrt{n_1^2 - n_3^2}$, $e_x = \sqrt{n_1^2 - n_3^2} / n_1$.

Условие отсечки несобственной моды первого порядка (верхний знак) и несобственной моды подложки нулевого порядка (нижний знак) определяется выражением: $V = 1/b \left[1 \pm \frac{1+a(1-b)}{\sqrt{1+a}} \right]$; этим точкам соответствует тривиальное решение $e_x = 0$. Условия отсечки остальных несобственных мод нельзя выразить аналитически: они определяются путем совместного решения (4) и уравнения $V'(A) = 0$. С ростом a (для фиксированного b) величина отсечки увеличивается для собственных мод и несобственных мод подложки и уменьшается для несобственных мод и несобственных мод покрытия. С ростом b (для фиксированного a) характер поведения величин отсечки такой же.

Скользящее распространение. В этом случае нижнее уравнение (1) выполнимо только при $\xi = 0$. Тогда дисперсионное уравнение ЕН-мод (2) имеет смысл при условии

$$e_{2x}^2 \geq \max \left(\frac{n_2^2 - n_1^2}{n_1^2}, \frac{n_3^2 - n_1^2}{n_1^2} \right), \quad (5)$$

которое накладывает на показатели преломления сред менее жесткое требование, чем при скользящем затухании (3): если сердцевина оптически плотнее подложки ($n_1 > n_3$) и покрытия ($n_1 > n_2$), условие (5) не ограничивает значения e_{2x} . При выполнении (5) уравнение (2) становится действительным уравнением относительно e_{2x} и kd и имеет смысл ввиду ограниченности функции гиперболического тангенса в двух случаях: $n_1 > n_2, n_1 > n_3$ или $n_1 < n_2, n_1 < n_3$ (как и прежде $n_3 > n_2$):

$$\begin{aligned} V\sqrt{A} &= \text{arth} \left[\frac{1}{b} \sqrt{\frac{A}{1+A}} \right] + \text{arth} \left[\frac{1+a(1-b)}{b} \sqrt{\frac{A}{1+a+A}} \right], \\ V\sqrt{A} &= \text{arth} \left[b \sqrt{\frac{A-1}{A}} \right] + \text{arth} \left[\frac{b}{1+a(1-b)} \sqrt{\frac{A-1+a}{A}} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где новые нормированные величины $V = kd \sqrt{|n_1^2 - n_3^2|} \geq 0$, $A = n_1^2 e_{2x}^2 / |n_1^2 - n_3^2| \geq 0$, $a = (n_3^2 - n_2^2) / |n_1^2 - n_3^2|$, $b = (n_1/n_3)^2$ и отрицательные

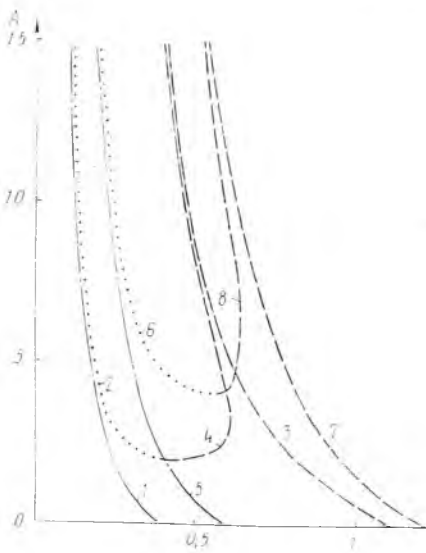


Рис. 2. Случай скользящего распространения. Цифрами обозначены дисперсионные кривые:

1, 3 — $a = 1$, $b = 1.1$; 2, 4 — $a = 1$, $1/b = 1.1$; 5, 7 — $a = 3$, $b = 1.3$; 6, 8 — $a = 3$, $1/b = 1.3$

симметричного ПДВ ($a \rightarrow 0$) кривые 1, 2, 5, 6 сливаются с осью ординат, кривые 4, 8 переходят в дисперсионную кривую несобственной симметричной, а кривые 3, 7 — несобственной антисимметричной моды [11]. При $b \rightarrow 1 + 1/a$ или $1/b \rightarrow 1 + 1/a$ (для фиксированного a) имеет место аналогичное вырождение. Очевидно, что в случае скользящего распространения волноводный эффект имеет место только при длине волны, меньшей некоторого критического значения (для заданной толщины). При больших длинах волн асимметричный ПДВ не может удерживать электромагнитную энергию для таких мод. В случае $n_1 > n_2$, $n_1 > n_3$ условие отсечки несобственной моды (верхний знак) и несобственной моды подложки (нижний знак) имеет вид: $V \frac{1}{b} \left[1 \pm \frac{1+a(1-b)}{\sqrt{1+a}} \right]$; в этих точках имеет тривиальное решение $e_x = 0$. В случае $n_1 < n_2$, $n_1 < n_3$ условие отсечки нельзя выразить аналитически: оно определяется путем совместного решения второго уравнения (6) и уравнения $V'(A) = 0$.

Условия (3) и (5) приводят к тому, что поперечное волновое число части поля вне ПДВ принимает только чисто мнимые значения:

$$KN_2 e_x^* = ik \sqrt{n_1^2 - n_2^2 \mp n_1^2 \begin{pmatrix} e_{1x}^2 \\ e_{2x}^2 \end{pmatrix}} \quad \text{и} \quad KN_3 e_x^* = ik \sqrt{n_1^2 - n_3^2 \mp n_1^2 \begin{pmatrix} e_{1x}^2 \\ e_{2x}^2 \end{pmatrix}}$$

и, следовательно, волны являются поверхностными. Как известно [7], только для поверхностных волн полный поток мощности, переносимый в направлении оси z , отличен от нуля.

Если совместить рис. 1 и 2, видим, что дисперсионные кривые направляемых ЕН-мод (прозрачные среды) асимметричного ПДВ, как и в случаях [1, 9, 11], в совокупности образуют замкнутую фазовую траекторию в двумерном пространстве независимых параметров V и A , причем эти параметры принимают все возможные значения от нуля до бесконечности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Титов А. Д., Хапалюк А. П.—Изв. вузов СССР. Радиофизика, 1983, т. 26, № 10, с. 1315.
1. Титов А. Д., Хапалюк А. П.—Изв. вузов СССР. Радиофизика, 1984, т. 27, № 1, с. 126.
3. Kogelnik H., Ramaswamy V.—Appl. Opt., 1974, v. 13, № 8, p. 1857.
4. Унгер Х.-Г. Планарные и волоконные оптические волноводы.—М., 1980.
5. Кириленко А. И., Титов А. Д., Хапалюк А. П. Неоднозначность матриц отражения и прохождения плоских неоднородных волн.—Рукопись деп. в ВИНТИ № 1926-78. Деп. от 13.06.78.
6. Шевченко В. В.—Раднотехника и электроника, 1969, т. 14, № 10, с. 1768.
7. Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах.—М., 1969.
8. Шевченко В. В.—Изв. вузов СССР. Радиофизика, 1972, т. 15, № 2, с. 257.
9. Титов А. Д., Хапалюк А. П.—Изв. вузов СССР. Радиофизика, 1983, т. 26, № 4, с. 455.
10. Кириленко А. И., Титов А. Д., Хапалюк А. П.—Изв. вузов СССР. Радиофизика, 1981, т. 24, № 4, с. 511.
11. Титов А. Д., Хапалюк А. П.—Вести. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2, с. 3.
12. Гончаренко А. М., Редько В. П. Введение в интегральную оптику.—Минск, 1975.
13. Титов А. Д., Хапалюк А. П.—Изв. вузов СССР. Радиофизика, 1983, т. 26, № 5, с. 593.

УДК 548.0539

В. Г. БАРЫШЕВСКИЙ, О. Н. МЕТЕЛИЦА

УГЛОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ γ -КВАНТОВ РАСПАДА ПОЗИТРОНИЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Если поместить позитроний в магнитное поле, возникает новое явление — затухающие биения углового распределения γ -квантов трехфотонного распада позитрония [1, 2]. В этом случае непосредственно измеряется распределение направлений импульсов образованных γ -квантов, а не распределение нормали к плоскости распада, как в [3]. Метод исследования вещества, основанный на этом явлении, позволяет изучать вращение и деполаризацию спина позитрония. В настоящей работе найдено временное распределение направлений импульсов γ -квантов.

Энергия, выделяющаяся при аннигиляции атома, значительно больше энергии кулоновского взаимодействия электрона и позитрона в позитронии, поэтому для нахождения амплитуды распада можно применить импульсное приближение. Тогда точный матричный элемент трехквантового распада позитрония заменяется амплитудой аннигиляции свободной электрон-позитронной пары, вычисленной в пределе нулевых скоростей частиц.

Перемножим в выражении для амплитуды аннигиляции свободной пары [4] матрицы Дирака и перейдем к матрицам Паули. Используя явный вид спиновых функций позитрония [5], получим:

$$M_{11} = \frac{(4\pi)^{3/2} e^3}{m} (u_y - iu_x), \quad M_{1-1} = \frac{(4\pi)^{3/2} e^3}{m} (u_y + iu_x), \quad (1)$$

$$M_{10} = \frac{(4\pi)^{3/2} e^3}{m} (\sqrt{2} iu_z),$$

где $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3$, $\bar{u}_1 = \bar{e}_1 (\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 - \bar{a}_2 \cdot \bar{a}_3) + \bar{a}_1 (\bar{e}_2 \cdot \bar{a}_3 + \bar{e}_3 \cdot \bar{a}_2)$, \bar{e}_i , \bar{k}_i , ω_i — поляризация, импульс и частота i -го фотона, $\bar{a}_i = \bar{e}_i \times \bar{n}_i$, $\bar{n}_i = \frac{\bar{k}_i}{\omega_i}$; \bar{u}_2 и \bar{u}_3 получаются из \bar{u}_1 с помощью циклической перестановки индексов. M_{113} — амплитуда аннигиляции позитрония с полным спином 1 и проекцией спина 1₃; $M_{00} = 0$, что и следовало ожидать из соображений симметрии. Квадрат матричного элемента (1) совпадает с известным выражением [6].

Зависящая от времени волновая функция произвольного состояния

позитрония в магнитном поле есть линейная комбинация функций стационарных состояний:

$$\Phi = \sum_{j=0}^3 B_j \chi_j e^{-i\varepsilon_j t}. \quad (2)$$

где χ_j — функция j -ого стационарного состояния позитрония в магнитном поле; $\varepsilon_j = E_j - \frac{i\gamma_j}{2}$ — комплексные энергии состояний. Коэффициенты B_j , зависящие от геометрии эксперимента, можно вычислить с помощью метода, описанного в [3].

Учитывая явный вид функций χ_j [7], а также разложение (2), получим амплитуду аннигиляции произвольного состояния позитрония в виде линейной комбинации матричных элементов (1). Просуммируем квадрат амплитуды по поляризациям фотонов и по поляризациям электронов среды, считая, что среда не поляризована:

$$\begin{aligned} |M|^2 = & \frac{(4\pi)^3 e^6}{2m^2} AF(\bar{z}_0, \bar{z}_0) e^{-\gamma_0 t} + BF(\bar{z}_0, \bar{z}_0) e^{-\gamma_1 t} + \\ & + (F(\bar{x}_0, \bar{x}_0) + F(\bar{y}_0, \bar{y}_0)) e^{-\gamma_2 t} + 2QF(\bar{z}_0, \bar{z}_0) \cos(E_1 - E_0) t e^{-\frac{\gamma_0 + \gamma_1}{2} t} + \\ & + 2C_1^0 \sin \vartheta D \cos[(\omega_1 - E_0) t + \Phi_0] e^{-\frac{\gamma_0 + \gamma_2}{2} t} + \\ & + 2C_1^1 \sin \vartheta K \cos[(E_1 - W_1) t + \Phi_1] e^{-\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} t}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $A = (C_0^0)^2 (1 + 2C_0^0 C_1^0 \cos \vartheta)$, $B = (C_1^1)^2 (1 + 2C_0^1 C_1^1 \cos \vartheta)$, $Q = C_0^0 C_1^1 \times$
 $\times (C_0^0 C_1^1 + C_0^1 C_1^0) \cos \vartheta$, $D^2 = (C_0^0)^2 P_2^2 + (C_1^0)^2 P_1^2$, $K^2 = (C_0^1)^2 P_2^2 + (C_1^1)^2 P_1^2$,
 $P_1 = F(z_0, y_0) \cos \varphi - F(z_0, x_0) \sin \varphi$, $P_2 = F(\bar{z}_0, \bar{y}_0) \sin \varphi + F(\bar{z}_0, \bar{x}_0) \cos \varphi$,
 $\text{tg } \Phi_0 = \frac{C_1^0 P_1}{C_0^0 P_2}$, $\text{tg } \Phi_1 = -\frac{C_1^1 P_1}{C_0^1 P_2}$, $F(\bar{a}, \bar{b}) = 4\bar{a} \cdot \bar{b} \{3 - 2(\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 + \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_3 +$
 $+ \bar{n}_2 \cdot \bar{n}_3) + (\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2)^2 + (\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_3)^2 + (\bar{n}_2 \cdot \bar{n}_3)^2\} + 4\bar{a} \cdot \bar{n}_1 \bar{b} \cdot \bar{n}_1 (-1 + 2\bar{n}_2 \cdot \bar{n}_3 - (\bar{n}_2 \cdot \bar{n}_3)^2) +$
 $4\bar{a} \cdot \bar{n}_2 \bar{b} \cdot \bar{n}_2 (-1 + 2(\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_3) - (\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_3)^2) + 4\bar{a} \cdot \bar{n}_3 \bar{b} \cdot \bar{n}_3 (-1 + 2\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 - (\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2)^2)$,

W_1 и W_0 — энергии основных состояний орто- и парапозитрония; $\bar{x}_0, \bar{y}_0, z_0$ — единичные векторы в направлении осей X, Y и Z ; ϑ и φ — полярный и азимутальный углы поляризации позитрона, влетающего в мишень. Ось Z системы координат направлена вдоль магнитного поля. Зависящие от величины поля коэффициенты C_e^k смешивания синглетного и триплетного состояний записаны в [7].

Квадрат амплитуды (3) испытывает биения на трех частотах:

$$\begin{aligned} \Omega_1 = E_1 - W_1 &= \frac{W_1 - W_0}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{4\mu H}{W_1 - W_0} \right)^2} - 1 \right), \\ \Omega_2 = E_1 - W_0 &= \frac{W_1 - W_0}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{4\mu H}{W_1 - W_0} \right)^2} + 1 \right), \\ \Omega_3 = E_1 - E_0 &= (W_1 - W_0) \sqrt{1 + \left(\frac{4\mu H}{W_1 - W_0} \right)^2}, \end{aligned}$$

где μ — магнетон Бора. При распаде позитрония в слабых (меньше 1 Тл) полях $\Omega_1 \ll \Omega_2 \ll \Omega_3$. Так, если $H \sim 1$ кГс, $\Omega_1 \sim 2,4 \cdot 10^8$ с $^{-1}$ и $\Omega_2, \Omega_3 \sim 1,3 \cdot 10^{12}$ с $^{-1}$. В случае, когда временные характеристики установки не позволяют наблюдать высокочастотных биений, члены, содержащие Ω_2 и Ω_3 , при усреднении по временному разрешению детектора обратятся в нуль.

Рассмотрим эксперимент с тремя детекторами, лежащими в одной

плоскости на одинаковом расстоянии от точки распада. Расположение детекторов однозначно определяет частоты регистрируемых фотонов:

$$\omega_1 = \frac{2m(1 + \bar{n}_2 \cdot \bar{n}_3)}{1 + \bar{n}_2 \cdot \bar{n}_3 - \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 - \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_3}, \quad \omega_2 = \frac{2m(\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_3 \bar{n}_2 \cdot \bar{n}_3 - \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2)}{(1 - \bar{n}_2 \cdot \bar{n}_3)(1 + \bar{n}_2 \cdot \bar{n}_3 - \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 - \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_3)},$$

$$\omega_3 = \frac{2m(\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 \bar{n}_2 \cdot \bar{n}_3 - \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2)}{(1 - \bar{n}_2 \cdot \bar{n}_3)(1 + \bar{n}_2 \cdot \bar{n}_3 - \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 - \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_3)}. \quad (4)$$

Сечение рассматриваемого процесса

$$\sigma = \frac{|M|^2 \omega_1 \omega_2 \omega_3}{(2\pi)^3 64 m^3 v} (\Delta\Omega)^{5/2}, \quad (5)$$

где телесный угол $\Delta\Omega$ из точки распада на окно детектора предполагается малым. Частоты в (5) определяются выражением (4), причем

$$\bar{n}_i \cdot \bar{n}_j = \cos \varphi_{ij},$$

где φ_{ij} — угол между направлениями на i -й и j -й детекторы.

Если углы между детекторами одинаковы (120°), $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \frac{2}{3}m$. Расположим их в плоскости, нормаль к которой имеет координаты $(0, -\sin \psi, \cos \psi)$, причем один из детекторов находится на оси X . Для слабых полей:

$$\sigma = \frac{e^6}{(2\pi)^2 4m^2 v} \{A(2 - \sin^2 \psi) e^{-\gamma_0 t} + B(2 - \sin^2 \psi) e^{-\gamma_1 t} + (2 + \sin^2 \psi) e^{-\gamma_2 t} +$$

$$+ C_1^2 \sin \vartheta \sin 2\psi \sqrt{(C_1^1)^2 \cos^2 \varphi + (C_0^1)^2 \sin^2 \varphi \cos(\Omega_1 t + \Phi_1)} e^{-\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} t}\} (\Delta\Omega)^{5/2},$$

$$\text{tg } \Phi_1 = -\frac{C_1^1}{C_0^1} \text{ctg } \varphi.$$

Если детекторы лежат в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, низкочастотные биения наблюдаться не будут. Это можно использовать для упрощения обработки результатов эксперимента.

При наблюдении двумя детекторами:

$$\delta = \frac{|M|^2}{3(2\pi)^3 32m^2 v} (\Delta\Omega)^2, \quad (6)$$

где $|M|^2$ определяется выражением (3), в котором $F(a, b)$ заменено везде на $F_2(\bar{a}, \bar{b})$:

$$F_2(\bar{a}, \bar{b}) = 4\bar{a} \cdot \bar{b} [3I_1 + 2I_2 + 2I_3 + I_5 + I_6 + 2\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 (I_2 + I_3 - I_1 + 2I_4) +$$

$$+ (\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2)^2 (I_1 + I_5 + I_6)] - 4\bar{a} \cdot \bar{n}_1 \bar{b} \cdot \bar{n}_1 [I_1 + 2I_3 + I_5 + I_6 + 2\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 (I_2 + I_4 - I_5) +$$

$$+ 2(\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2)^2 I_5] - 4\bar{a} \cdot \bar{n}_2 \bar{b} \cdot \bar{n}_2 [I_1 + 2I_2 + I_5 + I_6 + 2\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 (I_3 + I_4 - I_6) +$$

$$+ 2(\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2)^2 I_6] + 4I_4 (\bar{n}_1 \cdot \bar{a} \bar{n}_2 \cdot \bar{b} + \bar{n}_1 \cdot \bar{b} \bar{n}_2 \cdot \bar{a}) (-1 + 2\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 - (\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2)^2).$$

Через I обозначены следующие интегралы:

$$I_1 = \int_0^m \frac{\omega_1 \omega_2}{2m - \omega_1 (1 - \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2)} f(\omega_1) f(\omega_2) d\omega_1,$$

$$I_2 = \int_0^m \frac{\omega_1^2 \omega_2}{(2m - \omega_1 (1 - \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2)) \omega_3} f(\omega_1) f(\omega_2) d\omega_1,$$

$$I_3 = \int_0^m \frac{\omega_1 \omega_2^2}{(2m - \omega_1 (1 - \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2)) \omega_3} f(\omega_1) f(\omega_2) d\omega_1, \quad (7)$$

$$I_4 = \int_0^m \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{(2m - \omega_1 (1 - \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2)) \omega_3^2} f(\omega_1) f(\omega_2) d\omega_1,$$

$$I_5 = \int_0^m \frac{\omega_1^3 \omega_2}{(2m - \omega_1 (1 - \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2)) \omega_3^2} f(\omega_1) f(\omega_2) d\omega_1,$$

$$I_6 = \int_0^m \frac{\omega_1 \omega_2^3}{(2m - \omega_1 (1 - \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2)) \omega_3^2} f(\omega_1) f(\omega_2) d\omega_1,$$

$f(\omega)$ — вероятность регистрации отдельным детектором фотона с энергией ω , ω_2 и ω_3 в (7) определяются геометрией эксперимента и энергией первого γ -кванта:

$$\omega_2 = \frac{2m(m - \omega_1)}{2m - \omega_1(1 - \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2)},$$

$$\omega_3 = \frac{2m^2 - 2m\omega_1(1 - \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2) + \omega_1^2(1 - \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2)}{2m - \omega_1(1 - \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2)}.$$

Приведем также вклад 3γ -аннигиляции в скорость счета при регистрации распадов одним детектором:

$$\sigma = \frac{|M|^2}{(2\pi)^5 192 m^2 v} \Delta\Omega,$$

где $|M|^2$ определено выражением (3), в котором $F(\bar{a}, \bar{b})$ заменено на $F_3(\bar{a}, \bar{b})$: $F_3(\bar{a}, \bar{b}) = \int F_2(\bar{a}, \bar{b}) d^2n_2$.

Отметим, что экспериментальное наблюдение явления наиболее удобно проводить в полях от 0,02 до 2 Тл. В более слабых полях период биений меньше времени жизни ортопозитрония. Сильные поля требуют применения аппаратуры с высоким временным разрешением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барышевский В. Г. — Докл. АН БССР, 1976, т. 20, с. 212.
2. Барышевский В. Г. Ядерная оптика поляризованных сред. — Минск, 1976.
3. Барышевский В. Г., Турко А. Н. — Весні АН БССР. Сер. фіз. мат. навук, 1978, № 5, с. 128.
4. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Пятаевский Л. П. Квантовая электродинамика. — М., 1980.
5. Гольданский В. И. Физическая химия позитрона и позитрония. — М., 1968.
6. Drisco R. M. — Phys. Rev. 1956, v. 102, p. 1542.
7. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. — М., 1969.

УДК 681.3

В. Е. ЯМНЫЙ, НГУЕН ДАНГ КУАНГ

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ АБСОРБЦИИ КОНДЕНСАТОРОВ

В аналоговых запоминающих устройствах, интеграторах, амплитудно-временных преобразователях возникает специфическая ошибка, связанная с абсорбцией диэлектрика конденсатора. В этих устройствах эквивалентную схему конденсатора следует представлять, как показано на рис. 1 [1]. Из схемы видно, что при малом времени заряда напряжение на конденсаторе C_0 установится полностью, а конденсаторы C_1 , C_2 и C_3 зарядятся только частично, поэтому при отключении цепи заряда напряжение на конденсаторах C_1 , C_2 , C_3 будет увеличиваться, а на C_0 упадет. Напряжение на конденсаторе C_0 в зависимости от типа диэлектрика меняется в пределах от нуля до единиц процентов, что приводит к большим погрешностям работы указанных устройств.

Настоящая работа посвящена экспериментальному определению составляющих эквивалентной схемы рис. 1, для которой обычно выбирают [1]: $R_1C_1=0,1R_2C_2=0,01R_3C_3=10^{1-} R_7C_7=\tau_1$. Величина τ_1 может быть произвольной. Как правило, диапазон времен (отношение времени хранения ко времени выборки), в которых работает аналоговая память, составляет 10—100, поэтому достаточно ограничиться $v=3$, чтобы учесть поведение реального конденсатора в электрической схеме. Возможности экспериментальной установки не позволили исследовать конденсаторы

при $\tau < 45$ мкс. Следует отметить, что параметры эквивалентной схемы конденсатора при временах заряда/разряда менее 0,02 с в литературе отсутствуют.

Как показано ниже, при определенных условиях эксперимента удается непосредственно рассчитать любую составляющую эквивалентной схемы, используя лишь одно измерение.

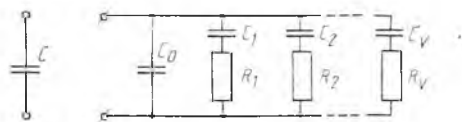


Рис. 1. Эквивалентная схема конденсатора с учетом диэлектрической абсорбции

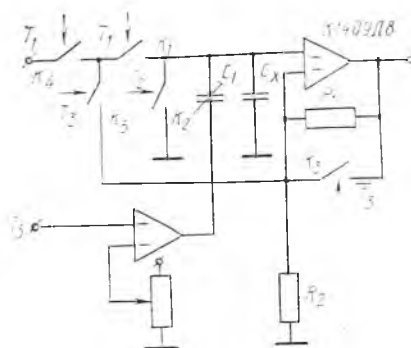


Рис. 2. Принципиальная схема экспериментальной установки

Допустим, что исследуемый конденсатор C заряжается до напряжения U_0 в течение времени T_{1n} , а затем разряжается за время T_{2n} . Так как внутреннее сопротивление ключа мало, в конце заряда напряжение на конденсаторе C_0 будет равно U_0 , а в конце разряда — нулю. Напряжение на конденсаторе C_m за время T_{1n} :

$$U_m = U_0 (1 - e^{-T_{1n}/\tau_m}),$$

где $\tau_m = C_m R_m$.

За время разряда T_{2n} напряжение на конденсаторе C_m уменьшится до величины

$$U'_m = U_m e^{-T_{2n}/\tau_m},$$

что соответствует остаточному заряду на конденсаторе C_m :

$$q_m = C_m U'_m.$$

После отключения от конденсатора C ключей заряда и разряда на нем установится напряжение

$$U_n = \frac{\sum_m q_m}{C} = \frac{U_0}{C} \sum_{m=1}^v C_m (1 - e^{-T_{1n}/\tau_m}) e^{-T_{2n}/\tau_m}. \quad (1)$$

Измеряя напряжение U_n для различных T_{1n}, T_{2n} ($n = \overline{1, v}$), по (1) можно составить v уравнений с v неизвестными $C_1, C_2 \dots C_v$:

$$\begin{cases} C \frac{U_1}{U_0} = \sum_{m=1}^v C_m (1 - e^{-T_{11}/\tau_m}) e^{-T_{21}/\tau_m}, \\ C \frac{U_2}{U_0} = \sum_{m=1}^v C_m (1 - e^{-T_{12}/\tau_m}) e^{-T_{22}/\tau_m}, \\ \dots \\ C \frac{U_v}{U_0} = \sum_{m=1}^v C_m (1 - e^{-T_{1v}/\tau_m}) e^{-T_{2v}/\tau_m}. \end{cases} \quad (2)$$

Полученная система уравнений позволяет рассчитать параметры эквивалентной схемы (см. рис. 1) по экспериментальным данным с любым v , однако, как указано выше, можно ограничиться $n = v = 3$. Если выбрать $T_{1n} = T_{2n} = t_n$, а $t_{n+1} = 10t_n$, то система уравнений (2) упрощается:

$$\frac{U_1}{U_0} C = C_1 (1 - e^{-k}) e^{-k} + C_2 (1 - e^{-k/10}) e^{-k/10} + C_3 (1 - e^{-k/100}) e^{-k/100}, \quad (3a)$$

$$\frac{U_2}{U_0} C = C_1 (1 - e^{-10k}) e^{-10k} + C_2 (1 - e^{-k}) e^{-k} + C_3 (1 - e^{-k/10}) e^{-k/10}, \quad (3б)$$

$$\frac{U_3}{U_0} C = C_1 (1 - e^{-100k}) e^{-100k} + C_2 (1 - e^{-10k}) e^{-10k} + C_3 (1 - e^{-k}) e^{-k}, \quad (3в)$$

где $k = t_m / \tau_m$, $m = 1, 2, 3$.

Как известно, функция $f(x) = (1 - e^x) e^x$ при $x < 0$ достигает максимума в точке $x = -\ln 2$ или $e^x = 0,5$, тогда $f(-\ln 2) = 0,25$.

Выберем t_m и τ_m такими, чтобы $k = \ln 2$, тогда в (3а) можно пренебречь составляющими, содержащими C_2, C_3 , в (3б) — составляющими, содержащими C_1 и C_3 , а в (3в) пренебрегаем составляющими, содержащими C_1 и C_2 . Тогда получим:

$$C_1 \approx 4 \frac{U_1}{U_0} C, \quad C_2 \approx 4 \frac{U_2}{U_0} C, \quad C_3 \approx 4 \frac{U_3}{U_0} C.$$

Для измерения U_1, U_2, U_3 была собрана схема (рис. 2). Ключи управлялись от электронного таймера, который позволял формировать последовательность периодических сигналов для заряда / разряда конденсатора и паузы (T_{1i} — заряд, T_{2i} — разряд, T_{3i} — пауза). В конце паузы T_{3i} осциллографом С1-70 измерялось напряжение U_i . Повышение чувствительности достигалось компенсацией заряда переключения ключей с помощью конденсатора C_1 . Для уменьшения перегрузки усилителя резистор обратной связи во время заряда/разряда шунтировался ключом K_3 . Применение Т-образного ключа K_1, K_4, K_5 (микросхема 590КН2) позволило уменьшить влияние источника U_0 на величину U_i во время паузы.

Результаты экспериментальных исследований и расчетов сведены в таблицу, причем $t_1 = 30$ мкс, $t_2 = 300$ мкс, $t_3 = 3$ мс, $\tau_1 = 45$ мкс, $\tau_2 = 450$ мкс, $\tau_3 = 4,5$ мс, $U_0 = 5$ В. Приведенные в таблице параметры средние по серии для 10 конденсаторов.

Тип диэлектрика конденсатора	C_0	C_1 , пФ	C_2 , пФ	C_3 , пФ	$\eta = \frac{\bar{C}_i}{C_0} \cdot 10^2$
Н90	10н	88	108	124	1
	6н8	62	42	48	0,3
	15н	140	120	120	0,8
Н30	6н8	100	100	112	1,5
	4н7	24	76	80	1,7
К40У-9	15н	48	68	68	0,4
	47н	363	292	256	0,6
	150н	$11 \cdot 10^3$	1200	1100	2,9
5Н90	33н	180	308	360	0,9
6Н90	150н	$10 \cdot 10^3$	3800	4800	4,2
М47	1н2	4	4	4	0,3
ПМ-1	2н	6	8	6	0,3
К40 П-2Б	10н	80	72	60	0,7
ФТ-1	3н9	0	0	0	0

Как и следовало ожидать, диэлектрическая абсорбция отсутствовала для конденсаторов с фторопластовой изоляцией. Однако из-за большой стоимости последних при погрешностях 0,3—0,5 % можно применять конденсаторы типа К40У-9, М47, ПМ-1. Увеличение номинального значения

конденсаторов практически не изменяло соотношений C_1/C_0 , C_2/C_0 , C_3/C_0 . В первом приближении можно считать величину конденсатора C_i постоянной, независимо от i , что отражено в последней колонке таблицы коэффициентом η . Этот коэффициент позволяет оценить достижимую погрешность работы аналогового запоминающего устройства для различных типов применяемых конденсаторов.

Следует отметить резкое увеличение диэлектрической абсорбции для больших номиналов конденсаторов 6Н90, К40У-9 при малых временах заряда/разряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kalevi Huuppa — IEEE Transactions of instrumentation and measurement, 1972, № 2.

УДК 539.186

А. Ф. КОМАРОВ

ДЕКАНАЛИРОВАНИЕ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В ТОЛСТЫХ КРИСТАЛЛАХ ПРИ АКСИАЛЬНОМ КАНАЛИРОВАНИИ

В связи с обнаружением интенсивного квазимонохроматического спонтанного γ -излучения, предсказанного ранее [1], которое генерируется каналированными релятивистскими лептонами, возникла необходимость выполнить детальное рассмотрение деканалирования частиц по глубине кристалла.

Это объясняется тем, что интенсивность спонтанного излучения при каналировании [1] пропорциональна $z^2\chi_{1/2}$, где z — порядковый номер элемента мишени, а $\chi_{1/2}$ — длина деканалирования.

Данное излучение является весьма интересным с точки зрения его спектрально-угловых характеристик и возможности перестройки частотного распределения за счет изменения энергии частиц, сорта кристалла, начального угла влета пучка частиц в канал, типа канала, а также температуры кристалла.

Практический интерес представляет знание функции деканалирования, т. е. доли частиц, оставшихся в данном канале на данной глубине.

Для расчета функции деканалирования численно решается полученное в работе [2] кинетическое уравнение типа Фоккера-Планка для функции распределения ультрарелятивистских электронов в аксиальных каналах $f(\epsilon, \mu, z)$, где ϵ — поперечная энергия частиц, μ — их угловой момент относительно атомной цепочки, z — глубина проникновения частиц в кристалл.

Для случая аксиального каналирования электронов уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} = & \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\left\langle \frac{\Delta \epsilon^2}{2\Delta z} \right\rangle T \frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{f}{T} \right) + \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\left\langle \frac{\Delta \epsilon \Delta \mu}{2\Delta z} \right\rangle T \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{f}{T} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\left\langle \frac{\Delta \mu \Delta \epsilon}{2\Delta z} \right\rangle T \frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{f}{T} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\left\langle \frac{\Delta \mu^2}{2\Delta z} \right\rangle T \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{f}{T} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где T — период поперечного движения электрона в поле атомной цепочки, а угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по периоду T .

Диффузионные коэффициенты в (1) выражаются через среднеквадратичный угол многократного рассеяния $\Delta\theta^2$. При численном решении уравнения (1) учитывалось многократное рассеяние на электронах и тепловых колебаниях ядер кристалла.

Электронное рассеяние полагалось пропорциональным электронной плотности в канале $(\Delta\theta^2)_e \sim n(r)$. Для ядерного коэффициента исполь-

зовалось приближение Отзуки [3]: $(\Delta\theta^2)_{th} \sim (r_0/u_{\perp})^2 \exp(-r^2/u_{\perp}^2)$, r_0 — размер канала, u_{\perp} — амплитуда тепловых колебаний ядер цепочки.

Канализованными считаются электроны, находящиеся в связанном состоянии в поле атомной цепочки $U(r)$. Поперечная энергия ϵ таких электронов отрицательна.

Многочисленное рассеяние на электронах кристалла и тепловых колебаниях решетки приводит к росту поперечной энергии частицы до нуля и выходу ее из связанного состояния (т. е. из канала). При этом частицы переходят в режим квазиканализации.

Функция распределения $f(\epsilon, z)$ для таких частиц зависит только от поперечной энергии и удовлетворяет одномерному кинетическому уравнению:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\left\langle \frac{\Delta \epsilon^2}{2\Delta z} \right\rangle \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right). \quad (2)$$

В данном случае $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по всем прицельным параметрам.

Для расчета диффузионных коэффициентов потенциал атомной цепочки аппроксимировался выражением $U(r) = -\alpha/r + U_0$, в котором параметры α и U_0 подбираются из условия наилучшего приближения к потенциалу Мольера [4].

Уравнения (1) и (2) решались совместно на ЭВМ численным методом. Граничным условием в области канализации для ϵ является $U_{\min} \leq \epsilon \leq 0$, где U_{\min} — глубина потенциальной ямы цепочки. Область квазиканализации ограничивалась интервалом $0 \leq \epsilon \leq 4E^c$, где E^c — критическая энергия Линдхарда [5] ($E^c = \frac{E\psi_c^2}{2}$; здесь E — энергия налетающего электрона; ψ_c — критический угол Линдхарда). Граничные условия для μ и $f_0(\epsilon, \mu)$ — начальная функция распределения, выбирались аналогично работе [6].

Результаты совместного решения кинетических уравнений (1) и (2) представлены на рис. 1—3.

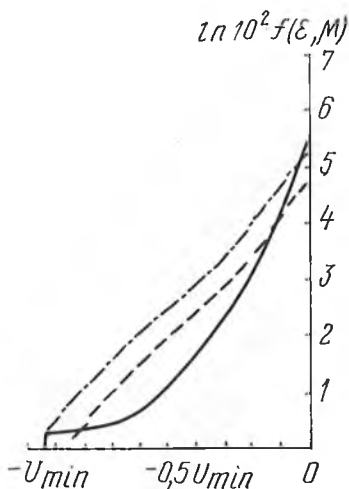


Рис. 1. Эволюция функции распределения с глубиной проникновения электронного пучка с энергией 2 ГэВ в Ni<110> при начальном угле влета $\psi_{in} = 0,15\psi_c$:

сплошная кривая — начальное распределение; штрихпунктирная и штриховая кривые соответствуют глубинам $z = 10$ и 45 мкм

Эволюция функции распределения с глубиной проникновения электронного пучка с энергией 2 ГэВ в кристалл никеля <110> (рис. 1) для наглядности изображена в зависимости от поперечной энергии, т. е. усредненная по всем угловым моментам. Начальное распределение в области положительных значений поперечной энергии считалось нулевым, а в области канализации оно нормировано на единицу, что соответствует предположению полного захвата в связанное состояние всех частиц первоначального пучка.

При решении получаем, что быстрее всего деканализуют электроны с близкими к нулю поперечными энергиями (не считая, конечно, электроны с $|\epsilon| \sim U_{\min}$, доля которых очень мала). Число частиц $\Delta N = \int d\epsilon f(\epsilon, z)$, с $|\epsilon| \sim 0,5U_{\min}$, т. е. на середине ямы, наоборот, увеличивается по сравнению с первоначальным примерно в 3,5 раза на глубине 2 мкм (в Ni<110> при энергии 2 ГэВ с расходимостью пучка $\theta = 7 \cdot 10^{-5}$ рад и начальным углом влета $\psi_{in} = 0,15\psi_c$), а затем начинает медленно убывать.

На рис. 2 показаны результаты расчета

$f(z)$ — функции деканалирования (доли частиц, оставшихся в данном канале на данной глубине) для разных кристаллов и при различных начальных энергиях налетающих электронов, а также $f(z)$ для различных типов каналов и разных углов влета в канал. Для функции распределения $f(\epsilon, \mu, z)$ функция деканалирования будет $f(z) = \int_{U_{\min}}^0 d\epsilon \int_0^{\mu_{\max}} d\mu f(\epsilon, \mu, z)$.

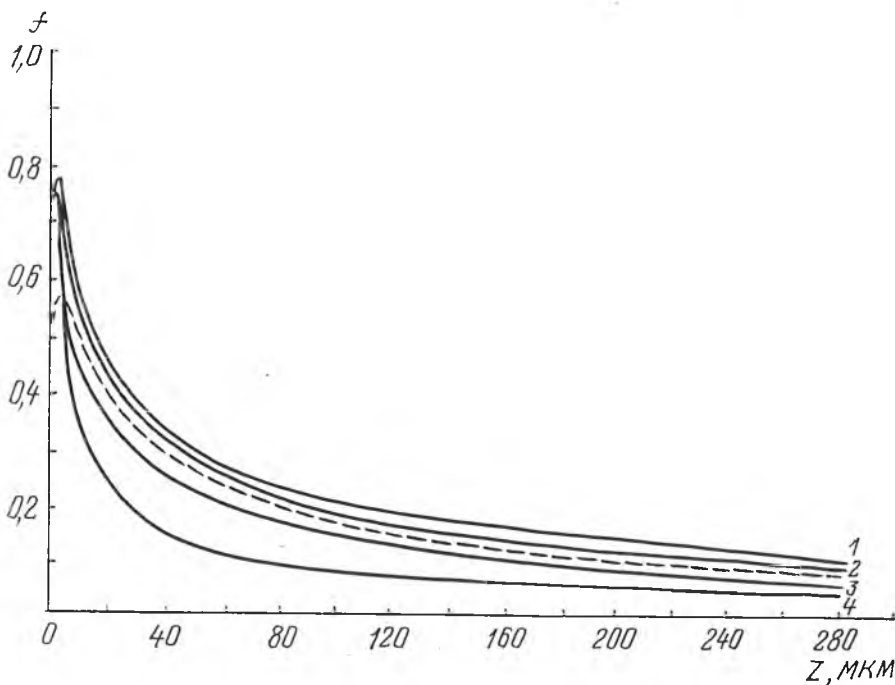


Рис. 2. Зависимость доли частиц $f(z)$, оставшихся в канале, от глубины:

1, 4 — Si $\langle 111 \rangle$, Ni $\langle 111 \rangle$ при угле влета в канал $\psi_{in} = 0,05\psi_c$ и энергии первоначального пучка частиц $E = 2$ ГэВ; 3 — Si $\langle 111 \rangle$ при $E = 1,2$ ГэВ и $\psi_{in} = 0,05\psi_c$; 2 — Ni $\langle 110 \rangle$ при $\psi_{in} = 0,05\psi_c$; штриховая кривая — Ni $\langle 110 \rangle$ при $\psi_{in} = 0,30\psi_c$. Расходимость пучка электронов во всех случаях $\theta = 7 \cdot 10^{-5}$ рад, температура кристаллов — 293 К

Результаты расчета $f(z)$ для кристаллов кремний $\langle 111 \rangle$ и никель $\langle 111 \rangle$ при одной и той же энергии электронов $E = 2$ ГэВ и одном и том же угле влета в канал $\psi_{in} = 0,05\psi_c$ показаны на рис. 2 кривыми 1, 4.

Начальный захват в канал ΔN для Si $\langle 111 \rangle$ при $E = 2$ ГэВ равен 56 %, для Ni $\langle 111 \rangle$ и одной и той же энергии — 63, а для Si $\langle 111 \rangle$ и $E = 1,2$ ГэВ — 61 %. Дальнейшая эволюция $f(z)$ изображена на рис. 2: с увеличением глубины скорость деканалирования уменьшается.

Представляет интерес исследовать зависимость $f(z)$ от энергии налетающего пучка. Для Si $\langle 111 \rangle$ при $E = 1,2$ ГэВ и Si $\langle 111 \rangle$ при $E = 2$ ГэВ, глубина $\chi_{1/2}$, на которой число частиц в канале уменьшается наполовину, увеличивается с увеличением энергии налетающего пучка приблизительно по линейному закону, т. е. $\chi_{1/2} \sim \gamma$.

Функция деканалирования $f(z)$ для различных типов каналов одной мишени и разных углов влета электронов в канал представлена на рис. 2 кривыми 2, 4 и штрихпунктирной.

Как видно из рис. 2, $f(z)$ зависит как от типа канала, так и от угла влета в канал.

Зависимость $f(z)$ от типа канала объясняется тем, что для различных аксиальных каналов характерно разное расстояние d между атомами в цепочке и, соответственно, разные по величине потенциалы цепочки, так как $U(r) \sim 1/d$.

При угле влета $\psi_{in}=0$ в канал захватываются все частицы, однако при этом они быстро деканализируют из-за сильного рассеяния на ядрах, а при больших ψ_{in} доля захваченных в канал частиц очень мала. Как показывает решение кинетического уравнения, оптимальные углы влета в канал для различных кристаллов заключены в интервале $\psi_{in}^{opt} \approx 0,05—0,3 \psi_c$. Так, например, для $Si \langle 111 \rangle$ $\psi_{in}^{opt} \approx 0,05 \psi_c$, а для $Ni \langle 110 \rangle$ $\psi_{in}^{opt} = 0,15 \psi_c$.

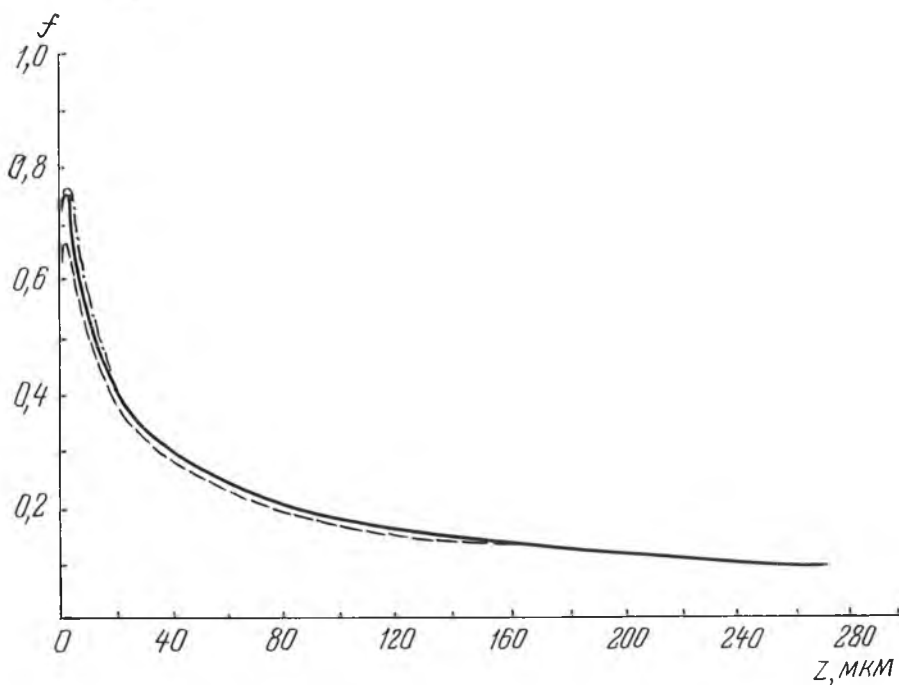


Рис. 3. Зависимость доли частиц $f(z)$, оставшихся в канале, от глубины для различных температур кристалла:

сплошная и штрихпунктирная кривые соответствуют 293 и 500, штриховая — 100 К. Для всех трех случаев $E=2$ ГэВ, $\psi_{in}=0,15 \psi_c$, $\theta=7 \cdot 10^{-5}$ рад

Множественное рассеяние частиц на атомных цепочках в области квазиканализации приводит к тому, что часть из них захватывается в канал. Так, например, в $Ni \langle 110 \rangle$ при угле влета $\psi_{in}=0,15 \psi_c$ число частиц, находящихся в канале, увеличивается на глубине 1 мкм по сравнению с первоначальным на 19 %. Как видно из рис. 2 такое перераспределение электронов происходит на очень малых глубинах 0,5—1,5 мкм.

На рис. 3 приводится $f(z)$ для $Ni \langle 110 \rangle$ с энергией электронов $E=2$ ГэВ и угле влета в канал $\psi_{in}=0,15 \psi_c$ при температуре кристалла 100, 293, 500 К.

С понижением температуры кристалла уменьшается амплитуда тепловых колебаний и увеличивается глубина потенциальной ямы, образующей канал, и, соответственно, следовало ожидать увеличения $f(z)$, но этого не происходит, т. е. $f(z)$ (рис. 3) почти не изменяется для $T=500$ К или даже частично уменьшается для $T=100$ К. Это можно объяснить тем, что определяющим фактором в деканализации является рассеяние частиц на электронах, поэтому $f(z)$ почти не меняется, однако вследствие более слабого рассеяния на ядрах при низких температурах увеличивается доля электронов с большими по модулю поперечными энергиями, что ведет к увеличению интенсивности излучения, пропорциональной $|e|^{5/2}$. Ранее это отмечалось и в работе [7].

В заключение хочу выразить искреннюю благодарность М. Х. Хоконнову и В. И. Телегину за полезные обсуждения программы численного расчета и результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кумахов М. А.— Докл. АН СССР, 1976, т. 21, с. 581.
2. Белошицкий В. В., Кумахов М. А.— ЖЭТФ, 1982, т. 230, № 5, с. 1077.
3. Kitagawa M., Ohtsuki Y. H.— Phys. Rev., v. 1973, B 8, p. 3117.
4. Moliere G.— Naturforsch., 1947. B. 2A, S. 133.
5. Линдхард Й.— УФН, 1969, т. 99, № 2, с. 249.
6. Телегин В. И., Хоконов М. Х.— ЖЭТФ, 1982, т. 83, с. 260.
7. Комаров Ф. Ф., Телегин В. И., Хоконов М. Х.— Докл. АН СССР, 1983, т. 272, № 2, с. 346.

УДК 621.382.002.621.785.3

В. А. ГОРУШКО, А. З. НИКОЛАЕНЯ, В. А. ПИЛИПЕНКО,
Н. И. СТЕРЖАНОВ, Г. Г. ЧИГИРЬ

ВЛИЯНИЕ ИМПУЛЬСНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ НА ПАРАМЕТРЫ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛЕНОК

Неотъемлемыми элементами современной планарной технологии изготовления интегральных микросхем (ИМС) являются диэлектрические пленки, выполняющие различные функции в ИМС [1]: защиту и пассивацию созданных $p-n$ -переходов, маскирование при локальной диффузии, использование в качестве подзатворного диэлектрика, межслойную изоляцию при многоуровневой металлизации, пассивацию металлизации и др.

Факторами, определяющими свойства диэлектрических пленок (пористость, пробивное напряжение, скорость травления, заряд на границе диэлектрик — полупроводник и др.), являются дефекты их структуры: кислородные вакансии, избыточные кислородные ионы в междоузлиях решетки, ионы металлов в узлах, а также наличие в них гидроксильных групп [2].

Свойства диэлектрических пленок можно существенно улучшить, используя высокотемпературные процессы при их изготовлении и обработке [3]. Однако при этом в пленках возникают значительные термические напряжения, образуется кристаллическая фаза; кроме того, высокая температура воздействует на уже сформированные активные элементы. Среди многочисленных диэлектрических покрытий наибольшее распространение получили окисные пленки кремния.

Целью работы являлось исследование параметров пленок SiO_2 , полученных термическим окислением и плазмохимическим осаждением кремния после воздействия на них импульса мощного некогерентного оптического излучения. Исследования проводились на пластинах кремния диаметром 76 мм марки КЭФ-20 ориентации (100), прошедших химико-механическую полировку. Импульсную оптическую обработку проводили на установках, где в качестве источника излучения служили: в одной установке импульсные ксеноновые лампы для накачки лазеров ИФП-8000-1 при длительности 30 мс, а в другой — галогенные лампы КГ 220-1000-5 при длительности импульса 0,1—10 с. Плотность падающей лучистой энергии в импульсе изменялась от 350 до 860 кДж/м² (лампы ИФП-8000-1) и от 1,3 до 2,7 МДж/м² (лампы КГ 220-1000-5).

Влияние импульсной обработки на диэлектрические пленки изучали методами ИК спектроскопии на просвет, снятия CV -характеристик границы раздела диэлектрик — полупроводник, эллипсометрии, а также определения пробивных напряжений и скорости травления диэлектрических пленок до и после обработки в водном растворе плавиковой кислоты.

Исследования методом ИК спектроскопии пленки двуокиси кремния толщиной 0,11 мкм, полученной термическим окислением, показали незначительное отличие спектров пропускания SiO_2 ($\lambda=8-25$ мкм) до и после их обработки при различных плотностях лучистой энергии (рис. 1). Это свидетельствует о незначительной структурной перестрой-

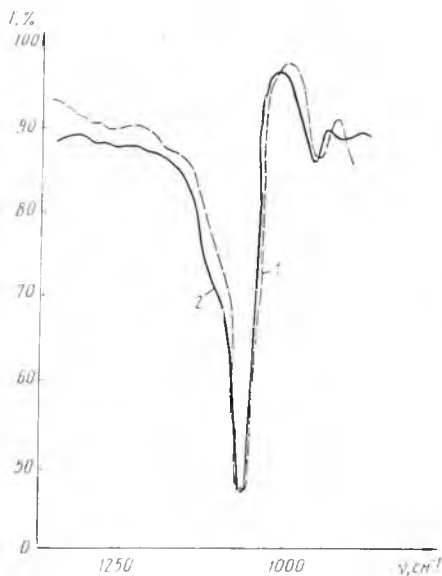


Рис. 1. Спектры пропускания двуокиси кремния, полученной термическим окислением до импульсной оптической обработки (1) и после нее (2) ($W=860$ кДж/м²)

МДж/м² показал смещение полосы поглощения в более коротковолновую область (рис. 2) и уменьшение ее полуширины. Такое изменение спектров пропускания указывает на увеличение плотности пленки и приближение ее структуры к структуре пленок SiO₂, полученных термическим окислением кремния, что подтверждается эллипсометрическими измерениями коэффициента преломления. Так, после облучения пленки коэффици-

ке SiO₂ под воздействием мощного импульса оптического излучения. Измерения напряжения пробоя (табл. 1) и скорости травления (табл. 2) показали, что эти характеристики SiO₂ несколько улучшились после импульсной оптической обработки. Так, пробивное напряжение увеличилось на 20—30 % при $W=350$ кДж/м² и на 7—8 % при $W=860$ кДж/м², а скорость травления при этом уменьшилась на 17 и 1 % соответственно.

Исследования влияния импульсной обработки на двуокись кремния, полученной плазмохимическим осаждением, выявили более существенные изменения параметров диэлектрической пленки и наличие в ней структурной перестройки. Анализ ИК спектров пропускания пленки SiO₂ толщиной 0,12 мкм до и после импульсной обработки с использованием ламп КГ 220-1000-5 при длительности импульса 6с и плотности лучистой энергии 1,62 МДж/м² и 2,7

Таблица 1

Влияние импульсной оптической обработки на напряжение пробоя SiO₂ ($h=0,11$ мкм)

Номер образца		1	2	3	4
Напряжение пробоя, В	до обработки	30,4	35,8	36,6	34,7
	после обработки $W=350$ кДж/м ² $W=860$ кДж/м ²	36,8	47,0	39,7	37,3

Таблица 2

Влияние импульсной оптической обработки на скорость травления SiO₂

Номер образца		1	2
Скорость травления, нм/с	до обработки	0,92	0,76
	после обработки $W=350$ кДж/м ² $W=860$ кДж/м ²	0,76	0,75

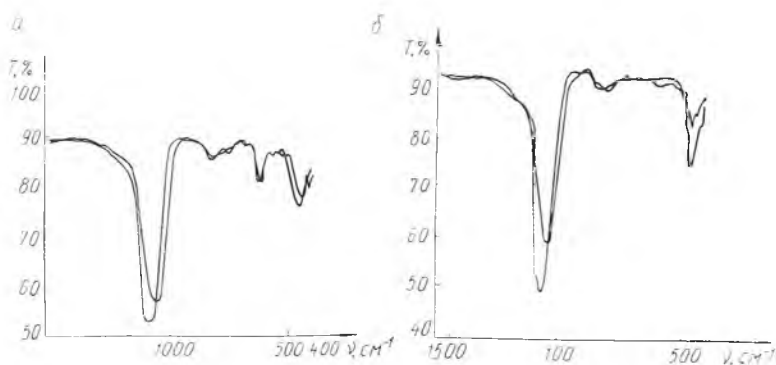


Рис. 2. Спектры пропускания двуокиси кремния, полученной плазмохимическим осаждением, до импульсной обработки (1) и после нее (2):
 а — $W=1,62$ МДж/м², б — $W=2,7$ МДж/м²

ент преломления SiO_2 уменьшился с 1,65 до 1,48, что свидетельствует о приближении свойств SiO_2 , полученной плазмохимическим окислением, к свойствам SiO_2 , полученной термическим окислением, коэффициент преломления которой составляет 1,46. Уменьшение скорости травления SiO_2 в 3—4 раза после импульсной обработки (табл. 3) также указывает на значительное уплотнение SiO_2 , полученной плазмохимическим окислением после импульсной оптической обработки. При этом следует отметить, что увеличение плотности лучистой энергии с 1,62 до 2,7 МДж/м² приводит к большим изменениям в структуре самой пленки и к более существенному уменьшению скорости травления.

Таблица 3

Влияние импульсной обработки SiO_2 , полученной плазмохимическим осаждением, на скорость травления окисла

Толщина SiO_2 , мкм		0,12	0,37	0,62
Скорость травления, нм/с	до обработки	0,89	1,51	1,18
	после обработки			
	$W = 1,62$ МДж/м ²	0,35	0,52	0,78
	$W = 2,7$ МДж/м ²	0,29	0,42	0,39

Исследование границы раздела диэлектрик — полупроводник проводилось на пластинах марки КЭФ-20 диаметром 76 мм ориентации (100), на которых методом термического окисления выращивалась пленка SiO_2 толщиной 0,11 мкм, а затем методом плазмохимического осаждения осаждалась пленка SiO_2 толщиной 0,63 мкм. Импульсная оптическая обработка проводилась с использованием импульсных ламп ИФП-8000-1 при плотности лучистой энергии 400 кДж/м². Для определения параметров границы раздела диэлектрик — полупроводник снимались высокочастотные вольт-фарадные характеристики МОП системы, образованной постановкой индиевого зонда на поверхность окисла, из которых рассчитывалась плотность заряда и величина порогового напряжения (табл. 4).

Таким образом, в процессе импульсной оптической обработки системы $\text{Si-SiO}_{2\text{терм}}-\text{SiO}_{2\text{пхо}}$ происходит уменьшение плотности заряда и пороговых напряжений в среднем в два раза. Следовательно, в результате такой обработки улучшается качество границы раздела диэлектрик — полупроводник за счет получения более совершенной структуры диэлектрической пленки.

Результаты статистической обработки контроля плотности заряда и порогового напряжения системы Si — SiO₂терм — SiO₂пхо после импульсной оптической обработки

Плотность заряда, 10^{-11} см ⁻²	Среднеквадратичное отклонение величины заряда, 10^{-11} см ⁻¹	Пороговое напряжение, В	Среднеквадратичное отклонение величины порогового напряжения, В
До обработки			
10,4	12,2	75	55
После обработки			
5,4	7,3	33	32

Итак, импульсная оптическая обработка диэлектрических пленок позволяет увеличить их плотность, улучшить структуру и в результате улучшить электрофизические свойства пленок и состояние границы раздела диэлектрик — полупроводник.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шнаревич Е. И., Рыбинский О. А., Злобин В. А. Диэлектрики интегральных схем.— М., 1975, с. 106.
2. Основы технологии кремневых интегральных схем. Окисление, диффузия, эпитаксия / Под ред. Р. Бургера, Р. Донована.— М., 1969, с. 26, 111, 141, 144.
3. Корзо В. Ф., Черняев В. Н. Диэлектрические пленки в микроэлектронике.— М., 1977, с. 8.

УДК 535.37

Ю. И. МИКСЮК, И. М. ГУЛИС, С. К. ГОРБАЦЕВИЧ

ДВУХКАНАЛЬНЫЙ ИМПУЛЬСНЫЙ НАНОСЕКУНДНЫЙ ЛАЗЕРНЫЙ ФЛУОРОМЕТР

В решении задач кинетической флуоресцентной спектроскопии в наносекундном диапазоне основные успехи достигнуты благодаря применению метода импульсной флуорометрии [1]. Один из его вариантов, так называемый статистический однофотонный метод, на основе относительно малоинтенсивных возбуждающих импульсов при ряде неоспоримых достоинств требует длительного времени для выполнения измерений. Второй вариант, базирующийся на использовании импульсных, в частности наносекундных лазеров на молекулярном азоте (длина волны генерации 337,1 нм), характеризуется простотой, удобством в работе и позволяет проводить измерения законов затухания, а также «мгновенных» спектров испускания за короткое время. Однако существенным недостатком метода является его невысокая точность, обусловленная трудноустраняемыми флуктуациями интенсивности азотного лазера.

В настоящей работе описана установка, в которой благодаря введению в схему «канала сравнения» этот недостаток сведен к минимуму.

Схема используемого в работе лазера на молекулярном азоте описана в [2]. Для заселения генерационного уровня молекулы азота используется высоковольтный импульсный разряд наносекундной длительности, создаваемый в межэлектродном объеме лазерной камеры с помощью схемы импульсного удвоения напряжения (схема Блумлейна) [3]. Обычно в схемах такого типа в качестве быстродействующего сильноточного ключа применяют недолговечный разрядник лабораторного изготовления [4, 5]. В нашей схеме коммутатором служит металлокерамический тиратрон. Обладая меньшим КПД, он отличается долговечностью, устой-

чивой работой в частотном режиме и превосходной стабильностью запуска [6, 7]. В качестве накопителя вместо обычно применяемых медных пластин с изоляцией [4, 5] (самый ненадежный узел системы) мы использовали малоиндуктивные высоковольтные керамические конденсаторы (типа КВИ-3), удобные в эксплуатации [8, 9]. Применена схема импульсной зарядки конденсаторов, тем самым сокращено до минимума время нахождения элементов схемы под высоким напряжением, т. е. обеспечена ее высокая надежность.

Лазерная кювета представляет собой выфрезерованное из оргстекла, герметически собранное основание, в котором расположены латунные электроды, образующие ребра толщиной 6 и длиной 300 мм. Они скруглены и отполированы. Боковые поверхности ребер удалены от стенок основания. Расстояние между электродами ~ 12 мм. На торцах лазерной кюветы установлены кварцевые окна под углом Брюстера к оси канала. Одно окно служит выходным, за другим — установлено глухое зеркало с алюминиевым покрытием. Осуществлялась непрерывная прокачка азота через лазерную кювету. Систему прокачки образовывали герметизированный сосуд Дьюара с жидким азотом и нагревателем, кран тонкой регулировки скорости напуска азота в кювету, манометр, вакуумный насос. Оптимальное давление газа $8 \cdot 10^3 - 1,06 \cdot 10^4$ Па. Пиковая мощность при этом равнялась примерно 300 Квт, длительность светового импульса по полуширине — 3 нс, частота повторения импульсов — 50 Гц.

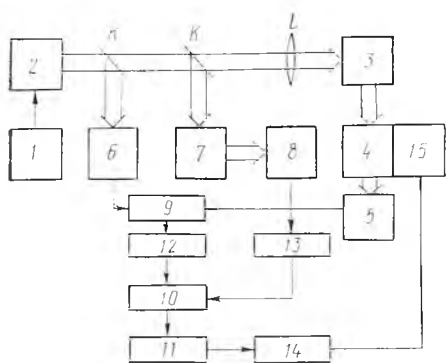


Рис. 1. Блок-схема двухканального импульсного наносекундного лазерного флуорометра. Пояснение см. в тексте

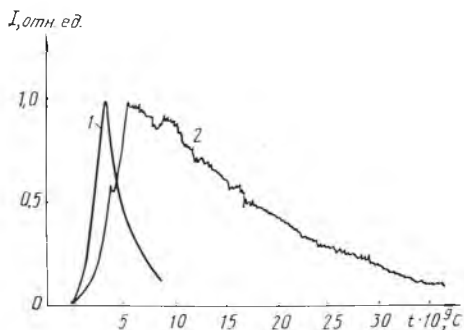


Рис. 2. Импульс генерации азотного лазера (1) (нестабильность по амплитуде $\pm 15\%$). Кинетика затухания флуоресценции 3-амино-N-метилфталимида в бутаноле (2) ($C=5 \cdot 10^{-5}$ М, $\lambda_{\text{рег}} = 480$ нм)

Блок-схема флуорометра показана на рис. 1. Азотный лазер 2 запускается генератором высоковольтных импульсов напряжения 1. Лазерное излучение фокусируется кварцевой линзой на кювету с образцом 3. Импульс флуоресценции образца через монохроматор 4 (SPM-2) регистрируется скоростным ФЭУ 5 (ФЭУ-87) и поступает на вход 1 стробоскопического осциллографа 9 (С7-13). С выхода 1 осциллографа аналоговый сигнал через интегрирующую RC-цепочку 12 (постоянная времени $\tau \sim 2$ с) поступает на вход цифрового вольтметра 10 (В7-23). Часть светового потока возбуждающего лазера с помощью кварцевой пластинки К отводится на фотоэлемент 6 (ФК-19), сигнал с которого поступает на вход синхронизации стробосциллографа. С помощью второй кварцевой пластинки К часть лазерного излучения отводится для формирования сигнала сравнения на эталонный люминесцирующий объект 7 (аммонийуранилфторид), люминесценция которого регистрируется ФЭУ 8 (ФЭУ-87).

Наличие люминесцирующего объекта в «канале сравнения» с большой длительностью свечения ($\tau \sim 1, 2$ ns) является весьма важным моментом. Дело в том, что по техническим соображениям сигнал с «канала

сравнения» необходимо получить в виде постоянного напряжения с величиной порядка 1 В. Если же на ФЭУ «канала сравнения» непосредственно будут поступать наносекундные лазерные импульсы, то, как нетрудно понять, получить усредненное (проинтегрированное) напряжение порядка 1 В в линейном режиме работы ФЭУ невозможно. Роль люминесцирующего объекта, таким образом, заключается в «оптическом растягивании» импульсов от нано- до миллисекунд.

Сигнал с ФЭУ 8 через интегрирующую RC-цепочку 13 (постоянная времени $\tau \sim 20$ с) поступает на вход блока деления цифрового вольтметра, который осуществляет деление исследуемого сигнала на сигнал «канала сравнения» за 0,6 с. Таким образом, с помощью «канала сравнения» удается устранить ошибки, вносимые медленным колебанием во времени интенсивности лазерного излучения, что существенно для азотного лазера, работающего в режиме прокачки. Откорректированный сигнал с выхода вольтметра через блок согласования 11 поступает на вход цифро-аналогового преобразователя ЦАП 14 (Ф723/2), аналоговый сигнал с выхода которого подается на самописец 15 (К 201). Самописец может осуществлять при необходимости развертку барабана длин волн монохроматора 4.

Аппаратура предназначена для регистрации спектрально-временных характеристик флуоресценции в наносекундном диапазоне. Возможны два режима регистрации [10]: 1) регистрируются кривые затухания флуоресценции при фиксированной длине волны регистрации. Регистрация кривых затухания производится в режиме стробирования периодической последовательности исследуемых импульсов (время регистрации одной кривой затухания 3 мин); 2) при фиксированном времени считывания сигнала флуоресценции после момента возбуждения непосредственно регистрируют «мгновенные» спектры излучения (время записи одного мгновенного спектра 20 мин).

На рис. 2 показана типичная кривая затухания люминесценции (длина волны регистрации $\lambda_{\text{рег}} = 480$ нм) для раствора 3-амино-*N*-метилфталимида в бутаноле (концентрация $C = 5 \cdot 10^{-5}$ М), полученная с помощью данного флуорометра.

Разработанная система обладает высокой временной стабильностью, надежностью и удобством в работе. Мощность азотного лазера достаточна для накачки лазера на красителе (например, РОС-лазера, как в [11]) с вытекающими возможностями вариации частоты возбуждения люминесценции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркс Дж., Мапро И.—УФН, 1971, т. 105, вып. 2, с. 251.
2. Бонч-Бруевич В. А., Долгих Ю. К., Тимохин А. А.—ОМП, 1980, № 4, с. 22.
3. Shiptan J. D.—В сб.: Газовые лазеры. М., 1968, с. 202.
4. Мазуренко Ю. Т., Удадьцов В. С.—ЖПС, 1976, т. 25, № 4, с. 751.
5. Basting D., Schäfer F. P., Steyer B.—Opto-electronics, 1972, v. 4, № 1, p. 43.
6. Ищенко В. Н., Лисицин В. Н., Старинский В. Н.—ПТЭ, 1974, № 3, с. 108.
7. Ищенко В. Н., Лисицин В. Н., Ражев А. М., Старинский В. Н.—В сб.: Газовые лазеры. Новосибирск, 1977, с. 213.
8. Эрдевиди Н. М., Зиневич Е. М., Попадинец Ю. Ю.—ЖПС, 1981, т. 35, № 2, с. 220.
9. Бычков Ю. И., Савин В. В., Тарасенко В. Ф.—В сб.: Газовые лазеры. Новосибирск, 1977, с. 224.
10. Мазуренко Ю. Т., Удадьцов В. С.—Изв. АН СССР. Сер. физ., 1980, т. 44, № 4, с. 716.
11. Немкович Н. А., Мацейко В. И., Томин В. И.—Квантовая электроника, 1980, т. 7, № 3, с. 566.

ФОРМИРОВАНИЕ ЛИНИЙ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ СПЕКТРОВ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ УРАНИЛОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Высокая концентрация излучающих центров и приближающийся к единице квантовый выход люминесценции, ярко выраженный дискретный характер электронно-колебательных полос и зависимость характеристик отдельных оптических переходов от внешних и внутренних условий (прежде всего от температуры и степени электронно-колебательного взаимодействия) делают ураниловые соединения достаточно удобными и интересными объектами для изучения проблемы формирования контура спектральной полосы в конденсированной среде [1—3]. Тем не менее форма контуров флуоресцентных линий * этих веществ до настоящего времени изучена недостаточно.

В настоящей работе в диапазоне температур 4—120 К для кристаллов нитратов и хлоридов уранила экспериментально прослеживаются и анализируются различия полуширин и формы контуров спектральных линий, соответствующих оптическим переходам на подуровни энергии валентных колебаний иона уранила. Выбор этих переходов определялся надежностью идентификации и возможностью регистрации с достаточной степенью точности.

Спектры получены на установке, включающей оптический гелиевый криостат переменной температуры, монохроматор высокого разрешения и регистрирующую систему, работающую в режиме счета фотонов. Возбуждение люминесценции осуществлялось ртутно-кварцевой лампой с фильтром, выделяющим излучение ~ 365 нм, либо аргоновым лазером, генерирующим на линии $\lambda = 457,9$ нм; излучение на длине волны $\lambda = 514,5$ нм с мощностью 1 Вт использовалось для записи спектров комбинационного рассеяния в области частот валентных полносимметричных колебаний иона уранила. Полуширина аппаратной функции установки составляла в выбранном спектральном диапазоне $0,2$ см $^{-1}$. Для исследования формы линий контуры их аппроксимировались кривой Фойгта. Выделение гауссовой и лоренцевой составляющих производилось с использованием методики [4].

На рис. 1, а приведена область спектра люминесценции кристаллов $Cs_5UO_2(NO_3)_3$, соответствующая оптическим переходам с частотами $\nu = \nu_0 - n\nu_1$ и $\nu = \nu_0 - n\nu_1 - \nu_3$, где ν_0 — чисто электронная частота; ν_1 и ν_3 — частоты полносимметричного и антисимметричного валентных колебаний иона уранила, n — колебательное квантовое число. Обращает на себя внимание значительное уменьшение полуширины линий при продвижении по спектру в низкочастотную сторону (в четвертой полосе по сравнению с первой они примерно в 3,5 раза уже). Отчетливо заметна также асимметрия контуров линий, связанная с более пологим спадом интенсивности свечения в длинноволновую сторону. Последовательному увеличению n отвечает постепенное обособление указанного длинноволнового крыла и удаление максимума его интенсивности от соответствующей линии на расстояние до 20 см $^{-1}$.

В случае $Cs_2UO_2Cl_4$ (рис. 1, б) аналогичные изменения контуров линий колебаний ν_1 и ν_3 в зависимости от n присущи, по-видимому, каждому из компонентов дублетного расщепления со строго постоянным частотным интервалом 1,6 см $^{-1}$. Это расщепление, судя по данным исследования спектров электронного поглощения кристаллов данного соединения [5], обусловлено проявлением в люминесценции одновременно двух возбужденных электронных состояний.

* Здесь и далее под линией подразумеваются оптические переходы, образующие полосу с полушириной ≤ 10 см $^{-1}$.

В силу сравнительно большой длительности послесвечения ураниловых соединений ($\tau \sim 10^{-3}$ с) радиационная ширина спектральных линий для них должна быть чрезвычайно мала. Однако, как видно из эксперимента, даже при столь низких температурах, как гелиевые, линии достаточно широки, включая и линию чисто электронного перехода.

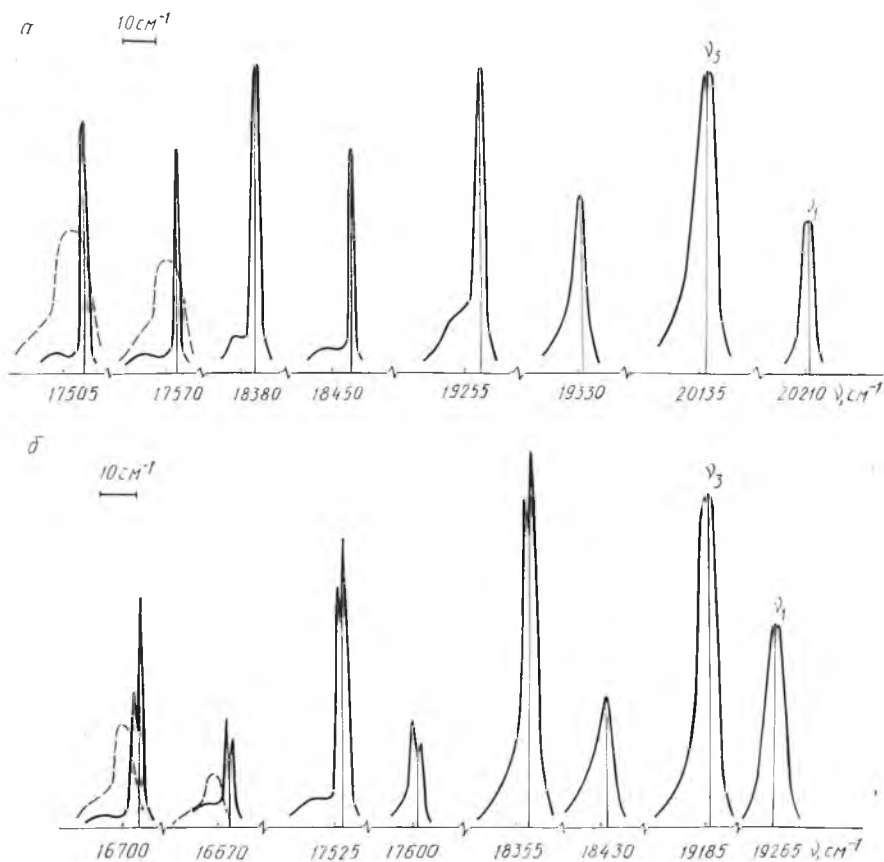


Рис. 1. Участки спектра люминесценции кристаллов $\text{CsUO}_2(\text{NO}_3)_3$ (а) и CsUO_2Cl_4 (б) при $T = 4,2$ К. Штриховой кривой обозначены контуры линий при $T = 60$ К

Для выяснения причин отмеченных особенностей, по-видимому, следует иметь в виду как неоднородное уширение спектральных линий, так и многоцентровую модель свечения ионов уранила: собственно кристалла (основы) и дополнительных центров дефектной природы (см. таблицу). Указанные дефектные центры свечения могут возникать из-за присутствия катионов изоморфной примеси в образце [6]. Относительная концентрация их, согласно оценкам [7, 8], невысока ($\leq 10^{-2}$). Однако вследствие эффективной миграции энергии электронного возбуждения ($\nu_0^{\text{осн}} > \nu_0^{\text{эф}}$) интенсивность их люминесценции при гелиевой температуре может быть сравнима с интенсивностью люминесценции кристаллоосновы (при более высоких температурах этот эффект ослабевает из-за термически активированного обратного переноса энергии).

Рассмотрим соотношения частот и полуширин линий фундаментальных колебаний иона UO_2^{2+} (ν_1 и ν_3) различных центров свечения в кристаллах тринитратов уранила. Как видно из таблицы, лишь для рубидиевой соли упомянутые частоты (в отдельности) в кристаллооснове и дефектном центре I совпадают или близки друг к другу; для всех других соединений (равно как и для первого из них в сопоставлении с дефектным центром II) они существенно различаются. Обращают на себя внимание также одинаковые полуширины линий (как ν_1 , так и ν_3) в первой

полосе и незначительные их отличия для последующих полос спектра в этом случае. Другие дефектные центры подобного соответствия с кристаллоосновой не обнаруживают. К тому же тенденция к относительному сужению линий при увеличении колебательного квантового числа n для них выражена слабее.

Обнаруженные закономерности могут быть обусловлены резонансным взаимодействием излучающих центров, причем возможность наличия колебательного резонанса не исключена как для одинаковых центров, так и для центров разных типов. Действительно, данные таблицы удовлетворяют следующим условиям, накладываемым с точки зрения резонансных взаимодействий соотношением колебательных частот и природой центров: 1) дефектные центры слабо резонируют между собой; 2) дефектные центры I подвержены резонансу с основой; 3) основные центры находятся в резонансе друг с другом. Вместе с тем сравнительно большая ширина линий и отделение максимума диффузного спектрального распределения для обертонов и составных частот дефектных центров (когда разница в колебательной энергии для них по отношению к кристаллооснове сильно возрастает) показывает, что рассмотренная причина не является полностью определяющей.

Аналогичные особенности характеризуют спектры других имеющихся в нашем распоряжении кристаллов, концентрация дефектных центров которых примерно на порядок меньше. Обнаружено лишь уменьшение полуширины линий кристаллоосновы приблизительно на $0,5 \text{ см}^{-1}$ по сравнению с приведенными в таблице. При $n=5, 6, 7$ она составила соответственно: $1,0 \pm 0,1$; $1,0 \pm 0,1$; $1,1 \pm 0,1 \text{ см}^{-1}$ для $\text{CsUO}_2(\text{NO}_3)_3$ и $1,2 \pm 0,1$; $1,2 \pm 0,1$; $1,4 \pm 0,1 \text{ см}^{-1}$ для $\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$. Оценка ширины линии ν_1 в спектрах комбинационного рассеяния в обоих случаях дала величину $< 0,2 \text{ см}^{-1}$. Эти данные позволяют определить верхний предел возможного неоднородного разброса (полуширину функции распределения) молекул по частоте $\nu_0 = 2 \text{ см}^{-1}[9-11]$ (см. таблицу). Тот факт, что линия чисто электронного перехода мало сужается при экстраполяции к нулевой

Основные частоты (ν) и полуширины линий ($\Delta\nu$) в спектрах люминесценции тринитратных солей уранила при $T = 4,2 \text{ К}$

Соединение	$\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$			$\text{CsUO}_2(\text{NO}_3)_3$		$\text{KUO}_2(\text{NO}_3)_3$	
	осн.	деф. I	деф. II	осн.	деф.	осн.	деф.
ν_0	21202,5	21163	21186,5	21093	21058,5	21188	21124
$\Delta\nu_0$	4,8	3,0	2,4	4,6	4,0	5,0	2,5
ν_1	889,5	889	893,5	883	880	877,5	881
$\Delta\nu_1(n)$	6,2	6,2	3,8	5,2	3,5	5,2	4,4
	5,0	5,8	3,5	4,5	3,2	4,0	—
	3,6	3,8	—	2,0	2,6	3,5	—
	1,8	2,1	—	1,5	2,6	—	—
ν_3	962	962	966	957	954	951	954
$\Delta\nu_3(n)$	6,3	6,3	7,0	7,6	4,9	9,6	11,2
	3,6	4,0	—	3,4	3,5	3,3	4,6
	3,5	3,9	—	2,6	2,9	—	3,7
	3,3	3,7	—	2,0	2,9	—	—

— данные не приведены в связи с перекрыванием соседних линий.

температуре, позволяет сделать заключение о значительном вкладе в ширину линий низкочастотных фоновых состояний.

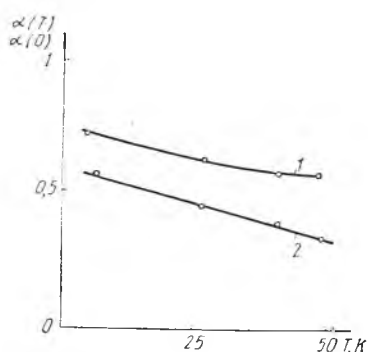


Рис. 2. Температурная зависимость фактора Дебая — Валлера полос 17573 см^{-1} в спектре $\text{CsUO}_2(\text{NO}_3)_3$ (1) и 17602 см^{-1} (2) в спектре $\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$

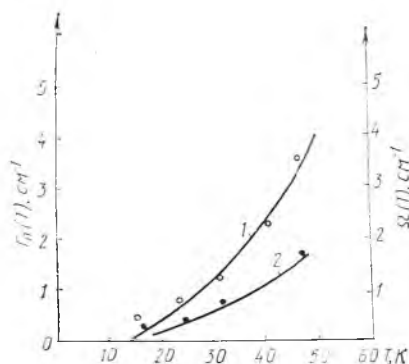


Рис. 3. Температурные зависимости лоренцевой составляющей полуширины $\Gamma_L(T)$ (1) и сдвига $\Omega(T)$ (2) линии 17573 см^{-1} в спектре люминесценции $\text{CsUO}_2(\text{NO}_3)_3$ (точки) и результаты их аппроксимации формулами (1) и (2) при $\Theta = 120 \text{ К}$ (сплошные кривые); $\alpha = 171,4 \text{ см}^{-1}$, $\gamma = 61,4 \text{ см}^{-1}$

В пользу фоновой природы примыкающих к линиям крыльев свидетельствует и рост их относительной интенсивности в спектре с повышением температуры. Следует отметить, что «перекачка» интенсивности излучения в фоновые крылья при переходе от 4,2 к 77 К не приводит к исчезновению линий, как это обычно бывает в случае сильной или средней связи люминесцирующего центра со своим окружением, но высокочастотная часть фоновонного крыла в значительной мере перекрывается и сливается с линией, что может приводить к искаженному суммарному контуру, характеризующемуся более пологим спадом интенсивности свечения в длинноволновую сторону (рис. 1, а).

По этой причине оценка силы электрон-фононной связи должна быть более корректной для длинноволновых полос. Фактор Дебая — Валлера, например, для линии ν_3 с $n=3$ в спектре $\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$ при 6,3 К равен 0,57. Для той же линии изоморфного ему $\text{CsUO}_2(\text{NO}_3)_3$ он больше и составляет 0,70 (рис. 2). Вероятно, этим обусловлены гораздо меньшие величины ее уширения (до 16 см^{-1}) и «красного» сдвига (на 4 см^{-1}) при повышении температуры до 70 К для данного соединения по сравнению с рубидийуранилтринитратом (соответственно 32 и 8 см^{-1}). Еще меньшей силой электрон-фононной связи отмечен цезийуранилхлорид. В спектре этого соединения фоновые крылья и бесфоновые линии ($n \geq 3$) отчетливо разделены даже при температуре жидкого азота (дублетное расщепление линий при этом не обнаруживается вследствие их уширения) (см. рис. 1, б). Относя к интенсивности бесфоновой линии суммарную интенсивность обоих компонентов расщепления, получаем для составной линии 16695 см^{-1} (ν_3 , $n=3$) фактор Дебая — Валлера равным 0,73. При гелиевой температуре он возрастает до 0,86.

Нами проведено также сопоставление величин уширения $\Gamma_L(T)$ и сдвига $\Omega(T)$ лоренцевых составляющих линии 17573 см^{-1} (ν_1 , $n=4$) в спектре цезийуранилнитрата (рис. 3) с теорией примесного центра (полученной в адиабатическом, кондоновском и гармоническом приближениях), учитывающей малость изменения силовой матрицы кристалла при электронном возбуждении:

$$\Gamma_L(T) = \alpha \left(\frac{T}{\Theta} \right)^7 \int_0^{\Theta/T} \frac{x^6 \exp x}{(\exp x - 1)^2} dx, \quad (1)$$

$$\Omega(T) = \gamma \left(\frac{T}{\Theta} \right)^4 \int_0^{\Theta/T} \frac{x^3}{\exp x - 1} dx, \quad (2)$$

где Θ — дебаевская температура. Условие применимости приведенных формул [12]: $\Delta\Gamma/\Delta T \leq 0,05$ см⁻¹/град выполняется. Как видно из рис. 3, при $\Theta = 120$ К экспериментальные кривые достаточно хорошо описываются расчетными в диапазоне температур 25—50 К. При более низких температурах удовлетворительного соответствия получить не удастся, что может быть связано с влиянием отмеченных механизмов уширения линий, а также с конечным естественным временем жизни возбужденного состояния соответствующего локального колебания.

Таким образом, изучение формирования контуров флуоресцентных линий может существенно расширить информативность исследований ураниловых соединений спектрально-люминесцентным методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Володько Л. В., Комяк А. И., Умрейко Д. С. Ураниловые соединения.— Минск, 1981.
2. Ребане К. К. Элементарная теория колебательной структуры спектров примесных центров кристаллов.— М., 1968.
3. Щелоков Р. Н., Краснов Ю. И., Карасев В. Е.— ФТТ, 1972, т. 14, с. 2175.
4. Posener D. W.— Austr. J. Phys., 1959, v. 12, p. 184.
5. Denning R. G., Snellgrove T. R., Woodward D. R.— Mol. Phys., 1975, v. 30, p. 1819; 1976, v. 32, p. 419.
6. Володько Л. В., Зажогин А. П., Комяк А. И.— Докл. АН БССР, 1979, т. 23, с. 791.
7. Krol D. M.— Phys. Rev. B., 1981, v. 23, p. 2135.
8. Красовский А. Н., Бойков В. Н., Умрейко Д. С.— ЖПС, 1982, т. 37, с. 790.
9. Ребане Л. А., Фрейберг А. М.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1975, т. 39, с. 1987.
10. Gorokhovskii A. A., Kikas J.— Opt. Commun., 1977, v. 21, p. 272.
11. Бойков В. Н., Кулешов Н. В., Красовский А. Н.— Докл. АН СССР, 1983, т. 273, с. 94.
12. Осадько И. С.— УФН, 1979, т. 128, с. 31.

УДК 530.145.7.539.182

А. Н. ЛАВРЕНОВ, Е. Е. ТРОФИМЕНКО

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К ВОЗМУЩЕННОМУ УРАВНЕНИЮ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ 1s-СОСТОЯНИЯ ВОДОРОДОПОДОБНОГО АТОМА

Одним из наиболее плодотворных аналитических методов теории возмущений (ТВ) является метод, основанный на применении преобразования Лапласа к возмущенному уравнению Шредингера. Однако из-за трудностей, возникающих при выполнении обратного преобразования Лапласа для поправочной волновой функции (ВФ), его использование ограничивается случаем, когда радиальная часть оператора возмущения имеет степенной вид [1]. В работе предлагается метод нахождения оригинала поправки к ВФ водородоподобного (ВП) атома. Для простоты рассмотрено возмущение основного состояния ВП атома сферически-симметричным потенциалом $W(r)$. Обобщение получаемых при этом результатов на потенциалы иной мультипольности не вызывает затруднений. Так, в работе [2] одним из авторов рассмотрен случай, когда $W(r) = = f(r)P_2(\cos \Theta)$. Уравнение для ВФ первого порядка ТВ имеет вид:

$$[E_0 - H_0]\Psi_1 = [W - E_1]\Psi_0, \quad (1)$$

где H_0 — гамильтониан невозмущенного атома для 1s состояния; Ψ_0 , Ψ_1 и E_0 , E_1 — ВФ и энергии 1s состояния соответственно в нулевом и первом порядке ТВ.

Выбирая Ψ_1 следующим образом:

$$\Psi_1 = \Psi_0 u(r)/r, \quad (2)$$

получаем:

$$ru''(r) - \frac{2Z}{a_0} ru'(r) + \frac{2Z}{a_0} u(r) = 2m(W - E_1)r^2. \quad (3)$$

Используя свойства преобразования Лапласа и для удобства записи полагаем

$$\bar{u}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(t) dt \quad \bar{W}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^2 W(t) dt \quad (4)$$

и $\beta = 2Z/a_0$, будем иметь

$$p(\beta - p)\bar{u}' - 2\bar{u}(\beta - p) = \frac{2m[\bar{W}(p)p^3 - \bar{W}(\beta)\beta^3]}{p^3}. \quad (5)$$

Здесь учтено, что $E_1 = \langle \Psi_0/W/\Psi_1 \rangle = \beta^3 \bar{W}(\beta)/2$.

Общее решение дифференциального уравнения (ДУ) (5) можно записать в виде:

$$\bar{u}(p) = \frac{\bar{N}}{p^2} - \frac{2m}{p^2} \int_{\beta}^p ds \frac{\bar{W}(s)s^3 - \bar{W}(\beta)\beta^3}{(s-\beta)s^2}, \quad (6)$$

где первый член — решение однородного ДУ (5), второй — частное решение, а константа \bar{N} легко определяется из условия ортогональности $\langle \Psi_1/\Psi_0 \rangle = 0$ и равна $\bar{N} = -m[3\beta \bar{W}(\beta) + \beta^2 \bar{W}'(\beta)]$. Если подынтегральное выражение в (6) преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{W}(s)s^3 - \bar{W}(\beta)\beta^3}{(s-\beta)s^2} &= \frac{\bar{W}(s)s^3 - \bar{W}(\beta)s^3 + \bar{W}(\beta)s^3 - \bar{W}(\beta)\beta^3}{(s-\beta)s^2} = \\ &= s \frac{\bar{W}(s) - \bar{W}(\beta)}{s-\beta} + \bar{W}(\beta) \left[1 + \frac{\beta}{s} + \frac{\beta^2}{s^2} \right] \end{aligned}$$

и выполнить интегрирование по s , то лапласовский образ $u(r)$ примет вид:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p) = -2m \left\{ \frac{5\beta \bar{W}(\beta) + \beta^2 \bar{W}'(\beta)}{2p^2} + \beta \bar{W}(\beta) \frac{\ln\left(\frac{p}{\beta}\right)}{p^2} + \int_0^{\infty} W(t)t \times \right. \\ \left. \times \frac{e^{-\beta t} - e^{-pt}}{p^2} dt + \frac{\beta}{p^2} \int_0^{\infty} W(t)t^2 e^{-\beta t} [Ei(t\beta - tp) - \ln|t(p-\beta)| - \gamma] dt - \right. \\ \left. - \frac{\bar{W}(\beta)\beta^2}{p^3} \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

Здесь $E_i(z)$ — интегральная показательная функция; γ — постоянная Эйлера.

На основании теоремы об интегрировании изображения и оригинала по параметру $u(r)$ получим, выписывая последовательно оригиналы изображений в формуле (7). В результате после громоздких преобразований можно прийти к следующему выражению для $\psi_1(r)$:

$$\begin{aligned} \Psi_1(r) = \int_0^{\infty} \left[2m\beta e^{-\frac{\beta t + \beta r}{2}} \left\{ \ln(\beta t) + \ln(\beta r) + \frac{\beta r + \beta t}{2} + 2\gamma - \frac{1}{\beta r} - \frac{1}{\beta t} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{7}{2} + \frac{e^{\beta x}}{\beta x} - Ei(\beta x) \right\} \right] W(t)t^2 \Psi_0(t) dt, \quad (8) \end{aligned}$$

где $x < -$ меньшее из r и t .

Формула (8) по своей форме полностью совпадает с выражением для $\Psi_1(r)$, записанным с помощью редуцированной кулоновской функции

Грина (РКФГ) [3]. Множитель в квадратных скобках, стоящий в подынтегральном выражении формулы (8), равен s -компоненте РКФГ $1s$ -состояния ВП атома. Очевидно, что метод преобразования Лапласа может оказаться чрезвычайно плодотворным для нахождения РКФГ.

По существу проведенное исследование позволяет проследить взаимосвязь и показывает эквивалентность метода преобразования Лапласа и метода РКФГ в стационарной ТВ. Каким из них пользоваться, во многом зависит от специфики конкретной задачи.

В качестве конкретного примера применения лапласовского образа поправочной функции $\bar{u}(p)$ рассмотрим влияние конечных размеров ядра на величину магнитного момента связанного лептона в легких атомах. Согласно работе [4], g -фактор лептона в связанном $1s$ -состоянии выражается через среднее значение квадрата импульса $\langle \Psi / \vec{p}^2 / \Psi \rangle$. Представим потенциал взаимодействия лептона с ядром $V(r)$ в виде суммы двух слагаемых $V = -\frac{\alpha Z}{r} + W$, первое из которых представляет собой кулоновский потенциал, а второе — возмущение, обусловленное учетом размеров ядра. Можно легко показать, что с точностью до членов первого порядка малости по W величина $\langle \Psi / \vec{p}^2 / \Psi \rangle$ равна:

$$\langle \Psi / \vec{p}^2 / \Psi \rangle = \langle \Psi_0 / \vec{p}^2 / \Psi_0 \rangle + 2 \langle \Psi_0 / \frac{\alpha Z}{r} / \Psi_1 \rangle \quad (9)$$

С помощью формул (2), (4) находим, что

$$2 \langle \Psi_0 / \frac{\alpha Z}{r} / \Psi_1 \rangle = -\alpha Z_m [3\beta^2 \bar{W}(\beta) + \beta^3 \bar{W}'(\beta)]. \quad (10)$$

Учитывая (9), (10) и результат работы [4], получим, что g -фактор лептона в связанном $1s$ -состоянии с учетом конечных размеров ядра определится формулой

$$g(1s) = g_0 \left\{ 1 - \frac{(\alpha Z)^2}{3} \left[1 - \frac{3}{2} (m/M) + \frac{3}{2} (m/M)^2 (Z+1) - 4 \left(\frac{Z \langle r^2 \rangle^{1/2}}{a_0} \right)^2 \right] + \frac{\alpha (\alpha Z)^2}{4\pi} \left[1 - \frac{5}{3} (m/M) + \frac{6+Z}{3} (m/M)^2 \right] \right\}. \quad (11)$$

где m, M — массы лептона и ядра соответственно; g_0 — g -фактор свободного лептона; $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ — среднеквадратический радиус ядра.

Полученная в работе поправка на конечные размеры ядра порядка $(\alpha Z)^2 \left[\frac{Z \langle r^2 \rangle^{1/2}}{a_0} \right]^2$ для атома водорода по величине сравнима с рассчитанной ранее поправкой порядка $\alpha (\alpha Z)^2 (m/M)^2$ [4], обусловленной радиационными эффектами и эффектами отдачи ядра. Для мюонных атомов вычисленная поправка играет более существенную роль, чем для электронных. Поэтому ранее расчет g -фактора мюона в связанном $1s$ -состоянии проводился численно [5], в то время как формула (11) имеет простой аналитический вид. В ней член с $(\alpha Z)^2$ определяет поправку на связность лептона в атоме. Искомая поправка учитывает эффект конечных размеров ядра. Для сравнения аналитического и численного расчетов приведем следующие цифры. Поправка на связность, согласно (11) и [5], соответственно: для $Z=8$ —0,001099 и 0,001104, для $Z=12$ —0,002363 и 0,002379. Как видно, расхождение составляет не более 1%.

В заключение отметим, что поскольку сферически-симметричный потенциал не смешивает ВФ нулевого приближения, то метод преобразования Лапласа может быть легко обобщен на возбужденные ns -состояния. Поправки к ВФ ns -состояний ВП атомов за счет сферически-симметричного потенциала возмущения могут быть также представлены в квадратурах [6]. Преимущество выражений (6), (7) по сравнению с формулами в квадратурах заключается в простоте расстановки пределов интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маханек А. Г., Корольков В. С. Аналитические методы в квантовой механике теории возмущений.— Минск, 1982, с. 88.
2. Трофименко Е. Е.— Программа и тез. докл. Всесоюзной конференции по теории атомов и атомных спектров. Минск, 27—29 сентября 1983. Минск, 1983, с. 11.
3. Laugenzi B. J. et al.— Int. J. Quant. Chem., 1977, v. 11, № 5, p. 869.
4. Фаустов Р. Н.— ЭЧАЯ, 1972, т. 3, № 1, с. 238.
5. Ford K. W. et al.— Phys. Rev., 1963, v. 129, p. 194.
6. Hirschfelder J. O. et al.— Adv. Quant. Chem., 1964, v. 1, p. 255.

УДК 681.518.3

М. И. ДЕМЧУК, В. Н. ДЕНИСЕНКО,
М. А. ИВАНОВ, Л. В. СИЛЬНОВ

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА ДЛЯ АНАЛИЗА ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ПОТОКОВ ИМПУЛЬСОВ

При изучении радиолюминесценции, исследовании изменения корреляционных свойств потока квантов, прошедшего через вещество, необходимо проводить анализ двух случайных потоков импульсов — начального и потока, модифицированного изучаемым процессом. Если возбуждать радиолюминесценцию продуктами распада изотопа, то даже в простейшем случае будем иметь дело с пуассоновским первичным потоком событий. Перекрытие отдельных вспышек сцинтиллятора по времени можно попытаться устранить аппаратным путем [1, 2] или отбирать для анализа только вспышки без наложений. Для более эффективной регистрации нужно, чтобы коррелятор фиксировал время появления событий обоих потоков [3]. Совместная обработка информации на основе параметрически заданной функции интенсивности изучаемого вторичного потока фотонов и дает оценки параметров этой функции. Другие возможные применения такого коррелятора, просматривающего за цикл измерений две временные области определенного положения и величины в двух потоках, хорошо известны [4, 5].

Существует класс экспериментов, где имеется два потока импульсов, но случайной является уже амплитуда импульсов, а их временное положение заранее известно — это измерения с применением пикосекундных лазеров, дающих цуг импульсов разной амплитуды [6]. Обычно из цуга выделяют один импульс и с ним проводят измерения [7], причем используют оптическое стробирование отклика изучаемого объекта. Весь эксперимент ставится так, что, если отказаться от выделения только одного импульса из цуга и использовать весь цуг, получим два потока импульсов — начальный цуг и цуг после стробирования отклика изучаемого объекта. Интервал следования импульсов в цуге обычно достаточно велик (десятки наносекунд), чтобы провести измерение амплитуды некоторого импульса до прихода следующего.

В работе описана универсальная измерительная система, разработанная авторами, пригодная для эффективного применения в указанных классах экспериментов, а также в других случаях. Система на основе мини-ЭВМ (рис. 1) представляет собой два связанных 10-канальных строб-анализатора, на входы которых подается либо исследуемый сигнал (при измерении амплитуд), либо стандартный пилообразный импульс (при измерении временных интервалов). Режим измерений в канале может устанавливаться независимо от другого канала.

Входные сигналы поступают на входы блока выбора режима работы — совокупности логических и коммутирующих схем, обеспечивающих основные режимы системы. Формирователи Φ_1 — Φ_4 стандартизируют импульсы датчиков. Кварцевый генератор ударного возбуждения (КГУВ) дает высокостабильную фазируемую серию импульсов. Блоки задержки и формирования строб-импульсов представляют собой программируемые делители частоты со сквозным переносом. Распределители строб-импуль-

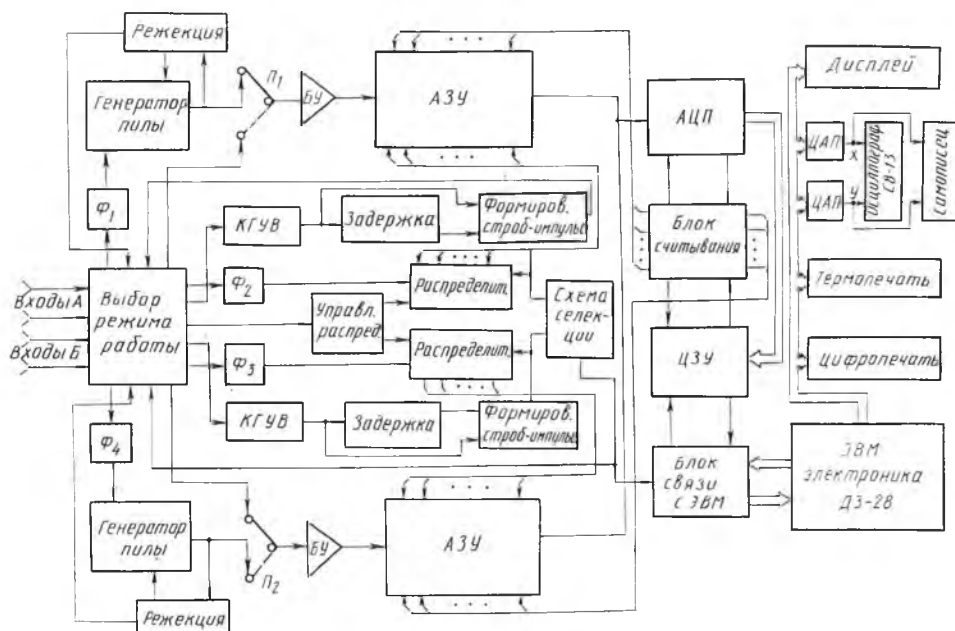


Рис. 1. Функциональная схема системы

сов — быстродействующие сдвиговые регистры, задающие последовательность срабатывания ячеек аналоговых запоминающих устройств. Схема управления распределителями задает номер ячейки, которая должна сработать первой. В частности, эта схема позволяет унифицировать вклады ячеек в режиме многостопового временного анализа. Схема селекции отбирает импульсы, попавшие в рабочий диапазон. Ждущий генератор пилообразного напряжения формирует пилообразное напряжение для преобразования время — амплитуда. Схема режекции состоит из двух пороговых устройств, задающих границы рабочего диапазона. Переключатели P_1 , P_2 — механические коммутаторы режимов работы системы, БУ — буферные усилители. Аналоговые запоминающие устройства (АЗУ) описаны в [8, 9]. Блок считывания обеспечивает временное согласование работы ячеек АЗУ, АЦП (аналого-цифровых преобразователей) и ЦЗУ (цифрового запоминающего устройства). Опишем основные режимы работы системы.

Многоканальный строб-анализатор. Можно использовать 10 или 20 ячеек для анализа формы импульса, причем точки стробирования можно выбирать на равном удалении или произвольно, с помощью формируемой вне системы последовательности импульсов. Минимальное время стробирования — 10 нс. Эффективное число точек стробирования при использовании двух строб-анализаторов и серии импульсов стробирования с равными интервалами между импульсами, но случайным и равномерно распределенным интервалом от начала отсчета до первого импульса серии или со случайной серией импульсов, можно довести до 256. Для этого второй строб-анализатор используется для измерения временного положения стробирующих импульсов, а ЭВМ с учетом измерений двух строб-анализаторов производит накопление гистограммы.

Многостоповый временной анализатор. На вход отдельного строб-анализатора подается пилообразное напряжение, стоп-импульсы задают точки стробирования, крутизна пилы определяет цену канала. На рис. 2 — пример измерения: гистограммы частот временных интервалов до 1—4 фотоэлектрона ФЭУ при регистрации короткого светового импульса; мертвое время, в основном за счет системы ФЭУ+усилитель, примерно 100 нс.

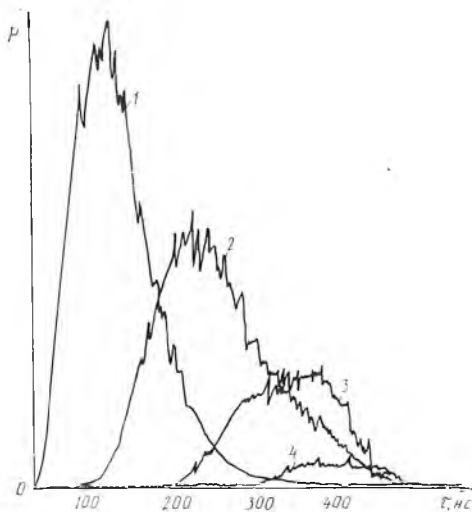


Рис. 2. Гистограммы частот временных интервалов до 1—4 фотоэлектрона ФЭУ

случайных величин μ_i) интенсивность суммарного пуассоновского вторичного потока

$$\varphi_{\Sigma}(\tau, \alpha) = \sum_{i=1}^{m_j} \varphi(\tau - \mu_i, \alpha), \quad (1)$$

где m_j — число зарегистрированных старт-импульсов в реализации с номером j . В целом суммарный поток не является пуассоновским.

Измерение фиксирует число стоп-импульсов в рабочем диапазоне. Поэтому функцию $\varphi_{\Sigma}(\tau, \alpha)$ необходимо нормировать на одинаковую для всех α площадь; возьмем нормированную функцию

$$\varphi_{\text{НС}}(\tau, \alpha) \equiv \varphi_{\Sigma}(\tau, \alpha) / \int_{T_1}^{T_2} \varphi_{\Sigma}(\tau, \alpha) d\tau,$$

где $[T_1, T_2]$ — рабочий диапазон в стоп-канале; при этом ожидаемое число событий на интервале $[T_1, T_2]$ от α зависеть не будет. Однако нормировка уменьшает на единицу число параметров, которые можно оценить методом максимального правдоподобия; при этом абсолютную интенсивность легко оценить по дополнительному измерению (оценкой может служить отношение средних частот событий в стоп- и старт-канале).

По совокупности реализаций для пуассоновского вторичного потока вычисляют логарифмическую функцию правдоподобия для параметров α [3]

$$l(\alpha) = \sum_j \sum_i \ln \varphi_{\text{НС}}(\tau_i, \alpha),$$

где $i = \overline{1, n_j}$, n_j — число стоп-импульсов в j -ой реализации. По методу максимального правдоподобия оценки $\tilde{\alpha}$ параметров α считают решением уравнения

$$l(\tilde{\alpha}) = \max l(\alpha). \quad (2)$$

Как показывают измерения (см. таблицу) и моделирование потоков на ЭВМ [3], эти оценки не смещены, если пренебречь влиянием мертвого времени и эффективности регистрации событий. В таблице приведены оценка $\tilde{\alpha}$ и ее погрешности Δ_{\pm} (полуширина $l(\alpha)$ на уровне $-\ln 2$ от $\max l(\alpha)$ [3]) для одного параметра функции $\varphi(\tau, \alpha) = A e^{-\alpha \tau}$, истинное значение параметра $\alpha_0^{-1} \approx 200$ нс. Потоки событий моделировались с по-

Многостартовый коррелятор [3] предназначен для изучения перекрывающихся, но одинаковых потоков импульсов. Оба строб-анализатора используются для измерения временных интервалов. Временные диапазоны выбираются так, чтобы можно было учесть все наложения вторичных потоков при случайном потоке возбуждения. Пусть отдельный вторичный поток — нестационарный пуассоновский с интенсивностью $\varphi(\tau, \alpha)$, где α — набор параметров, τ — время; предполагаем, что $\varphi(\tau, \alpha)$ существенно отлична от нуля лишь на конечном отрезке времени. Если μ_i, λ_i — моменты прихода старт- и стоп-импульсов, то в каждом цикле измерений по набору $\{\mu_i\}$ и априорно выбранной модели для интенсивности можно построить случайную (в том смысле, что она зависит от

мощью разработанного авторами имитатора потоков. Длительность рабочего диапазона в стоп-канале $T_2 - T_1 \sim 500$ нс, в старт-канале — 1500 нс. Среднее число импульсов в отдельном вторичном потоке $\sim 1,5$ в рабочем диапазоне; старт-поток — стационарный, близкий к пуассоновскому, R — число циклов измерения.

Оценка одного параметра

$10^{-3} \cdot R$	2	4	6	8	10	12	14	20
$\tilde{\alpha}/\alpha_0$	1,02	1,004	0,988	0,994	0,998	1,016	1,004	0,998
Δ_-/α_0	$>0,03$	0,03	$>0,006$	$>0,006$	0,008	0,003	0,003	0,003
Δ_+/α_0	$>0,008$	$>0,006$	0,02	0,016	0,006	0,008	0,002	0,003

Измерение времени в одном канале, амплитуды — в другом. Как отмечалось, такой режим можно использовать для увеличения эффективного числа точек стробирования. Кроме того, этот режим можно применить для анализа интенсивной радиoluminesценции, фиксируя моменты прихода импульсов возбуждения и экспериментальные значения φ_{Σ}^2 функции (1). Для независимых погрешностей в разных точках стробирования с одинаковым и известным распределением ошибок измерения $P(\epsilon)$ можно принять

$$l(\alpha) = \sum_j \sum_i \ln P(\varphi_{\text{НЭ}}^2(\tau_i) - \varphi_{\text{НЭ}}(\tau_i, \alpha)),$$

где τ_i — точки стробирования; для нормировки $\varphi_{\Sigma}^2(\tau)$ необходимо дополнительно измерять $\int_0^{\tau} \varphi_{\Sigma}^2(\tau) d\tau$ для каждой реализации, так что в (2) $i \leq 9$, а одна ячейка используется для нормировки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Blatt S. L., Mahieux J., Kohler D.— Nucl. Instrum. and Methods, 1968, v. 60, p. 221.
2. Новиков Б. С., Максименко А. С.— ПТЭ, 1981, № 3, с. 7.
3. Демчук М. И., Иванов М. А. Статистический одноквантовый метод в оптико-физическом эксперименте.— Минск, 1981.
4. Спектроскопия оптического смещения и корреляция фотонов / Под ред. Г. Камминса и Э. Пайка.— М., 1978.
5. Chu V. Laser light scattering.— New York, 1974.
6. Сверхкороткие импульсы света / Под ред. С. Шапиро.— М., 1980.
7. Прохоренко В. И., Мелищук М. В., Тихонов Е. А. Измерение ультракоротких времен релаксации красителей методом зондирования.— Киев, Препринт Ин-та физики АН УССР, 1983, № 1.
8. Демчук М. И., Денисенко В. Н., Кузнецов В. П. Аналоговое запоминающее устройство. А. с. 756487 (СССР).— Оpubл. в БИ, 1980, № 30.
9. Демчук М. И., Хайминов В. Н.— ПТЭ, 1979, № 3, с. 103.

УДК 548.0:532.783

А. З. АБДУЛИН, А. И. КОМЯК, А. А. МИНЬКО,
А. А. МУРАВСКИЙ, В. С. РАЧКЕВИЧ

ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЗАКРУЧЕННЫХ НЕМАТИЧЕСКИХ СЛОЕВ

Одним из широко применяющихся на практике электрооптических эффектов, происходящих в жидких кристаллах, является твист-эффект [1—3]. Важнейшими характеристиками устройств отображения инфор-

мации, использующих этот эффект, считаются временные и контрастные характеристики получаемого изображения, поэтому выбор оптимальных параметров жидкокристаллического материала и ячейки является важной и актуальной задачей.

Цель данной работы — анализ оптических свойств реальных жидкокристаллических ячеек, определяющих контрастные характеристики индикаторов, использующих твист-эффект.

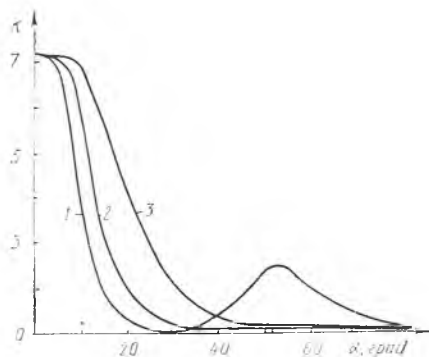
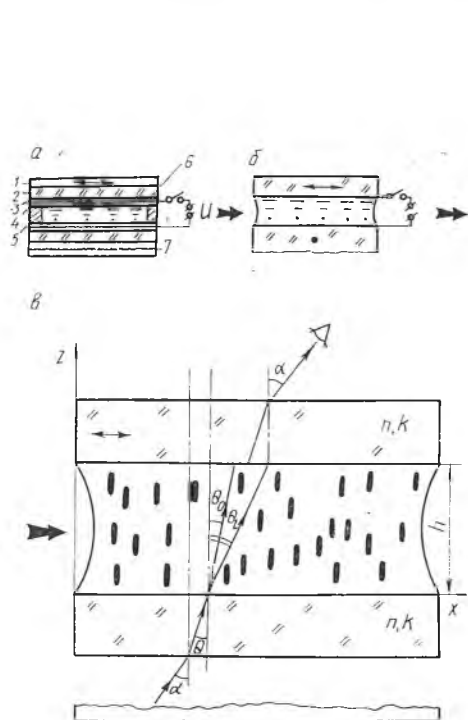


Рис. 1, а — Реальная жидкокристаллическая ячейка, работающая в режиме отражения:

1 — поляризатор; 2 — удерживающая стеклянная подложка; 3 — прозрачный электрод; 4 — ориентирующее покрытие; 5 — прокладки, задающие толщину поля; 6 — жидкий кристалл; 7 — матовый экран; б — Схема рассчитываемой жидкокристаллической ячейки, в — Ход лучей в рассчитываемой ячейке

Рис. 2. Зависимость коэффициента контраста ячейки от угла наблюдения при различных толщинах:

1 — $h=20$ мкм; 2 — 10 мкм; 3 — 5 мкм; $n_0=1.531$; $n_e=1.746$; $n=1.5$; $k=0.84$; длина волны падающего света $\lambda=0.5$ мкм

Схема реального устройства, работающего на отражение, показана на рис. 1, а. Контраст данной ячейки (свойство границы раздела свет — темнота) определяется как отношение интенсивностей отраженного дисплеем света в выключенном и включенном состояниях. Введем упрощающие расчет допущения:

1. Свет рассеивается матовым экраном по всем направлениям с одинаковой интенсивностью.

2. Будем считать удерживающие жидкий кристалл стеклянные пластинки поляридными с коэффициентом преломления n и коэффициентом ослабления линейно поляризованного света данной длины волны $k(\lambda)$ (рис. 1, б).

3. Во включенном состоянии молекулы жидкого кристалла переходят от исходной закрученной планарной ориентации (характеризуется углом поворота директора жидкокристаллического слоя $\pi/2$ при переходе от одной удерживающей подложки к другой) к гомеотропным во всем объеме образца (рис. 1, в). Реально это возможно, если приложенное напряжение значительно превышает пороговое напряжение перехода Фредерикса.

При этих предположениях интенсивность света, засвечивающего экран, будет $I_1=k^2 I_{\text{пад}}$, где $I_{\text{пад}}$ — интенсивность света, падающего на ячейку; k^2 — коэффициент ослабления света при прохождении через два поляроида. Далее будем рассматривать только распространение света от экрана через слой жидкого кристалла.

Пусть главное направление пропускания поляроида составляет с плоскостью падения света угол β . Тогда при включенном управляющем напряжении после прохождения первого поляроида будем иметь следующую

щие компоненты линейно поляризованного света: $E_{\parallel} = |E_1| \sqrt{k} \cos \beta'$, $E_{\perp} = |E_1| \sqrt{k} \sin \beta'$, где $\beta' = \arctg \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \alpha}$; α — угол падения; E_{\parallel} и E_{\perp} — компоненты линейно поляризованной волны, падающей на слой жидкого кристалла, а E_1 — амплитуда волны, идущей от экрана. Волна, прошедшая слой жидкого кристалла, будет определяться следующим образом:

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel} e^{i\chi n_{\parallel} l_{\parallel}} = |E_{\perp}| \sqrt{k} \cos \beta' e^{i\chi n_{\parallel} l_{\parallel}}, \quad E'_{\perp} = E_{\perp} e^{i\chi n_{\perp} l_{\perp}} = |E_{\perp}| \sqrt{k} \sin \beta' e^{i\chi n_{\perp} l_{\perp}},$$

где, согласно [4], $\chi = 2\pi/\lambda$, $n_{\parallel} = \sqrt{\varepsilon (1 - \varepsilon_0/\varepsilon_l) \sin^2 \alpha + \varepsilon_0}$, $n_{\perp} = n_0 = \sqrt{\varepsilon_0}$,

$$l_{\parallel} = \frac{h}{\cos \theta_l}, \quad l_{\perp} = \frac{h}{\cos \theta_0}, \quad \theta_0 = \arctg \left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{\varepsilon_0 - \sin^2 \alpha}} \right), \quad \theta_l = \arctg \times \\ \times \left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{\varepsilon_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_l} \sin^2 \alpha \right)}} \right). \quad h — толщина слоя жидкокристаллического ве-$$

щества, ε , ε_0 , ε_l — диэлектрические проницаемости стекла и жидкого кристалла в оптической области спектра.

После прохождения светом второго поляроида имеем: $E_{\text{вых.}} = |E'_{\parallel}| \sin \beta'' + E'_{\perp} \cos \beta'' | \sqrt{k}$, где $\beta'' = \arctg \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\cos \alpha}$.

Интенсивность прошедшего света:

$$I_{\text{вых.}} = |E_{\text{вых.}}|^2 = 1/2 I_{\text{пад.}} k^4 | \sin \beta' \cos \beta'' e^{i\chi n_{\perp} l_{\perp}} + \cos \beta' \sin \beta'' e^{i\chi n_{\parallel} l_{\parallel}} |^2.$$

Для получения реального значения контраста необходимо учесть свет, который отражается на границе стекло — воздух. Этот свет смешивается с выходящим и тем самым понижает максимальный контраст. Интенсивность света, распространяющегося к наблюдателю, следует записать следующим образом: $I = I_{\text{отр.}} + I_{\text{вых.}}$; $I_{\text{отр.}} = (R_{\perp} + R_{\parallel}) I_{\text{пад.}}$, где $I_{\text{отр.}}$ — интенсивность света, отраженного в направлении к наблюдателю, а R_{\perp} , R_{\parallel} — френелевские коэффициенты отражения света, поляризованного перпендикулярно и параллельно плоскости падения. Контраст, как мы уже определяли, есть отношение интенсивностей света, идущего от индикатора в выключенном и включенном состояниях, т. е.

$$K = \frac{I_{\text{выкл.}}}{I_{\text{вкл.}}} = \frac{I_{\text{отр.}} + 1/2 k^4 I_{\text{пад.}}}{I_{\text{отр.}} + I_{\text{вых.}}}$$

Таким образом, с учетом полученных формул можем проанализировать степень контраста реальных жидкокристаллических ячеек. На рис. 2 изображены зависимости контраста ячейки от угла наблюдения при различных толщинах. Как видно из графиков, с уменьшением толщины характеристики ячейки улучшаются. Однако при очень малых толщинах плоскость поляризации света, прошедшего слой жидкого кристалла в выключенном состоянии, не поворачивается им [5] и гасится вторым поляризатором. В результате в выключенном состоянии свет не проходит через ячейку и контраст падает. Для реально возможных технологических толщин ~ 10 мкм это явление не наблюдается и им можно пренебречь.

Известно [6—8], что при создании твист-структуры в образце жидкого кристалла вероятность закрутки вещества вправо и влево одинакова. Появление таких «площадок с обратным кручением» приводит к тому, что возникают стенки между площадками противоположной закрутки, а это существенно ухудшает оптические характеристики индикатора. Чтобы избежать такого эффекта, в нематическую матрицу добавляют небольшое количество хиральной примеси. Вопрос о выборе оптимального количества этой примеси остается открытым.

Из теории упругости [1, 9] следует, что минимум плотности упругой энергии искажения Франка (F_h) для случая деформации кручения при строго планарной ориентации молекул жидкого кристалла на удержи-

вающих подложках будет достигаться в случае нематика с хиральной добавкой, когда будет минимальна величина $F_k = 1/2k_{22} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - q_0 \right)^2$, где ξ — угол поворота директора в плоскости XV относительно его расположения на удерживающей подложке, а $q_0 = 2\pi/P_0$, где P_0 — равновесный шаг спирали, индуцированной хиральной примесью (см. рис. 1). Это произойдет тогда, когда $d\xi/dz = q_0 = 2\pi/P_0$. Если направления ориентации молекул на удерживающих подложках соответствуют твист-эффекту ($0 \leq \xi \leq \pi/2$ и $0 \leq z \leq h$), то, интегрируя предыдущее уравнение в указанных пределах, получим соотношение между шагом спиральной структуры и толщиной жидкокристаллического слоя для такой равновесной конфигурации $h = P_0/4$.

С другой стороны [10], для небольших концентраций оптически активного вещества в нематической матрице выполняется соотношение $P_0 c = \text{const}$, где c — концентрация оптически активной добавки (см^{-3}). Из микроскопической теории дальнедействующих искажений [9], вызванных хиральными добавками в нематической матрице, следует, что $q_0 = 2\pi/P_0 = 4\pi a c$, где a — константа, зависящая от природы оптически активной добавки и, в значительно меньшей степени, от природы матрицы. Обычно ее называют микроскопической силой кручения [9].

Теперь можно определить, какое количество добавки с силой кручения необходимо добавить в нематическую матрицу для получения равновесной конфигурации директора. Так как $1/P_0 = 2ac$, то $c = 1/2P_0 a$ и при $P_0 = 4h$ получим $c = 1/8ha$ (моль/ см^3).

Таким образом, получены критерии выбора как толщины слоя жидкокристаллического вещества, так и концентрации хиральной примеси. Отметим то обстоятельство, что предлагаемый способ оценки необходимой концентрации хиральной добавки в значительной мере учитывает природу хиральной примеси. Полученные результаты, несомненно, должны корректироваться соответственно требуемым электрооптическим и динамическим параметрам рассматриваемого электрооптического эффекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блинов Л. М. Электро- и магнитооптика жидких кристаллов.— М., 1978, с. 333.
2. Цветков В. А., Гребенкин М. Ф.— В сб.: Жидкие кристаллы / Под ред. С. И. Жданова.— М., 1979, с. 160.
3. Индикаторные устройства на жидких кристаллах / Под ред. З. Ю. Готры.— М., 1980.
4. Федоров Ф. И., Филлипов В. В. Отражение и преломление света прозрачными кристаллами.— Минск, 1976, с. 52.
5. Аззам Р., Башара Н. Эллипсометрия и поляризованный свет.— М., 1981.
6. Цветков В. А., Морозов Н. А., Вистинь Л. К.— Кристаллография, 1974, т. 19, с. 305.
7. Ranes E. P.— Electron. Lett., 1973, v. 9, p. 101; 1974, v. 10, p. 141.
8. Gerrisma C. J., Klerk de J., Zanten van P.— Sol. St. Comm., 1975, v. 17, p. 1077.
9. Жен де П. Физика жидких кристаллов.— М., 1977.
10. Чплая Г. С., Лисецкий Л. Н.— УФН, 1981, т. 134, № 2, с. 181, 279.



УДК 532.22:519.6

В. К. ПОЛЕВИКОВ, В. М. ДЕНИСЕНКО

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСНЫХ ФОРМ КАПЛИ, ВРАЩАЮЩЕЙСЯ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Возросший за последние 15—20 лет интерес к изучению равновесных форм свободной поверхности жидкости во многом обусловлен развитием вычислительной техники как средства исследования. Большинство практически интересных задач о равновесии имеет сложную постановку, требующую применения приближенных методов. В работах [1—3] развит итерационно-разностный подход к решению таких задач, оказавшийся в ряде трудных случаев эффективнее традиционных методов [4], например, в случае, когда жидкость подвергается действию не одной массовой силы, а нескольких (гравитационных, центробежных, магнитных и др.), при расчете двухсвязных равновесных поверхностей.

Применим итерационно-разностный метод для решения задачи о равновесии осесимметричных форм капли жидкости, находящейся на вращающейся плоскости в поле сил тяжести. Обозначим: V — объем капли; R_* — радиус капли; α — контактный угол; ω — угловая скорость вращения капли; ρ — плотность; σ — коэффициент поверхностного натяжения; g — ускорение свободного падения; S_* — длина равновесной линии. Форму поверхности будем искать в параметрическом виде $Z(S)$, $R(S)$, где Z и R — цилиндрические координаты; S — длина дуги равновесной линии, $0 \leq S \leq S_*$, $R(0) = 0$, $Z(S_*) = 0$, $R(S_*) = R_*$. Заметим, что объем капли можно вычислить как объем тела вращения по формуле

$$V = 2\pi \int_0^{S_*} Z R R' dS.$$

Введем обобщенные переменные:

$$s = \frac{S}{S_*}, \quad z = \frac{Z}{S_*}, \quad r = \frac{R}{S_*}. \quad (1)$$

Такой способ задания обобщенных переменных удобен тем, что позволяет проводить вычисления в постоянной области $0 \leq s \leq 1$.

Размерная постановка задачи имеется в [4]. Запишем ее в безразмерной форме в переменных (1):

$$(rz')' = rr' \left(\frac{Bo}{v^{2/3}} z - \frac{P}{v} r^2 + C \right), \quad (2)$$

$$r'' = -z' \left(\frac{Bo}{v^{2/3}} z - \frac{P}{v} r^2 - \frac{z'}{r} + C \right), \quad 0 < s < 1; \quad (3)$$

$$r(0) = 0, \quad z(1) = 0, \quad (4)$$

$$r'(0) = 1, \quad z'(0) = 0, \quad r'(1) = \cos \alpha, \quad z'(1) = -\sin \alpha, \quad (5)$$

где $z = z(s)$, $r = r(s)$, $0 \leq s \leq 1$, $' = d/ds$, $Bo = \rho g V^{2/3} / \sigma > 0$ — число Бонда, $P = \rho V \omega^2 / 2\sigma > 0$ — параметр, характеризующий отношение центробежных сил к капиллярным,

$$v = 2\pi \int_0^1 z r r' ds > 0. \quad (6)$$

$$C = -\frac{2 \sin \alpha}{r(1)} - \frac{Bo v^{1/3}}{\pi r^2(1)} + \frac{Pr^2(1)}{2v}. \quad (7)$$

Определяющими параметрами являются числа Bo , P и угол смачивания α .

На отрезке $0 \leq s \leq 1$ введем равномерную сетку с узлами $s_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$, $h = 1/N$ и построим разностную схему второго порядка аппроксимации для задачи (2)–(7). При этом условимся обозначать разностное решение так же, как и точное решение в узлах сетки: $z_i = z(s_i)$, $r_i = r(s_i)$.

Запишем уравнения (2), (3) в граничных узлах, раскрыв неопределенность z_0/r_0 по правилу Лопиталья. С учетом этих соотношений получим по обычной методике [5] краевые условия, аппроксимирующие (5) со вторым порядком: $r_{s,0} = 1$, $z_{s,0} - \frac{1}{4} h \left(\frac{Bo}{v^{2/3}} z_0 + C \right) = 0$, $r_{s,N} + \frac{1}{2} \times \times h Q \sin \alpha = \cos \alpha$, $z_{s,N} + \frac{1}{2} h Q \cos \alpha = -\sin \alpha$, где $\xi_{s,i}$, $\xi_{s,i}^-$ — обозначения [5] для односторонних разностных производных. Производные z' и r' в уравнениях (2), (3) заменим на сетке центральными разностными производными $z_{s,i}^{\circ}$ и $r_{s,i}^{\circ}$, левую часть уравнений аппроксимируем с погрешностью $O(h^2)$ по известной формуле [5], а к интегралу (6) применим квадратурное правило трапеций. Чтобы не загромождать статью, окончательный вид разностной схемы приводить не станем. Ее легко составить из формул (8)–(14), в которых следует лишь убрать верхний индекс, соответствующий номеру итерации.

Для решения полученной нелинейной разностной задачи построим итерационный процесс по неявной схеме метода установления, обеспечивая устойчивость прогонки на каждой итерации:

$$z_{s,0}^{n+1} - \frac{1}{4} h \left(\frac{Bo}{(v^n)^{2/3}} z_0^{n+1} + C^n \right) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{z_i^{n+1} - z_i^n}{\tau} = \left(\frac{r_{i-1}^n + r_i^n}{2} z_s^{n+1} \right)_{s,i} - \frac{Bo}{(v^n)^{2/3}} r_i^n [(r_{s,i}^n)^+ z_i^{n+1} + (r_{s,i}^n)^- z_i^n] + + r_i^n r_{s,i}^n \left[\frac{P}{v^n} (r_i^n)^2 - C^n \right], \quad i = 1, 2, \dots, N-2, \quad (9)$$

$$z_{s,N-1}^{n+1} + \frac{1}{2} h Q^n \cos \alpha = -\sin \alpha, \quad z_N^{n+1} = 0; \quad (10)$$

$$r_0^{n+1} = 0, \quad r_{s,i}^{n+1} = 1, \quad (11)$$

$$\frac{r_i^{n+1} - r_i^n}{\tau} = (r_s^{n+1})_{s,i} + z_{s,i}^{n+1} \left[\frac{Bo}{(v^n)^{2/3}} z_i^{n+1} - \frac{P}{v^n} (r_i^n)^2 - - \frac{z_{s,i}^{n+1}}{r_i^n} + C^n \right], \quad i = 2, 3, \dots, N-1, \quad (12)$$

$$r_{s,N}^{n+1} + \frac{1}{2} h Q^n \sin \alpha = \cos \alpha; \quad (13)$$

$$v^{n+1} = 2\pi \sum_{i=1}^{N-1} z_i^{n+1} r_i^{n+1} r_{s,i}^{n+1} h, \quad C^{n+1} = -\frac{2 \sin \alpha}{r_N^{n+1}} - \frac{Bo (v^{n+1})^{1/3}}{\pi (r_N^{n+1})^2} + + \frac{P (r_N^{n+1})^2}{2v^{n+1}}, \quad Q^{n+1} = -\frac{P}{v^{n+1}} (r_N^{n+1})^2 + \frac{\sin \alpha}{r_N^{n+1}} + C^{n+1}. \quad (14)$$

Здесь τ — итерационный параметр; n — номер итерации, $\xi_{\pm}^{\pm} = \frac{1}{2}(\xi \pm |\xi|)$.

На $n+1$ -ой итерации сначала прогонкой решается задача (8) — (10) и определяются z_i^{n+1} при всех i , затем аналогично вычисляются все r_i^{n+1} из решения задачи (11) — (13); найденные приближения используются в формулах (14), откуда находятся v^{n+1} , C^{n+1} , Q^{n+1} .

Угол смачивания и число Бонда варьировались в диапазонах: $20^\circ \leq \alpha \leq 170^\circ$, $0 \leq \text{Bo} \leq 10^4$. Сетка строилась с шагом $h=1/100$. Параметр τ выбирался из интервала $10^{-1} - 10^{-4}$.

Bo	$\alpha=45^\circ$				$\alpha=90^\circ$				$\alpha=135^\circ$			
	P	$\frac{v}{R_*^3}$	Z_0/R_*	знак k_0	P	$\frac{V}{R_*^3}$	Z_0/R_*	знак k_0	P	$\frac{V}{R_*^3}$	Z_0/R_*	знак k_0
0	0	0,69	0,41	—	0	2,09	1	—	0	11,26	2,42	—
	1	0,5	0,26	—	4	1,11	0,47	—	7	2,64	0,8	—
	1,25	0,42	0,19	+	4,5	0,93	0,36	+	8	1,83	0,52	+
	1,38	0,34	0,12	+	4,75	0,76	0,24	+	8,21	1,54	0,41	+
	1,44	авост			4,8	авост			8,28	авост		
5	0	0,5	0,26	—	0	1,31	0,62	—	0	2,97	1,04	—
	1	0,32	0,12	+	2	1,04	0,46	—	4	2,04	0,69	—
	1,13	0,27	0,08	+	4	0,64	0,19	+	6	1,51	0,47	+
	1,19	авост			4,13	0,58	0,14	+	7,13	1,03	0,23	+
		—			4,19	авост			7,19	авост		
10	0	0,39	0,19	—	0	1,01	0,46	—	0	1,98	0,73	—
	1	0,23	0,06	+	2	0,8	0,38	+	2	1,7	0,61	—
	1,06	0,2	0,04	+	3,75	0,49	0,11	+	4	1,4	0,47	+
	1,12	авост			3,88	авост			6,63	0,76	0,13	+
		—				—			6,69	авост		
100	0	0,12	0,037	—	0	0,27	0,094	—	0	0,42	0,14	—
	0,5	0,083	0,023	+	1	0,24	0,075	+	4	0,29	0,068	+
	0,88	0,054	0,0078	+	3,19	0,12	0,01	+	5,63	0,17	0,0088	+
	0,94	авост			3,25	авост			5,69	авост		

При расчетах выяснилось, что рост параметра вращения P приводит к внезапному переполнению разрядной сетки машинной памяти. Значения P , соответствующие наступлению авоста, уточнялись методом деления отрезка пополам, пока погрешность не становилась менее 3%. Сравнение с известными результатами теории при $\text{Bo}=0$, $\alpha=90^\circ$ [4] показало, что кризис вычислительного процесса происходит при том же критическом $P=P_{\text{кр}}=4,77$, что и разрушение равновесных форм вследствие осесимметричных возмущений. Учитывая выводы работы [3], возникновение вычислительной неустойчивости при разрушении равновесных осесимметричных форм можно считать не случайным. Представляется разумным предположить, что этому способствует примененная итерационная процедура, моделирующая подходящий нестационарный процесс.

Основные характеристики равновесных форм для различных Bo , P и α представлены в таблице. Здесь $Z_0=Z(0)$ — высота капли на оси симметрии, k_0 — кривизна свободной поверхности на оси симметрии.

В случае выпуклой поверхности кривизна k_0 имеет знак $(-)$, а в случае вогнутой — знак $(+)$. Две последние строки в каждом из четырех фрагментов таблицы соответствуют наибольшему докритическому и наименьшему закритическому значениям P , полученным при вычислениях. В случае $P=0$ решение задачи известно [4, 6]. Полученные численные результаты с ним полностью согласуются.

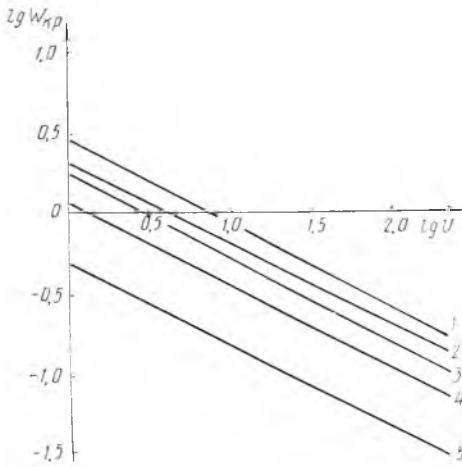


Рис. 1: 1 — $\lambda = 135^\circ$; 2 — 90° ; 3 — 70° ;
4 — 45° ; 5 — 20°

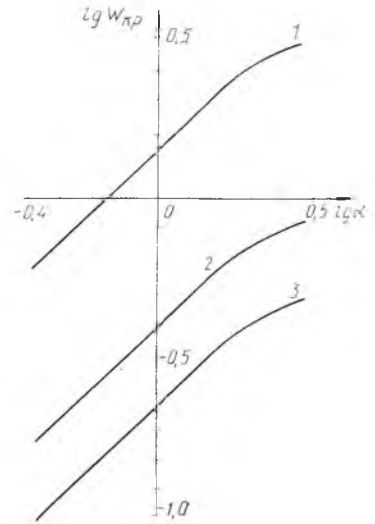


Рис. 2: 1 — $Bo = 1$; 2 — 5;
3 — 10

На рис. 1, 2 приведены графики логарифмической зависимости критической величины безразмерной угловой скорости вращения $W_{кр} = \sqrt{P_{кр}/Bo^{3/2}}$, рассчитанные по признаку авоста, от безразмерного объема капли $U = Bo^{3/2}$ и от угла смачивания α . Как видим, при всех α величина $lg W_{кр}$ уменьшается с ростом $lg U$ по одному линейному закону. В области $\pi/9 \leq \alpha \leq 3\pi/4$ близка к линейной также зависимость $lg W_{кр}$ от $lg \alpha$ при любых U . Причем рост угла смачивания оказывает стабилизирующее влияние на равновесие вращающейся капли. Зависимость $W_{кр}$ от безразмерного объема U и угла смачивания α хорошо описывается приближенной формулой

$$W_{кр} = 1,37 \frac{\alpha^{0,9035}}{U^{0,5287}},$$

максимальная погрешность которой при $1 \leq Bo \leq 100$ и $\pi/9 \leq \alpha \leq 3\pi/4$ не превышает 5 %.

В [4] показано, что при $Bo=0$, $\alpha=90^\circ$ наиболее опасными являются неосесимметричные возмущения, вызывающие неустойчивость уже при $P=2,62$, т. е. когда поверхность еще выпукла. Очевидно, такая ситуация возможна и при других Bo и α . Учитывая, что в настоящей работе применялась математическая модель, допускающая только осесимметричные возмущения, проведенный анализ устойчивости следует, по-видимому, считать предварительным. Однако он дает полезные качественные оценки о влиянии параметров задачи на устойчивость равновесных форм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полевиков В. К.— В сб.: Материалы 3-ей Всесоюзной школы-семинара по магнитным жидкостям. М., 1983, с. 196.
2. Полевиков В. К., Будник А. М.— В сб.: Магнитные жидкости: Научные и прикладные исследования. Минск, 1983.
3. Берковский Б. М., Полевиков В. К.— Магнитная гидродинамика, 1983, № 4.
4. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожаннин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидромеханика невесомости.— М., 1976.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем.— М., 1977.
6. Washforth F., Adams J. C. An attempt to test theories of capillarity action.— Cambridge, 1883.

УДК 62-50:519.2

В. И. МАЛЮГИН

ОБ ОЦЕНИВАНИИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ С СУЩЕСТВЕННО ЗАВИСИМЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

1. Постановка задачи. Одной из наиболее распространенных в приложениях оценок многомерной плотности вероятностей является оценка Розенблатта — Парзена с многомерным гауссовским ядром, имеющая вид [1]:

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_N(x/X_i, h^2 H), \quad (1)$$

где $A = \{X_i : X_i \in R^N, i = \overline{1, n}\}$ — случайная выборка наблюдений из распределения вероятностей с неизвестной плотностью $f(x)$; $n_N(x|a, B)$ — N -мерная гауссовская плотность со средним a и ковариационной матрицей B ; $h = h(n)$ — коэффициент размытости, удовлетворяющий при $n \rightarrow \infty$ условиям:

$$h \rightarrow 0, nh^N \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Пусть $X = (x_1, \dots, x_N)^T \in R^N$ — случайный вектор с существенно зависимыми компонентами [2]: $T(X) = x_1 - \varphi(\bar{X}) = \xi$. Здесь ξ — гауссовская случайная величина с нулевым средним и достаточно малой дисперсией σ^2 ; $\bar{X} = (x_2, \dots, x_N)^T$ — не зависящий от ξ случайный вектор, равномерно распределенный в параллелепипеде $G \subset R^{N-1}$; $\varphi(\bar{X})$ — неизвестная, достаточно гладкая в области G функция. Таким образом, плотность вероятностей $f(x)$ случайного вектора X имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\text{mes}_{N-1} G} I_G(\bar{x}) n_1(T(x)/0, \sigma^2), \quad (3)$$

где $\text{mes}_{N-1} G$, $I_G(\bar{x})$ — мера Лебега ($N-1$ -мерный объем) и индикаторная функция области G соответственно. Очевидно, $\text{mes}_{N-1} G = \prod_{j=2}^N \text{mes}_1 G_j$, где $\text{mes}_1 G_j$ — длина интервала, на котором определена компонента x_j вектора X . Для плотности вида (3) характерно то, что при $\sigma^2 \rightarrow 0$ она «концентрируется вблизи» $N-1$ -мерной гиперповерхности Γ , определяемой уравнением $T(x) = 0$.

В настоящей статье исследуется проблема выбора матрицы H , $|H| > 0$, возникающая при построении оценки (1) по выборке A ограниченного объема [3]. Предлагается в качестве H использовать не фиксированную матрицу [4], а специальным образом построенные статистики. Для оценки (1) с оцениваемой по выборке матрицей H предлагается способ построения коэффициентов размытости.

2. Меры точности оценки плотности. Введем обозначения: $S, S^{(i, m)} = (s_{jk}^{(i, m)})$ — соответственно фиксированная и выборочная (по выборке $A_i = \{X_j, j = \overline{1, n}, j \neq i\}$ объема $m = n - 1$) ковариационные матрицы, причем

$$S^{(i, m)} = \frac{1}{n-2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (X_j - X^{(i)})(X_j - X^{(i)})^T, \quad X^{(i)} = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n X_j, \quad i = \overline{1, n}; \quad (4)$$

$\hat{f}_{n,1}(x)$ и $\hat{f}_{n,2}(x)$ — оценки, получающиеся из (1), если в качестве H используются матрицы S и $\{S^{(i,m)}\}$ соответственно; $b_{n,1}(x)$, $v_{n,1}(x)$, $b_{n,2}(x)$, $v_{n,2}(x)$ — смещение и вариация оценок $\hat{f}_{n,1}(x)$ и $\hat{f}_{n,2}(x)$ соответственно. В качестве мер точности оценок $\hat{f}_{n,l}(\cdot)$ будем использовать функционал

$$B_{n,l} = E \left\{ \left(\frac{b_{n,l}(X)}{\hat{f}(X)} \right)^2 \right\}, \quad (5)$$

характеризующий средний квадрат относительного смещения оценок $\hat{f}_{n,l}(x)$ и функционал

$$U_{n,l} = \int_{RN} v_{n,l}(x) dx \left(\int_{RN} f^2(x) dx \right)^{-1}, \quad (6)$$

известный [1] как относительная глобальная ошибка аппроксимации плотности $f(x)$ оценками $\hat{f}_{n,l}(x)$, $l=1, 2$.

Исследуем вначале проблему выбора H , h в случае, когда уравнение $T(x)=0$ определяет в R^N некоторую $N-1$ -мерную гиперплоскость.

3. Г-гиперплоскость. Пусть $T(X) = \theta^T X = \xi$, θ — фиксированный N -вектор, ξ — определенная выше случайная величина.

Теорема 1. Для мер точности $B_{n,l}$ оценок $\hat{f}_{n,l}(x)$, $l=1, 2$ плотности (3) справедливы асимптотические разложения:

$$B_{n,1} = \frac{1}{2} (\theta^T S \theta / \sigma^2)^2 h^4 + o_1, \quad B_{n,2} = \frac{1}{2} h^4 + o_1, \quad o_1 = o(h^4). \quad (7)$$

Для исследования величины $B_{n,l}$ при всевозможных соотношениях h и σ^2 , которые могут иметь место при оценивании плотности $f(x)$ по выборке ограниченного объема, рассмотрим последовательности однотипных ситуаций, возникающих в предположении, что при $n \rightarrow \infty$ $\sigma^2 = \sigma^2(n) \rightarrow 0$. Обозначим $\beta(n) = h^2(n) / \sigma^2(n)$. Будем говорить, что имеют место последовательности ситуаций типа I, II, III соответственно, если при $n \rightarrow \infty$: $\beta(n) \rightarrow 0$; $\beta(n) \rightarrow \lambda$, $0 < \lambda < \infty$; $\beta(n) \rightarrow \infty$.

Следствие 1. Для ситуаций типа:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & B_{n,1} \rightarrow 0, & B_{n,2} \rightarrow 0; \\ \text{II} & B_{n,1} \rightarrow c, & 0 < c < \infty, \quad B_{n,2} \rightarrow 0; \\ \text{III} & B_{n,1} \rightarrow \infty, & B_{n,2} \rightarrow 0. \end{array}$$

Следствие 2. Если $h = n^{-\alpha/N}$, $0 < \alpha < 1$ [3], то для достижения оценками $\hat{f}_{n,1}(x)$, $\hat{f}_{n,2}(x)$ одной и той же точности оценивания: $B_{n,1} = B_{n,2}$ требуются соответственно объемы выборок n_1 , n_2 , связанные соотношением $n_2 = n_1 \cdot \kappa^{-\frac{N}{\alpha}}$, $\kappa = \left(\frac{\theta^T S \theta}{\sigma^2} \right)^2$. Таким образом, если $\sigma^2 \rightarrow 0$ (зависимость компонент вектора X усиливается), то $\kappa \rightarrow \infty$, $n_2 \ll n_1$ и целесообразно использовать модифицированную оценку $\hat{f}_{n,2}(x)$.

Теорема 2. Асимптотическая глобальная ошибка аппроксимации плотности (3) оценкой $\hat{f}_{n,2}(x)$:

$$U_{n,2} = \left(\frac{3}{\pi} \right)^{\frac{1}{2} (N-1)} \cdot h^{-N} n^{-1} + \frac{3}{16} h^4 + o_1. \quad (8)$$

Оптимальный в смысле минимума $U_{n,2}$ коэффициент размытости h_0 с точностью до членов более высокого порядка малости будет:

$$h_0 = h_0(n) = \alpha(N) n^{-\frac{1}{N+4}}, \quad \alpha(N) = \left(\frac{4}{3} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{(N-1)/2} \right)^{\frac{1}{N+4}}. \quad (9)$$

4. Г-нелинейная гиперповерхность. С учетом полученных в п. 3. результатов в случае, когда уравнение $T(x)=0$ определяет в R^N некоторую $N-1$ -мерную нелинейную гиперповерхность, предлагается в качестве H , h использовать локальные статистики, построенные в окрестностях

выборочных точек X_i , $i = \overline{1, n}$. Оптимальный размер окрестности для точки X_i , определяемый количеством k_i попавших в нее точек из выборки A_i , предлагается находить из условия минимума V -статистики Андерсона [5], характеризующей степень множественной корреляции компонент вектора X в окрестности точки X_i :

$$k_i = \arg \min_{N < k < n-1} V^{(i, k)}, \quad V^{(i, k)} = \frac{|S^{(i, k)}|}{n^k}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (10)$$

$$\prod_{j=1}^k s_{ij}^{(i, k)}$$

где оценка $S^{(i, k)} = (s_{ij}^{(i, k)})$ строится, согласно (4), по k ближайшим (из выборки A_i) соседям точки X_i .

С учетом (9), (10), коэффициент размытости h_i для точки X_i предлагается вычислять по формуле $h_i = \alpha(N) \cdot k_i^{-1/(N+4)}$. Оценка плотности $f_{n,3}(x)$, использующая локальные оценки параметров H, h , имеет вид

$$f_{n,3}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_N(x/X_i, h_i^2 S^{(i, k)}).$$

5. Использование оценок плотности в задачах классификации. Оценки $f_{n,1}(x)$ и $f_{n,3}(x)$ использовались для построения обучающих решающих правил (ОРП) классификации случайных векторов с существенно зависимыми компонентами [7]. Численные эксперименты на ЭВМ показывают, что при малом объеме обучающей выборки ОРП, использующее оценку $f_{n,3}(x)$, заметно превосходит ОРП, использующее оценку $f_{n,1}(x)$, как по точности классификации, так и по скорости достижения заданной точности классификации.

Приложение

Доказательство теоремы 1. Известно [2], что

$$b_{n,1}(x) = -\frac{1}{2} \frac{\theta^T S \theta}{\sigma^2} \left(1 - \frac{T^2(x)}{\sigma^2}\right) f(x) h^2 + o_1. \quad (П.1)$$

Учитывая, что $T(X) = \xi$, из (5), (П.1) получаем выражение для $B_{n,1}$.

Пусть $b_{n,1}(x|W)$ — смещение оценки $f_{n,1}(x)$ при условии, что $H=W$, причем W — фиксированная матрица. В силу независимости X_i и $S^{(i,m)}$:

$$b_{n,2}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E \{b_{n,1}(x|S^{(i,m)})\}. \quad (П.2)$$

Так как $\forall i = \overline{1, n}$ статистика $S^{(i,m)}$ является несмещенной оценкой для ковариационной матрицы случайного вектора X , то

$$\theta^T E \{S^{(i,m)}\} \theta = \theta^T E \{ (X - E\{X\}) (X - E\{X\})^T \} \theta = E \{\xi^2\} = \sigma^2. \quad (П.3)$$

Из (П.1) — (П.3) следует справедливость выражения для $B_{n,2}$.

Доказательство теоремы 2. Известно [2], что

$$v_{n,1}(x) = \frac{f(x)}{(4\pi)^{N/2} |S|^{1/2}} h^{-N} n^{-1} + b_{n,1}^2(x) + o_2, \quad o_2 = o(h^{-N} n^{-1} + h^4). \quad (П.4)$$

Учитывая (П.1), а также выражения для моментов нормального распределения, получаем:

$$\int_{R^N} b_{n,1}^2(x) dx = \frac{3 \text{mes}_{N-1} G}{32 \sqrt{\pi} \sigma^5} (\theta^T S \theta)^2 h^4. \quad (П.5)$$

Тогда из (6), (П.4), (П.5) следует:

$$U_{n,1} = \frac{\sigma \text{mes}_{N-1} G}{(4\pi)^{(N-1)/2} |S|^{1/2}} h^{-N} n^{-1} + \frac{3}{16} \left(\frac{\theta^T S \theta}{\sigma^2} \right)^2 h^4 + o_2. \quad (П.6)$$

Пусть $U_{n,1}(W)$ — значение меры точности $U_{n,1}$ оценки $f_{n,1}(x)$ при условии, что $H=W$, тогда по аналогии с (П.2):

$$U_{n, 2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E \{U_{n, 1}(S^{(i, m)})\}. \quad (\text{П.7})$$

Из вида зависимости компонент вектора X следует, что $|S^{(i, m)}| = \sigma_i^2 \prod_{j=2}^N s_{jj}^{(i, m)}$, где σ_i^2 — несмещенная оценка σ^2 по выборке A_i . В силу независимости ξ и \bar{X} , учитывая свойства функций от моментов [6], получаем:

$$E \{|S^{(i, m)}|^{-\frac{1}{2}}\} = \frac{12^{(N-1)/2}}{\sigma \text{mes}_{N-1} G} + o(n^{-1}). \quad (\text{П.8})$$

Согласно (4),

$$E \{(\theta^T S^{(i, m)} \theta)^2\} = E \{\sigma_i^4\} = \sigma^4 + o(n^{-1}). \quad (\text{П.9})$$

С учетом (П.6)—(П.9) получаем (8). Для доказательства (9) продифференцируем правую часть (8) по h и приравняем полученное выражение нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Епанечников В. А.— Теория вер. и ее применен., 1969, т. 14, № 1.
2. Малюгин В. И. Непараметрическая классификация многомерных наблюдений в случае существенно зависимых признаков.— Рукопись деп. в ВИНТИ, № 5548—82. Деп. от 10.11.82.
3. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов.— М., 1979.
4. Раудис Ш. Ю.— В сб.: Стат. пробл. управл. Вильнюс, 1978, вып. 27.
5. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ.— М., 1983.
6. Крамер Г. Математические методы статистики.— М., 1975.
7. Харин Ю. С., Казаларский И. Х.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1979, № 3.

УДК 519.10

Р. ГАБАСОВ, Ф. М. КИРИЛЛОВА, О. И. КОСТЮКОВА

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С КONTИНУУМОМ ОГРАНИЧЕНИЙ

1. Рассмотрим задачу

$$c'x \rightarrow \max, \quad b_*(t) \leq a'(t)x \leq b^*(t), \quad (1)$$

$$t \in T = [0, t^*], \quad d_* \leq x \leq d^*,$$

где $x = x(J) \in R^n$, $J = \{1, 2, \dots, n\}$, $a(t) = Hf(t)$,

$$\dot{f} = Bf, \quad f(0) = f_0, \quad f \in R^m; \quad b_*(t) = g_*'v(t), \quad \dot{v} = G_*v, \quad v(0) = v_0,$$

$$v \in R^l; \quad b^*(t) = g^{*'}w(t), \quad \dot{w} = G^*w, \quad w(0) = w_0, \quad w \in R^k.$$

Вектор x , удовлетворяющий ограничениям задачи (1), назовем планом. Решение x^0 задачи — оптимальный план. Субоптимальным (ε -оптимальным) будем называть такой план x^ε , что $c'x^0 - c'x^\varepsilon \leq \varepsilon$.

Совокупность $K_{\text{оп}} = \{T_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}\}$, $|T_{\text{оп}}| = |J_{\text{оп}}|$, из множества изолированных точек $T_{\text{оп}} \subset T$ и множества индексов $J_{\text{оп}} \subset J$ назовем опорой задачи (1), если не вырождена опорная матрица $A_{\text{оп}} = A(T_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}) =$

$$= \begin{pmatrix} a_j(t), & j \in J_{\text{оп}} \\ t \in T_{\text{оп}} \end{pmatrix}.$$

Пара $\{x, K_{\text{оп}}\}$ из плана и опоры — опорный план. Опорный план считается невырожденным, если $d_{*j} < x_j < d_j^*$, $j \in J_{\text{оп}}$, $b_*(t) < a'(t)x < b^*(t)$, $t \in T \setminus T_{\text{оп}}$.

2. Пусть $\{x, K_{\text{оп}}\}$ — начальный опорный план; по нему подсчитаем

вектор потенциалов $u' = u'(T_{\text{оп}}) = c'(J_{\text{оп}})A_{\text{оп}}^{-1}$ и вектор оценок $\Delta' = \Delta'(J) = u'A(T_{\text{оп}}, J) - c'$. Следуя [1], доказываем

Критерий оптимальности. Соотношения

$\Delta_j \geq 0$ при $x_j = d_{*j}$; $\Delta_j \leq 0$ при $x_j = d_j^*$; $\Delta_j = 0$ при $d_{*j} < x_j < d_j^*$, $j \in J_{\text{н}} = J \setminus J_{\text{оп}}$; $u(t) \geq 0$ при $a'(t)x = b^*(t)$; $u(t) \leq 0$ при $a'(t)x = b_*(t)$; $u(t) = 0$ при $b_*(t) < a'(t)x < b^*(t)$, $t \in T_{\text{оп}}$ достаточны, а в случае невырожденности и необходимы, для оптимальности опорного плана $\{x, K_{\text{оп}}\}$.

3. Обозначим: $J_{\text{н}}^+ = \{j \in J_{\text{н}} : \Delta_j > 0\}$, $J_{\text{н}}^- = \{j \in J_{\text{н}} : \Delta_j < 0\}$, $T_{\text{оп}}^+ = \{t \in T_{\text{оп}} : u(t) > 0\}$, $T_{\text{оп}}^- = \{t \in T_{\text{оп}} : u(t) < 0\}$. Число $\beta(x, K_{\text{оп}}) = \sum_{i \in J_{\text{н}}^+} \Delta_j(x_j - d_{*j}) + \sum_{j \in J_{\text{н}}^-} \Delta_j(x_j - d_j^*) + \sum_{t \in T_{\text{оп}}^+} u(t)(b^*(t) - a'(t)x) + \sum_{t \in T_{\text{оп}}^-} u(t)(b_*(t) - a'(t)x)$ назовем оценкой субоптимальности опорного

плана $\{x, K_{\text{оп}}\}$, ибо справедлив [1] следующий.

Критерий субоптимальности. При любом $\varepsilon \geq 0$ для ε -оптимальности плана x необходимо и достаточно существование такой опоры $K_{\text{оп}}$, что $\beta(x, K_{\text{оп}}) \leq \varepsilon$.

4. Предположим, что при заданном $\varepsilon \geq 0$ начальный опорный план $\{x, K_{\text{оп}}\}$ не удовлетворяет критерию субоптимальности. Построим n -вектор Δx :

$\Delta x_j = d_j^* - x_j$, $j \in J_{\text{н}}^-$; $\Delta x_j = d_{*j} - x_j$, $j \in J_{\text{н}}^+$; $\Delta x_j \in [d_{*j} - x_j, d_j^* - x_j]$, $j \in J_{\text{н}}^0 = J_{\text{н}} \setminus (J_{\text{н}}^+ \cup J_{\text{н}}^-)$; $\Delta x(J_{\text{оп}}) = A_{\text{оп}}^{-1}(\Delta\omega(T_{\text{оп}}) - A(T_{\text{оп}}, J_{\text{н}})\Delta x(J_{\text{н}}))$; $\Delta\omega(t) = \Delta\omega^*(t)$, $t \in T_{\text{оп}}^+$; $\Delta\omega(t) = \Delta\omega_*(t)$, $t \in T_{\text{оп}}^-$; $\Delta\omega(t) \in [\Delta\omega_*(t), \Delta\omega^*(t)]$, $t \in T_{\text{оп}}^0 = T_{\text{оп}} \setminus (T_{\text{оп}}^+ \cup T_{\text{оп}}^-)$; $\Delta\omega^*(t) = b^*(t) - a'(t)x$, $\Delta\omega_*(t) = b_*(t) - a'(t)x$. (2)

На векторе Δx проверим равенства

$$f'(t)HB^i \Delta x = 0, \quad i = \bar{0}, \quad k(t) = 1, \quad \text{при } \Delta\omega^*(t)\Delta\omega_*(t) = 0, \quad t \in T_{\text{оп}}, \quad (3)$$

где $k(t) \in \{0, 1, \dots, n\}$ — такой индекс, что $d^i(a'(t)x - b(t))/dt^i = 0$, $i = \bar{0}$, $k(t) = 1$; $d^k(t)(a'(t)x - b(t))/dt^k \neq 0$, $b(t) = b^*(t)$, если $\Delta\omega^*(t) = 0$; $b(t) = b_*(t)$, если $\Delta\omega_*(t) = 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда равенства (3) на векторе (2) выполняются. Построим новый план $\bar{x} = x + \Theta \Delta x$, где $\Theta = \min\{1, \Theta(t_0), \Theta_{j_0}\}$; $\Theta(t_0) = \min \Theta(t)$, $t \in T$; $\Theta(t) = \Delta\omega^*(t)/a'(t)\Delta x$ при $a'(t)\Delta x > 0$; $\Theta(t) = \Delta\omega_*(t)/a'(t)\Delta x$ при $a'(t)\Delta x < 0$; $\Theta(t) = \lim_{\tau \rightarrow t} \Theta(\tau)$ при $a'(t)\Delta x = 0$; $\Theta_{j_0} = \min \Theta_j$, $j \in J_{\text{оп}}$; $\Theta_j = (d_j^* - x_j)/\Delta x_j$ при $\Delta x_j > 0$; $\Theta_j = (d_{*j} - x_j)/\Delta x_j$ при $\Delta x_j < 0$; $\Theta_j = \infty$ при $\Delta x_j = 0$.

Если $(1 - \Theta)\beta(x, K_{\text{оп}}) \leq \varepsilon$, то \bar{x} — ε -оптимальный план. Пусть $(1 - \Theta)\beta(x, K_{\text{оп}}) > \varepsilon$. При $t_0 \in T_{\text{оп}}$ переходим к п. 5, исходя из $\{\bar{x}, K_{\text{оп}}\}$. В противном случае заменим опору: $K_{\text{оп}} \rightarrow \bar{K}_{\text{оп}}$. Эту операцию опишем отдельно для случаев а) $\Theta = \Theta(t_0) < 1$ и б) $\Theta = \Theta_{j_0} < 1$.

а) Положим $\Delta u'(T_{\text{оп}}) = -a'(t_0)A_{\text{оп}}^{-1} \text{sign } a'(t_0)\Delta x$,

$$\bar{\alpha}_0 = -|(1 - \Theta)a'(t_0)\Delta x|, \quad \delta(J) = \Delta u'(T_{\text{оп}})A(T_{\text{оп}}, J) + a'(t_0)\text{sign } a'(t_0)\Delta x; \quad (4)$$

$$\alpha_0 = \bar{\alpha}_0 + \sum_{j \in J_{\text{н}}^{0+}} \delta_j(x_j - d_{*j}) + \sum_{j \in J_{\text{н}}^{0-}} \delta_j(x_j - d_j^*) + \sum_{t \in T_{\text{оп}}^{0+}} \Delta u(t)(b^*(t) - a'(t)x) + \sum_{t \in T_{\text{оп}}^{0-}} \Delta u(t)(b_*(t) - a'(t)x),$$

где $x = x + \Delta x$, $J_{\text{н}}^{0+} = \{j \in J_{\text{н}}^0 : \delta_j > 0\}$, $J_{\text{н}}^{0-} = \{j \in J_{\text{н}}^0 : \delta_j < 0\}$, $T_{\text{оп}}^{0+} = \{t \in T_{\text{оп}}^0 : \Delta u(t) > 0\}$, $T_{\text{оп}}^{0-} = \{t \in T_{\text{оп}}^0 : \Delta u(t) < 0\}$.

Если $\alpha_0 > 0$, то выберем любой индекс s из множеств $T_{\text{оп}}^{o+}$, $T_{\text{оп}}^{o-}$, $J_{\text{н}}^{o+}$, $J_{\text{н}}^{o-}$. Новую опору $\bar{K}_{\text{оп}} = \{\bar{T}_{\text{оп}}, \bar{J}_{\text{оп}}\}$ составим из множеств $\bar{T}_{\text{оп}} = T_{\text{оп}} \cup t_0$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \cup j_*$, если $s = j_* \in J_{\text{н}}^{o+} \cup J_{\text{н}}^{o-}$; $\bar{T}_{\text{оп}} = (T_{\text{оп}} \setminus t_*) \cup t_0$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}}$, если $s = t_* \in T_{\text{оп}}^{o+} \cup T_{\text{оп}}^{o-}$.

Пусть $\alpha_0 < 0$. Подсчитаем $\sigma(t)$, $t \in T_{\text{оп}}^* = T_{\text{оп}} \setminus T_{\text{оп}}^o$; σ_j , $j \in J_{\text{н}}^* = J_{\text{н}} \setminus J_{\text{н}}^o$; $\sigma(t) = -u(t)/\Delta u(t)$ при $u(t)^* \Delta u(t) < 0$; $\sigma(t) = \infty$ при $u(t) \times \Delta u(t) \geq 0$; $\sigma_j = -\Delta_j/\delta_j$ при $\Delta_j \delta_j < 0$; $\sigma_j = \infty$ при $\Delta_j \delta_j \geq 0$. Упорядочим числа $\sigma(t)$, $t \in T_{\text{оп}}^*$, σ_j , $j \in J_{\text{н}}^*$, по возрастанию: $\sigma_{(1)} \leq \sigma_{(2)} \leq \dots \leq \sigma_{(g)}$.

Найдем $\alpha_k = \alpha_{k-1} + |\Delta u(t)(b^*(t) - b_*(t))|$, если $\sigma_{(k)} = \sigma(t)$; $\alpha_k = \alpha_{k-1} + |\delta_j(d_j^* - d_{*j})|$, если $\sigma_{(k)} = \sigma_j$, $k = \overline{1, g}$. Пусть k_0 — такой индекс, что $\alpha_{k_0-1} \leq 0$, $\alpha_{k_0} > 0$. Опору $K_{\text{оп}}$ заменим на $\bar{K}_{\text{оп}} = \{\bar{T}_{\text{оп}}, \bar{J}_{\text{оп}}\}$ с компонентами $\bar{T}_{\text{оп}} = (T_{\text{оп}} \cup t_0) \setminus t_*$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}}$, если $\sigma_{(k_0)} = \sigma(t_*)$; $\bar{T}_{\text{оп}} = T_{\text{оп}} \cup t_0$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \cup j_*$, если $\sigma_{(k_0)} = \sigma_{j_*}$.

б) Положим $\Delta u'(T_{\text{оп}}) = -e_{j_0}^* A_{\text{оп}}^{-1} \text{sign } \Delta x_{j_0}$, $e_{j_0} = \{e_j = 0, j \in J_{\text{оп}} \setminus j_0, e_{j_0} = 1\}$, $\delta(J) = \Delta u'(T_{\text{оп}}) A(T_{\text{оп}}, J)$, $\bar{\alpha}_0 = -(1 - \Theta) \Delta x_{j_0}$ и найдем α_0 по формуле (4). Если $\alpha_0 > 0$, то выберем индекс s из множества $T_{\text{оп}}^{o+} \cup T_{\text{оп}}^{o-} \cup J_{\text{н}}^{o+} \cup J_{\text{н}}^{o-}$ и построим новую опору $\bar{K}_{\text{оп}} = \{\bar{T}_{\text{оп}}, \bar{J}_{\text{оп}}\}$: $\bar{T}_{\text{оп}} = T_{\text{оп}} \setminus t_*$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \setminus j_0$ при $s = t_* \in T_{\text{оп}}^{o+} \cup T_{\text{оп}}^{o-}$; $\bar{T}_{\text{оп}} = T_{\text{оп}}$, $\bar{J}_{\text{оп}} = (J_{\text{оп}} \setminus j_0) \cup j_*$ при $s = j_* \in J_{\text{н}}^{o+} \cup J_{\text{н}}^{o-}$. Если $\alpha_0 \leq 0$, то по правилам, описанным для случая а), найдем индекс k_0 . Новую опору $\bar{K}_{\text{оп}}$ составим из множеств: $\bar{T}_{\text{оп}} = T_{\text{оп}} \setminus t_*$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \setminus j_0$, если $\sigma_{(k_0)} = \sigma(t_*)$; $\bar{T}_{\text{оп}} = T_{\text{оп}}$, $\bar{J}_{\text{оп}} = (J_{\text{оп}} \setminus j_0) \cup j_*$, если $\sigma_{(k_0)} = \sigma_{j_*}$.

5. Рассмотрим теперь случай, когда на векторе Δx (2) равенства (3) не выполняются, либо $t_0 \in T_{\text{оп}}$. Выберем числа $\alpha > 0$, $h > 0$ (параметры алгоритма) и построим множество $T_\alpha = \{t \in T : a'(t)x \in [b_*(t) + \alpha, b^*(t) - \alpha]\}$. Множество T_α разобьем на отрезки $[\tau_i, \tau^i]$, $i = \overline{1, N}$ таким образом, чтобы $\bigcup_{i=1}^N [\tau_i, \tau^i] = T_\alpha$, $[\tau_i, \tau^i] \cap [\tau_j, \tau^j] = \emptyset$, $i \neq j$, $\tau^i - \tau_i \leq h$. Пусть

T_α состоит из q компонент связности T_{α_s} , $s = \overline{1, q}$, и $T_{\alpha_s} = \bigcup_{i=N_{s-1}+1}^{N_s} [\tau_i, \tau^i]$, $N_0 = 0$, $N_q = N$. Рассмотрим опорную задачу

$$c' \Delta x \rightarrow \max, \Delta \omega_*(\tau_i) \leq a'(\tau_i) \Delta x \leq \Delta \omega^*(\tau_i), \quad (5)$$

$$i = \overline{1, N + p + q}, d_* - x \leq \Delta x \leq d^* - x,$$

где $\{\tau_i, i = \overline{N+1, N+p}\} = T_{\text{оп}}$, $\tau_{N+p+s} = \tau^{N_s}$, $s = \overline{1, q}$.

В качестве начального плана задачи (5) можно взять вектор $\Delta x = 0$, в качестве начальной опоры — совокупность $\{I_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}\}$, где $I_{\text{оп}} = \{N+1, \dots, N+p\}$.

Пусть $\{\Delta x^*, \{I_{\text{оп}}^*, J_{\text{оп}}^*\}\}$ — решение задачи (5). Построим новый опорный план $\{\bar{x}, K_{\text{оп}}^*\}$ задачи (1): $\bar{x} = x + \Theta \Delta x^*$, где Θ — максимально допустимый шаг вдоль Δx^* , $K_{\text{оп}}^* = \{T_{\text{оп}}^*, J_{\text{оп}}^*\}$, $T_{\text{оп}}^* = \{\tau_i, i \in I_{\text{оп}}^*\}$. Если $\beta(\bar{x}, K_{\text{оп}}^*) \leq \epsilon$, то решение задачи (1) прекращаем на ϵ -оптимальном плане \bar{x} . В противном случае или уменьшаем α , h , или опору $K_{\text{оп}}^*$ заменяем на опору $\bar{K}_{\text{оп}}$ по правилам п. 4.

6. Предположим, что за итерацию $\{x, K_{\text{оп}}\} \rightarrow \{\bar{x}, \bar{K}_{\text{оп}}\}$ оценка субоптимальности уменьшилась незначительно и для псевдоплана $\bar{z} = \bar{x} + \Delta x$, векторов потенциалов $\bar{u}(T_{\text{оп}})$ и оценок $\bar{\Delta}(J)$, построенных по опоре $\bar{K}_{\text{оп}} = \{\bar{T}_{\text{оп}}, \bar{J}_{\text{оп}}\}$, $\bar{T}_{\text{оп}} = \{t_i, i = \overline{1, p}\}$, выполняются соотношения: 1) $d_{*j} < x_j < d_j^*$, $j \in J_{\text{оп}}$; 2) $\bar{J}_{\text{н}}^o = \emptyset$, $\bar{T}_{\text{оп}}^o = \emptyset$, 3) $\{t \in T : a'(t)x \in [b_*(t), b^*(t)]\} = \bigcup_{i=1, p} \times$

$\times T(t_i)$, где $T(t_i) = [t_i, t_i + \alpha_i]$ либо $T(t_i) = [t_i - \alpha_i, t_i]$, $\alpha_i \geq 0$; 4) $|\dot{a}_i(t_i)\bar{x}| \leq \mu_1$, $i = \overline{1, p}$; $b_*(t) - \mu_2 \leq a'(t)\bar{x} \leq b^*(t) + \mu_2$, $t \in T$, где $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ — параметры метода.

Оптимальную опору $K_{\text{оп}}^0$ задачи (1) будем искать в виде $K_{\text{оп}}^0 = \{T_{\text{оп}}^0, \bar{J}_{\text{оп}}\}$, $T_{\text{оп}}^0 = \{t_i^0 = t_i + \Delta t_i, i = \overline{1, p}\}$. Для нахождения p независимых переменных $T_{\text{оп}}^0 = \{t_i^0, i = \overline{1, p}\}$ составим p уравнений:

$$F_i(T_{\text{оп}}^0) = \dot{a}_{\text{оп}}(t_i^0) A^{-1}(T_{\text{оп}}^0, \bar{J}_{\text{оп}}) b(T_{\text{оп}}) + \dot{a}_{\text{н}}(t_i^0) \bar{x}_{\text{н}} - b(t_i^0) = 0, i = \overline{1, p}. \quad (6)$$

Здесь $\dot{a}_{\text{оп}}(t) = (\dot{a}_j(t), j \in \bar{J}_{\text{оп}})$, $\dot{a}_{\text{н}}(t) = \dot{a}_j(t), j \in \bar{J}_{\text{н}}$; $b(t_i^0) = b^*(t_i^0)$, если $u(t_i) > 0$; $b(t_i^0) = b_*(t_i^0)$, если $u(t_i) < 0$, $i = \overline{1, p}$.

Пусть $T_{\text{оп}}^0$ — решение уравнения (6). При достаточно малых $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ псевдоплан $x^0 = \bar{x} + \Delta x^0$, построенный по опоре $\{T_{\text{оп}}^0, \bar{J}_{\text{оп}}\}$, будет оптимальным планом задачи (1).

Если $d^2(a'(t)x^0 - b(t))/dt^2|_{t=t_i^0} \neq 0, i = \overline{1, p}$, то матрица $(\partial F_i(T_{\text{оп}}^0))/\partial T_{\text{оп}}, i = \overline{1, p}$ при $T_{\text{оп}} = T_{\text{оп}}^0$ имеет вид $\text{diag}\{\ddot{a}(t_i^0)x^0 - \ddot{b}(t_i^0), i = \overline{1, p}\}$, т. е. неособая. Поэтому уравнение (6) можно решать методом Ньютона, взяв в качестве начального приближения опору $\bar{T}_{\text{оп}}$.

7. Алгоритм решения задачи (1) описан для ситуации, когда наряду с математической моделью задачи известен начальный опорный план. Решение задачи (1) в других ситуациях, при которых начальная информация о задаче беднее перечисленной, получается приведенным алгоритмом после введения первой фазы задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования.— Минск, 1980.

УДК 517.948.32

И. Н. ЗАБЕЛЛО

О РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ И ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В настоящей работе исследуется система интегральных уравнений с логарифмическим ядром

$$A \int_a^x \varphi(t) dt + B \int_x^b \varphi(t) dt + \frac{C}{\pi} \int_a^b \ln|x-t| \varphi(t) dt = f(x) \quad (1)$$

на конечном отрезке вещественной оси в случае, когда A, B, C постоянные матрицы размерности $(n \times n)$. Уравнения вида (1) ($n=1$), имеющие обширные приложения, изучались в [1—3]. (Историю вопроса и библиографию смотрите, например, в [1]).

В данной работе устанавливаются необходимые и достаточные условия разрешимости системы уравнений (1) в случае, когда $\det(A-B) \neq 0$, матрица $(A-B)^{-1}C$ имеет простую структуру (матрица простой структуры с помощью некоторого невырожденного преобразования может быть приведена к диагональной форме) и выписывается единственное решение системы. Метод исследования состоит в сведении (1) к системе n сингулярных интегральных уравнений и примыкает к методам С. Г. Самко [2, 3]. При данных предположениях решение системы (1) имеет наиболее простой вид, а так как множество матриц простой структуры является всюду плотным во множестве всех матриц [4], то полученные результаты в ряде случаев могут быть использованы для приближенного решения систем вида (1).

Будем говорить, что вектор-функция $\varphi(x)$ принадлежит классу H_*^n на отрезке $[a, b]$, если для ее координат $\varphi_j(x)$ имеет место представление $\varphi_j(x) = (x-a)^{\varepsilon_1-1}(b-x)^{\varepsilon_2-1}\varphi_j^*(x)$, $1 \leq j \leq n$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, функция $\varphi_j^*(x)$ удовлетворяет условию Гельдера с произвольным положительным показателем, меньшим единицы. Через $C_*^{1,n}$ обозначим класс дифференцируемых на $[a, b]$ вектор-функций таких, что $f'(x) \in H_*^n$. Будем искать решение системы (1) в классе H_*^n , считая, что $f(x) \in C_*^{1,n}$. С помощью известных преобразований [2] от системы (1) перейдем к системе сингулярных интегральных уравнений вида

$$(A_- - B)\Phi(x) - \frac{C}{\pi} \int_a^b \frac{\Phi(t) dt}{t-x} = f(x) - m(x)c_x, \quad (2)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{2} \left(\int_a^x \varphi(t) dt - \int_x^b \varphi(t) dt \right)$, $m(x) = \frac{A+B}{2} + \frac{C}{2\pi} \ln[(x-a) \times (b-x)]$, $c_x = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Задача решения системы (1) равносильна задаче решения системы (2) при условии, что решения $\Phi(x)$ последней разыскиваются в классе $C_*^{1,n}$ и удовлетворяют дополнительному условию $\Phi(a) + \Phi(b) = 0$.

Будем далее предполагать, что $\det(A-B+iC) \neq 0$, $\det(A-B-iC) \neq 0$ и матрица $A-B$ невырожденная. Тогда систему (2) можно записать в виде

$$\Phi(x) - \frac{D}{\pi} \int_a^b \frac{\Phi(t) dt}{t-x} = g(x), \quad (3)$$

где обозначено $D = (A-B)^{-1}C$, $g(x) = (A-B)^{-1}[f(x) - m(x)c_x]$. Пусть матрица D имеет простую структуру, λ_j — ее собственные значения, l_j' — соответствующие транспонированные левые собственные векторы. Система (3) таким образом сводится к системе n скалярных уравнений

$$\Psi_j(x) - \frac{\lambda_j}{\pi} \int_a^b \frac{\Psi_j(t) dt}{t-x} = F_j(x), \quad j = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где обозначено $\Psi_j(x) = l_j' \Phi(x)$, $F_j(x) = l_j' g(x)$.

Решение системы (1) получаем по формуле

$$\varphi(x) = L^{-1} \frac{d}{dx} \Psi(x), \quad (5)$$

где $L' = (l_1, \dots, l_n)$, $\Psi(x) = (\Psi_1(x), \dots, \Psi_n(x))'$, $\Psi_j(x)$ — решения сингулярных интегральных уравнений (4), определяемые формулами [1]:

$$\Psi_j(x) = F_j(x) + \frac{\lambda_j Z_j(x)}{\pi} \int_a^b \frac{F_j(t) dt}{Z_j(t)(t-x)} + \lambda_j Z_j(x) P_{z_{j-1}}(x), \quad j = \overline{1, n}.$$

Будем считать, что среди собственных значений матрицы D нет нулевых.

1. Неосцилляционный случай. Исследуем разрешимость системы (1) в случае, когда $-\frac{1}{\lambda_j} \neq i\eta_j$, $\eta_j > 1$ или $\eta_j < -1$, $j = \overline{1, n}$.

Положим $\mu_j = \frac{i}{2\pi} \ln \frac{1+i\lambda_j}{1-i\lambda_j}$. В этом случае $\kappa_j = -1$, $j = \overline{1, n}$, а канонические функции будут иметь вид [3] $Z_j(x) = (x-a)^{\mu_j}(b-x)^{1-\mu_j}$, $j = \overline{1, n}$, так как индексы κ_j сингулярных уравнений (4) отрицательны, то для разрешимости этих уравнений необходимо и достаточно выполнения

условий $\int_a^b \frac{F_j(t)}{Z_j(t)} dt = 0, j = \overline{1, n}$. С учетом введенных обозначений для функций $F_j(x)$ эти условия можно записать в виде

$$\int_a^b \frac{f_j(t) dt}{Z_j(t)} = \int_a^b \frac{m_j(t)c_x}{Z_j(t)} dt, j = \overline{1, n}, \quad (6)$$

где $f_j(t) = l_j'(A - B)^{-1}f(t)$, $m_j(t) = l_j'(A - B)^{-1}m(t)$. Таким образом, разрешимость системы (1) связана с разрешимостью системы n линейных скалярных уравнений (6), для совместности которой необходимо и достаточно выполнения условия

$$\text{rang } M = \text{rang } \{M, \tilde{f}\}, \quad (7)$$

где $\int_a^b \frac{m_j(t)}{Z_j(t)} dt$ — j -я строка матрицы M , $\int_a^b \frac{f_j(t)}{Z_j(t)} dt$ — компоненты вектора \tilde{f} .

Проведя преобразования, аналогичные [3], систему (6) запишем в виде

$$2 \sin \mu_j \pi \cdot l_j'(A - B)^{-1} \int_a^b \frac{f(t) dt}{Z_j(t)} = l_j'(A - B)^{-1} \{ (A + B)\pi + \\ + 2C[(\Psi(\mu_j) - \Psi(1)) + \pi \text{ctg } \mu_j \pi + \ln(b - a)] \} c_x, j = \overline{1, n}, \quad (8)$$

где Ψ есть ψ -функция Эйлера.

Учитывая, что $\text{ctg } \mu_j \pi = -\frac{1}{\lambda_j}$, $\text{cosec } \mu_j \pi = \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + 1}}{\lambda_j}$ в случае вещественных λ_j , получим (см. [3])

$$\frac{d}{dx} \Psi_j(x) = l_j'(A - B)^{-1} \frac{d}{dx} f(x) + \frac{\lambda_j l_j'(A - B)^{-1}}{\pi(x - a)^{1-\mu_j}(b - x)^{\mu_j}} \times \\ \times \left\{ \int_a^b \frac{(t - a)^{1-\mu_j}(b - t)^{\mu_j} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] dt}{t - x} + C \text{cosec } \mu_j \pi \cdot c_x \right\}, j = \overline{1, n}, \quad (9)$$

где c_x есть решение системы (8). Доказана

Теорема 1. При выполнении условия (7) система (1) безусловно разрешима и имеет единственное решение, определяемое формулой (5), в которой компоненты вектора $\frac{d}{dx} \Psi(x)$ вычисляются по формулам (9).

2. Осцилляционный случай. Пусть $-\frac{1}{\lambda_j} = i\eta_j$, $\eta_j > 1$ или $\eta_j < -1$, $j = \overline{1, n}$. Тогда $\mu_j = \frac{i}{2\pi} \ln \frac{\eta_j - 1}{\eta_j + 1}$, $\text{Re } \mu_j = 0$. В этом случае индексы скалярных уравнений (4) равны нулю, а канонические функции имеют вид $Z_j(x) = \left(\frac{x - a}{b - x} \right)^{\mu_j}$ ($j = \overline{1, n}$).

Следуя [3], введем обозначения $\omega_a(\varphi) = (F.P.) \int_a^b \left(\frac{b - t}{t - a} \right)^{\mu} \frac{\varphi(t) dt}{t - a}$, $\omega_b(\varphi) = (F.P.) \int_a^b \left(\frac{b - t}{t - a} \right)^{\mu} \frac{\varphi(t) dt}{b - t}$, где μ обозначает диагональную матрицу с элементами μ_j . Тогда для матрицы $m(t)$ (см. формулу (2)) получаем

$$\omega_a(m) + \omega_b(m) = -\mu^{-1} \sin^{-1} \mu \pi \cdot C. \quad (10)$$

Согласно результатам § 2 работы [2], система (1) разрешима, и ее общее решение дается формулой (5), где компоненты вектора $\frac{d}{dx} \Psi(x)$ имеют вид

$$\frac{d}{dx} \Psi_j(x) = l_j'(A-B)^{-1} \frac{d}{dx} f(x) + \frac{\lambda_j l_j'(A-B)^{-1}}{\pi} \times \\ \times \frac{d}{dx} \left\{ \left(\frac{x-a}{b-x} \right)^{n_j} \int_a^b \left(\frac{t-a}{b-t} \right)^{-n_j} \frac{f(t) dt}{t-x} \right\} - \frac{d}{dx} N(x) c_x, \quad j = \overline{1, n}, \quad (11)$$

где $N(x) = l_j'(A-B)^{-1} m(x) + \frac{\lambda_j l_j'(A-B)^{-1} Z_j}{\pi} \int_a^b \frac{m(t) dt}{Z_j(t)(t-x)}$ тогда и только тогда, когда удовлетворяется (за счет выбора c_x) система равенств $\omega_a(f) = \omega_a(m) c_x$, $\omega_b(f) = \omega_b(m) c_x$.

а) Пусть $\det \omega_a(m) \neq 0$, $\det \omega_b(m) \neq 0$. Тогда для разрешимости исходной системы необходимо и достаточно выполнения условия

$$\omega_a^{-1}(m) \omega_a(f) = \omega_b^{-1}(m) \omega_b(f). \quad (12)$$

б) Если $\det \omega_a(m) = 0$, $\det \omega_b(m) \neq 0$ ($\det \omega_a(m) \neq 0$, $\det \omega_b(m) = 0$), то необходимое и достаточное условие разрешимости системы (1) имеет вид

$$\omega_a(f) = \omega_a(m) \omega_b^{-1}(m) \omega_b(f) \quad (\omega_b(f) = \omega_b(m) \omega_a^{-1}(m) \omega_a(f)). \quad (13)$$

в) Если $\det \omega_a(m) = 0$, $\det \omega_b(m) = 0$, то для разрешимости системы (1) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\text{rang } W = \text{rang } \{W, f_\omega\}, \quad (14)$$

где обозначено $W = \begin{pmatrix} \omega_a(m) \\ \omega_b(m) \end{pmatrix}$, $f_\omega = \begin{pmatrix} \omega_a(f) \\ \omega_b(f) \end{pmatrix}$; система имеет единственное решение в случае, когда $\text{rang } W = n$.

З а м е ч а н и е 1. Если $\text{rang } W = r$ ($r < n$), то при выполнении условия (14) система (1) имеет $n-r$ линейно-независимых решений.

Во всех случаях c_x определяется из системы

$$C \cdot c_x = -\sin \mu \pi \int_a^b \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^{\mu} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] dt. \quad (15)$$

Вычисляя в формуле (11) $\frac{d}{dx} N(x)$ с использованием формул дифференцирования сингулярных интегралов из [2] и проведя преобразования, аналогичные преобразованиям теоремы 3 работы [3], получаем следующую теорему.

Теорема 2. Для того чтобы система (1) была разрешима, необходимо и достаточно выполнения хотя бы одного из условий (12)–(14). Тогда в перечисленных случаях система имеет единственное решение, определяемое формулой (5), в которой компоненты вектора $\frac{d}{dx} \Psi(x)$ вычисляются по формулам:

$$\frac{d}{dx} \Psi_j(x) = l_j'(A-B)^{-1} \frac{d}{dx} f(x) + \frac{\lambda_j l_j'(A-B)^{-1}}{\pi} \left(\frac{x-a}{b-x} \right)^{n_j} \times \\ \times \int_a^b \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^{n_j} \frac{\left[\frac{d}{dt} f(t) \right]}{t-x} dt, \quad j = \overline{1, n}.$$

З а м е ч а н и е 2. Если среди собственных значений матрицы $(A-B)^{-1}C$ есть нулевые ($\lambda_m = 0$, $m = \overline{1, k}$), то в решении (5) первые k координат вектора $\frac{d}{dx} \Psi(x)$ будут определяться по формулам:

$$\frac{d}{dx} \Psi_m(x) = l_m'(A-B)^{-1} \frac{d}{dx} [f(x) - m(x) c_x], \quad m = \overline{1, k},$$

а остальные — вычисляться согласно теоремам 1, 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М., 1977.
2. Самко С. Г. Методы отображений.— В сб. науч. трудов. Чечено-Ингушск. гос. ун-т, 1976, с. 41.
3. Самко С. Г. Математический анализ и его приложения.— Ростов, 1978, с. 103.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М., 1966.

УДК 519.1

М. ВАЛЬК

ОБОБЩЕННЫЕ ПОТОКИ И НАПРЯЖЕНИЯ НА ГРАФАХ

В настоящей статье определяются понятия обобщенного потока и напряжения, позволяющие описание динамических процессов в сетях сводить к транспортным и потенциальным проблемам [1—4]. Исследуется структура пространств обобщенных потоков и напряжений и их отношения друг к другу.

Пусть $G = (N, U)$ — конечный ориентированный (без петель) граф с множеством ребер N и вершин U . Пусть множество N содержит n элементов и множество U — m элементов. Через Φ обозначим множество n -мерных векторов, являющихся потоками. Как известно [3], Φ является линейным подпространством n -мерного векторного пространства R^n и ортогональное дополнение Θ к Φ содержит множество всех напряжений на G . При этом размерность Φ равна цикломатическому числу, а размерность Θ — коцикломатическому числу графа G .

Пусть E_1, E_2, \dots, E_n — банаховы пространства и $E_1^*, E_2^*, \dots, E_n^*$, сопряженные к ним. Каждому ребру i графа поставим в соответствие элемент $x_i \in E_i$. Пусть заданы ненулевые векторы:

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \prod_{i=1}^n E_i \text{ и } a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*) \in \prod_{i=1}^n E_i^*.$$

Элемент $x = (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n E_i$ называется a^* -потокom на G , если $a^* \circ x = (a_1^*(x_1), \dots, a_n^*(x_n)) \in \Phi_n$.

Элемент $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \prod_{i=1}^n E_i^*$ называется a -напряжением на G , если $x^* \circ a = (x_1^*(a_1), \dots, x_n^*(a_n)) \in \Phi$.

Для заданных a^* и a обозначим через $X_{a^*} \subset \prod_{i=1}^n E_i$ множество a^* -потоков и через $X_a^* \subset \prod_{i=1}^n E_i^*$ множество a -напряжений. Непосредственно из

определения следует, что X_{a^*} и X_a^* являются линейными пространствами.

Если $E_1 = \dots = E_n = E$, $a_1^* = a_2^* = \dots = a_n^* = a_0^* \neq 0$ и $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a_0 \neq 0$, получаем понятие потока и напряжения, рассмотренные в [5]. В этом случае обозначаем пространство потоков и напряжений соответственно через $X_{a_0^*}$ и X_{a_0} .

Пусть

$$X_0 \cap X_{a_0^*} (X_0^* = \bigcap_{a_0 \neq 0} X_{a_0}^*), \text{ т. е.}$$

$$x \in X_0 (x^* \in X_0^*)$$

тогда и только тогда, когда при $a_0^* \neq 0$, $a_0^* \in E^*$ ($a_0 \neq 0$, $a_0 \in E$) имеет место

$$\sum_{i \in \omega^+} a_0^*(x_i) - \sum_{i \in \omega^-} a_0^*(x_i) = 0,$$

$$\sum_{i \in \mu^+} x_i^*(a_0) - \sum_{i \in \mu^-} x_i^*(a_0) = 0$$

для всех элементарных коциклов $\omega = \omega^+ \cup \omega^-$ (всех элементарных циклов $\mu = \mu^+ \cup \mu^-$). Последние равенства справедливы, когда для всех элементарных коциклов имеет место

$$\sum_{i \in \omega^+} x_i - \sum_{i \in \omega^-} x_i = 0$$

и соответственно для всех элементарных циклов имеет место

$$\sum_{i \in \mu^+} x_i^* - \sum_{i \in \mu^-} x_i^* = 0.$$

Таким образом, X_0, X_0^* являются пространствами универсаль-потоклов и универсаль-напряжений [5, 6]. Если, кроме того, $E_i = E = R^n$, то X_0 является множеством мультипотоклов, структуру которого исследовал И. Драган [4].

Пусть $a^* \in \prod_{i=1}^n E_i^*$ и $a \in \prod_{i=1}^n E_i$ таковы, что $a^* \circ a = (1, 1, \dots, 1)$, т. е.

элементы a_i не входят в ядро функционала a_i^* .

Пусть $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ — любой цикл и $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ — любой коцикл графа, т. е.

$$\mu_i = \begin{cases} 1, & i \in \mu^+ \\ -1, & i \in \mu^- \\ 0, & i \notin \mu^+ \cup \mu^- \end{cases} \quad \omega_i = \begin{cases} 1, & i \in \omega^+ \\ -1, & i \in \omega^- \\ 0, & i \notin \omega^+ \cup \omega^- \end{cases}$$

Поскольку $a_i^*(a_i) = 1, i = 1, \dots, n$, то очевидно, что потоками являются элементы

$$\mu(a) = (\mu_1(a_1), \dots, \mu_n(a_n)) \in X_{a^*},$$

$$\omega(a^*) = (\omega_1(a_1^*), \dots, \omega_n(a_n^*)) \in X_a^*.$$

В общем случае для цикла μ элемент $\mu(b), b \in \prod_{i=1}^n E_i$ является a^* -потоклом тогда и только тогда, когда для всех $i, \mu_i \neq 0, a_i^*(b_i)$ — константа. Соответственно для коцикла элемент $\omega(b^*)$ в $b^* \in \prod_{i=1}^n E_i^*$ является a -напряжением тогда и только тогда, когда для всех $i, \omega_i \neq 0, b_i^*(a_i)$ — константа.

Пусть μ^1, \dots, μ^n — цикловой базис и $\omega^1, \dots, \omega^s$ — коциклового базис. Так как X_{a^*} и X_a^* — линейные пространства, то

$$L_M = \left\{ x \in \prod_{i=1}^n E_i, x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mu^k(a^k); a^k \in \prod_{i=1}^n E_i, a_i^*(a_i^k) = \rho_k \neq 0 \quad \forall i, \mu_i^k \neq 0 \right\},$$

$$L_W = \left\{ x^* \in \prod_{i=1}^n E_i^*, x^* = \sum_{k=1}^s \sigma_k \omega^k(a^{*k}); a^{*k} \in \prod_{i=1}^n E_i^*, a_i^{*k}(a_i) = \delta_k \neq 0 \quad \forall i, \omega_i^k \neq 0 \right\}$$

их подпространства.

Пусть

$$N_{a_i}^* = \{x_i \in E_i, x_i(a_i) = 0\},$$

$$N_{a_i}^* = \{x_i \in E_i, a_i^*(x_i) = 0\},$$

$$N_{a^*} = \prod_{i=1}^n N_{a_i}^*, \quad N_a = \prod_{i=1}^n N_{a_i}^*.$$

Очевидно, что N_{a^*} и N_a — линейные подпространства пространств X_{a^*} и X_a и имеют место включения $L_M + N_{a^*} \subset X_{a^*}$, $L_W + N_a \subset X_a$.

Теорема 1. Пространства потоков и напряжений представимы в виде $X_{a^*} = L_M \oplus N_{a^*}$, $X_a = L_W \oplus N_a$.

Пусть $a \in \prod_{i=1}^n E_i$, $a^* \in \prod_{i=1}^n E_i^*$, причем $a_i^*(a_i) = 1$, $i = 1, \dots, n$.

Обозначим через

$$L_{M(a)} = \left\{ x \in \prod_{i=1}^n E_i, x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mu^k(a) \right\}$$

и

$$L_{W(a^*)} = \left\{ x^* \in \prod_{i=1}^n E_i^*, x^* = \sum_{k=1}^s \sigma \omega^k(a^*) \right\}.$$

Тогда

$$X_{a^*, a} = L_{M(a)} \oplus N_{a^*} \subset X_{a^*},$$

$$X_a, a^* = L_{W(a^*)} \oplus N_a \subset X_a$$

есть линейное подпространство пространства X_{a^*} (X_a).

Теорема 2. Если граф G не содержит висячих дуг, то $X_{a^*, a} = X_{b^*, b}$ ($X_{a, a} = X_{b, b^*}$) тогда и только тогда, когда существует такое вещественное число $\lambda \neq 0$, что $b^* = \lambda a^*$ ($b = \lambda a$). Пусть v_1, \dots, v_m — вершины графа G и $\hat{\omega}^1, \dots, \hat{\omega}^m$ — коциклы, соответствующие вершинам v_1, \dots, v_m . Тогда

$$s = \begin{pmatrix} \hat{\omega}^1 \\ \vdots \\ \hat{\omega}^m \end{pmatrix}$$

является матрицей инцидентий графа G . Введем вектор

$$s(a^*) = \begin{pmatrix} \hat{\omega}^1(a^*) \\ \vdots \\ \hat{\omega}^m(a^*) \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. Вектор $x \in X_{a^*, a}$ в том и только в том случае, когда $s(a^*)x = 0$.

Чтобы характеризовать обобщенные напряжения с помощью потенциалов, необходимо ограничить наши исследования пространством вида

$$X_{a_0}^* = \left\{ x^* \in (E_0^*)^n : x^* = \sum_{j=1}^s \sigma_j \omega^j(a^*) : a_1^{*j} = \dots = a_n^{*j} = a_0^{*j} \neq 0 \right\} \oplus (N_{a_0}^*)^n.$$

Здесь $a_0 \neq 0$ — любой выбранный элемент банахового пространства E_0 .

Элемент $y^* \in (E_0^*)^m$ назовем потенциалом элемента $x^* \in (E_0^*)^n$, если для каждого ребра $i = (r_{i1}, r_{i2})$ имеет место $x_i^* = y_{r_{i2}}^* - y_{r_{i1}}^*$.

Теорема 4. Элемент $x^* \in (E_0^*)^n$ является элементом $X_{a_0}^*$ тогда и только тогда, когда существует потенциал $y^* \in (E_0^*)^m$. Этот потенциал однозначно определен до аддитивного элемента $y_0^* \in (N_{a_0}^*)^m$.

Следствие 1. Пусть s — матрица инцидентий графа G и

$$[S(a_0)]^* = \begin{pmatrix} \widehat{\omega}_1^1 a_0^* & \dots & \widehat{\omega}_n^1 a_0^* \\ \vdots & & \vdots \\ \widehat{\omega}_1^m a_0^* & \dots & \widehat{\omega}_n^m a_0^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\omega}_1^1 a_0 & \dots & \widehat{\omega}_n^1 a_0 \\ \vdots & & \vdots \\ \widehat{\omega}_1^m a_0 & \dots & \widehat{\omega}_n^m a_0 \end{pmatrix} = s^T(a_0),$$

тогда x^* является элементом $X_{a_0}^*$ тогда и только тогда, когда существует $y^* \in (E_0^*)^m$ со свойством $x^* = -s^T(a_0)y^*$.

Следствие 2. Пусть $X_{a_0}^*/(N_{a_0}^*)^n$, $(E_0^*)^m/(N_{a_0}^*)^m$ — факторные подпространства пространства $X_{a_0}^*$ и $(E_0^*)^m$. Тогда $X_{a_0}^*/(N_{a_0}^*)^n \cong (E_0^*)^m/(N_{a_0}^*)^m$.

При формулировке оптимизационных задач по обобщенным потокам и напряжениям интересны такие выводы, которые обеспечивают их существование при выполнении некоторых ограничений. Обобщением теоремы Гофмана (см. [1]) являются следующие.

Теорема 5. Пусть $C_i \subset E_i$, $i=1, \dots, m$ — заданные выпуклые компактные множества. Тогда a^* — поток $x \in X_{a_0}$, $x_i \in C_i$, существует в том и только том случае, когда для всех элементарных коциклов имеет место

$$0 \in \sum_{i \in \omega^+} a_i^*(G_i) - \sum_{i \in \omega^-} a_i^*(G_i).$$

Теорема 6. Пусть заданные $C_i \subset E_i^*$ — заданные выпуклые, компактные множества, a — напряжение $x^* \in X_a^*$, $x_0^* \in C_i^*$, существует тогда и только тогда, когда для всех элементарных циклов μ имеет место

$$0 \in \sum_{i \in \mu^+} C_i^*(a_i) - \sum_{i \in \mu^-} C_i^*(a_i).$$

В случае мультипоток, представимых в виде

$$X_0 = \left\{ x \in E_0^n : x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mu^k(a_0^k) : a_0^k \in E_0, a_0^k \neq 0 \right\},$$

имеет место

Теорема 7. Пусть $E_0 = R^1$ — одномерное евклидово векторное пространство и Q_1, Q_2, \dots, Q_n — параллелепипеды, параллельные осям из R^1 . Мультипоток $x \in X_0$ с $x_i \in Q_i$ существует тогда и только тогда, когда для всех элементарных коциклов ω имеет место

$$0 \in \langle e_j, \sum_{i \in \omega^+} Q_i - \sum_{i \in \omega^-} Q_i \rangle, \quad j = 1, \dots, 1,$$

где $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$.

Двойственным образом можно сформулировать теорему для мультинапряжений из

$$X_0^* = \{ x^* \in (E_0^*)^n : x^* = \sum_{j=1}^s \sigma_j \omega^j(a_0^*), a_0^* \in E_0^*, a_0^* \neq 0 \}.$$

Теорема 8. Пусть $E_0^* = R^1$ и Q_1^*, \dots, Q_n^* — параллелепипеды из R^s . Мультинапряжения $x^* \in X_0^*$ с $x_i^* \in Q_i^*$ существуют тогда и только тогда, когда для всех элементарных циклов μ имеет место

$$0 \in \langle e_j, \sum_{i \in \mu^+} Q_i^* - \sum_{i \in \mu^-} Q_i^* \rangle, \quad j = 1, \dots, s.$$

Для выпуклых многогранников $Z_i \subset R^1, i = 1, \dots, n$ доказано, что условие $0 \in \sum_{i \in \omega^+} Z_i - \sum_{i \in \omega^-} Z_i$ для всех элементарных коциклов ω является необходимым и достаточным для существования мультипоточка $x \in X_0, x_i \in Z_i$. Этот результат можно усилить.

Теорема 9. Пусть $E_0 = R^1, C_1, \dots, C_n$ — выпуклые, компактные множества из R^1 . Мультипоток $x \in X_0$ с $x_i \in C_i$ существует тогда и только тогда, когда для всех элементарных коциклов ω и для всех $a_0 \in R, a_0 \neq 0$ имеет место

$$0 \in \langle a_0, \sum_{i \in \omega^+} C_i - \sum_{i \in \omega^-} C_i \rangle.$$

На основе исследований, проведенных в этой статье, можно сформулировать динамические оптимизационные задачи об обобщенных потоках и напряжениях [6, 7]. Важная проблема состоит в том, чтобы для специальных задач такого рода найти критерий оптимальности и алгоритмы решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Berge C. Theorie des graphes et ses applications.— Paris, 1958.
2. Berge C. Sur l'équivalence du problème du transport généralisé et du problème réseaux, 1960, C. R. Ac. Sc. 251, p. 324.
3. Berge C., Chouïia-Houri A. Programmes, jeux et réseaux de transport, Paris, 1962.
4. Dragan I. An optimality condition for minimalcost multicommodity flows.— Math. Progr. Activity Analysis. Amsterdam, 1975.
5. Walk M., Verbeseck W. Eine Verallgemeinerung des Transport und Potentialproblems auf endlichen gerichteten Graphen. XVIII. IWK der TH Ilmenau, 1973, A2.
6. Вальк М. Двойственность транспортных и потенциальных задач в Банаховых пространствах.— Труды Тбилисского ун-та, 1957, А 9 (157).
7. Walk M., Verbeseck W.— Verallgemeinerung der Ströme und Spannungen über endlicher gerichteter Graphen. XXI. IWK der TH Ilmenau, 1976, B2.

УДК 62-50

Л. Е. ЗАБЕЛЛО

ОБ УПРАВЛЕНИИ ПОКАЗАТЕЛЕМ ЛЯПУНОВА В ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ

Рассматривается задача управляемости старшим верхним показателем Ляпунова. Устанавливается связь между решением указанной задачи и задачей полной управляемости в дискретной и непрерывной системах. В качестве управления используются дискретные регуляторы.

1. Пусть поведение объекта описывается системой уравнений

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где $A(t), B(t)$ — соответственно $(n \times n), (n \times r)$ -матрицы, $u(t)$ — r -вектор управления из множества

$$\{P'(t)x(t)\}, \quad (2)$$

где $P(t)$ — $(n \times r)$ -матрица. Обозначим $\bar{\chi}(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\|x(t)\|)^{1/t}$ — верхний показатель Ляпунова; $\lambda^0 = \max_x |\bar{\chi}(x)|$ — старший верхний показатель

Ляпунова. Следуя [1], можно заключить, что при $\lambda^0 \in [0, 1)$ все решения системы (1) равномерно асимптотически устойчивы в целом.

В ряде задач теории автоматического регулирования зачастую требуется неасимптотически устойчивую систему (1) при $u(t) \equiv 0$ стабилизировать с помощью выбора управления из множества (2) и, более того, придать ей определенную или в некоторых пределах степень устойчивости. Эта техническая задача может быть реализована с помощью решения следующей математической задачи.

Задача 1. Пусть α — произвольное наперед заданное число из $(0, 1)$. Найдите условия, при которых существует управление из (2) такое, что старший верхний показатель Ляпунова λ^0 решений системы (1) удовлетворяет условию $\lambda^0 \in [0, \alpha)$.

Задачу 1 назовем задачей управления старшим верхним показателем Ляпунова. Укажем зависимость между решением задачи 1 и полной управляемостью системы (1).

Теорема 1. Задача 1 имеет решение, если система (1) полностью управляема при каждом $t \geq 0$ на $[t, t+T]$, $T < +\infty$. Приведенные выше рассуждения обобщаются и на непрерывный случай.

2. Использование цифровых машин приводит к дискретному регулированию с помощью кусочно-постоянного управления, являющегося функцией фазовых координат объекта, вычисляемых в некоторые дискретные моменты времени. Такая задача рассматривалась в [2] для стационарных систем, где приведены достаточные условия стабилизируемости. Там же указывается, что для нестационарных систем эта проблема остается открытой.

Пусть поведение объекта описывается системой

$$\dot{x}(t) = A_1(t)x(t) + B_1(t)u(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где $u(t) = C'(kh)x(kh)$, $t \in [kh, (k+1)h)$, $h > 0$ — некоторая постоянная, $k = 0, 1, \dots$, C — произвольная $(n \times r)$ -матрица, меняющаяся, вообще говоря, через интервал h , $A_1(t)$, $B_1(t)$ — соответственно $(n \times n)$, $(n \times r)$ -матрицы с аналитическими элементами, $\|A_1(t)\| \leq a_1$, $\|B_1(t)\| \leq b_1$, $a_1, b_1 < +\infty$.

Интегрируя последовательно систему (3) на промежутках $[kh, (k+1)h)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, получим интегральную кривую. Как будет показано ниже, значения интегральной кривой в моменты kh образуют дискретную линейную систему, которую назовем дискретным аналогом системы (3). Естественным образом возникает необходимость исследования следующих задач.

Задача 2. Найти условия, при которых дискретный аналог системы 3 выбором с (kh) , h может быть сделан равномерно асимптотически устойчивым по Ляпунову с любым наперед заданным λ^0 , $\lambda^0 \in [0, 1)$.

Задача 3 [3]. При каких условиях существует дискретный регулятор такой, что старший верхний показатель Ляпунова $\bar{\lambda}^0$ [4] решений системы (3) удовлетворяет условию $\bar{\lambda}^0 \leq \alpha_b$, где $\alpha_b > 0$ — произвольное, наперед заданное число. Справедливы следующие условия разрешимости задач 2, 3.

Теорема 2. Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи 2 является выполнение условия полной управляемости системы (3) [5]:

$$\text{rang} \{X_k(t), k = \overline{1, n}\} = n \quad (4)$$

хотя бы при одном t , $t \geq 0$, где $X_k(t)$ определяется из соотношения $X_{k+1}(t) = A_1(t)X_k(t) - d/dt X_k(t)$, $k \geq 1$, $X_1(t) = B_1(t)$.

Теорема 3. Задача 3 имеет решение тогда и только тогда, когда выполнено условие (4).

3. Приведем доказательство основных результатов. Наряду с системой (1) рассмотрим систему

$$\begin{aligned} y(t+1) &= \lambda A(t)y(t) + \lambda B(t)u(t), \quad y(0) = x_0, \quad t \geq 0, \\ u(t) &= P'(t)y(t), \quad \lambda \in R_1, \quad \lambda \neq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Прямой подстановкой нетрудно установить связь между решениями $x(t)$ и $y(t)$:

$$y(t) = \lambda^t x(t). \quad (6)$$

Очевидно, что если система (1) полностью управляема на $[t, t+T]$, $t \geq 0$, то полностью управляема на этом отрезке система (5) и наоборот. В силу произвольности λ и соотношения (6) задача 1 будет разрешима, если система (5) стабилизируема управлением вида (2) (с заменой $x(t)$ на $y(t)$). Дальнейшее доказательство теоремы проходит по схеме [6].

Для доказательства теоремы 2 выведем ряд вспомогательных соотношений для системы (3). Обозначим через $F_1(t)$ — матрицу, удовлетворяющую уравнению $d/dt F_1(t) = A_1(t)F_1(t)$, $F_1(0) = E_n$. Тогда можно получить, что

$$x((k+1)h) = x(t_{k+1}) = F_1(t_{k+1})F_1^{-1}(t_k)x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} F_1(t_{k+1})F_1^{-1}(\tau) \times \\ \times B_1(\tau)d\tau C'(t_k)x(t_k) = A(t_k)x(t_k) + B(t_k)C'(t_k)x(t_k). \quad (7)$$

Через $F(T, t_k)$ обозначим фундаментальную матрицу решений системы (7), удовлетворяющую уравнению

$$F(T, t_{k-1}) = F(T, t_k)A(t_k), t_k \leq T-h, F(T, T-h) = E_n.$$

Достаточным условием полной управляемости на $[0, T]$ системы (7) является выполнение условия

$$g'F(T, t_k)B(t_k) \neq 0, t_k = 0, h, 2h, \dots, T-h, \quad (8)$$

для любого g , $\|g\| \neq 0$. Нетрудно показать, что условие (8) эквивалентно требованию

$$g'F_1(T) \int_{kh}^{(k+1)h} F_1^{-1}(\tau)B_1(\tau)d\tau \neq 0, k = 0, 1, \dots, T/h - 1, \quad (9)$$

для любого g , $\|g\| \neq 0$.

Далее нам понадобится

Лемма 1. Условие (9) выполняется при любом T и некотором h тогда и только тогда, когда

$$g'F_1^{-1}(\tau)B_1(\tau) \neq 0, \tau \in [0, T], \quad (10)$$

для любого g , $\|g\| \neq 0$.

Необходимость очевидна.

Достаточность. Для удобства доказательство проведем только для случая $B_1(t) = b(t)$ — вектор-столбец. В общем случае доказательство проводится аналогично.

Обозначим $\gamma(\tau) = F_1^{-1}(\tau)b(\tau)$, $\{\gamma_i(\tau), i = \overline{1, n}\} = \gamma'(\tau)$. Тогда условие (10) аналогично существованию точек $\tau_j, j = \overline{1, n}$, для которых

$$\text{rank} \{\gamma(\tau_j), j = \overline{1, n}\} = n, \tau_j \in [0, T]. \quad (11)$$

В силу (11) и непрерывности элементов $\gamma_i(\tau), i = \overline{1, n}$, существует $k > 0$ такое, что как бы ни менялось значение $\gamma_i(\tau)$ в $h/2$ -окрестности точек τ_j , всегда будет выполняться

$$\text{rank} \begin{Bmatrix} \gamma_1(\tau_1 + \delta_{11}) & \dots & \gamma_1(\tau_n + \delta_{1n}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_n(\tau_1 + \delta_{n1}) & \dots & \gamma_n(\tau_n + \delta_{nn}) \end{Bmatrix} = n \quad (12)$$

для любых $\delta_{ij}, |\delta_{ij}| \leq h/2$. Не нарушая общности, можем считать T/h — целое, $\tau_1 > 0$. Но тогда для выбранного h -разбиения и при некотором наборе $k_j, j = \overline{1, n}$, по теореме о среднем справедливы равенства

$$\int_{k_j h}^{(k_j+1)h} \gamma_i(\tau)d\tau = \gamma_i(\tau_j + \delta_{ij})h, k_j \in \{0, 1, \dots, T/h - 1\}.$$

В силу невырожденности $F_1(T)$ и выполнения (12) автоматически следует выполнение условия (9). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2 проведем для случая, когда все решения системы (3) при $u(t) \equiv 0$ неустойчивы. В общем случае доказательство мало отличается от приведенного ниже. Выполнение условия (4) обеспечивает выполнение условия (10), а следовательно, и условия (8).

Таким образом, при выполнении (4) система (7) полностью управляема на $[t, t+T]$, $T = \text{const}$, и доказательство достаточности сразу следует из теоремы 1.

Необходимость. Предположим, что условие (4) не выполняется, а задача имеет решение. Невыполнение (4) означает существование вектора $g^0(t)$, $\|g^0(t)\| = 1$, для которого выполняется $g^{0'}(t) F_1(t) F_1^{-1}(\tau) B_1(\tau) \equiv 0$, $\tau \in [0, t]$. Умножим (7) слева на $g^{0'}(t_{k+1})$. Получим $g^{0'}(t_{k+1}) x(t_{k+1}) = g^{0'}(t_{k+1}) F_1(t_{k+1}) F_1^{-1}(t_k) x(t_k) = g^{0'}(t_{k+1}) F_1(t_{k+1}) x_0$. Оценим последнее соотношение по норме. Имеем $\|g^{0'}(t_{k+1}) x(t_{k+1})\| = \|g^{0'}(t_{k+1}) F_1(t_{k+1}) x_0\| \leq \|x(t_{k+1})\|$. В силу невырожденности $F_1(t_{k+1})$ при некотором x_0 , $\|x_0\| = 1$, справедливо $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|g^{0'}(t_{k+1}) F_1(t_{k+1}) x_0\| = f > 0$. Тогда из двух последних соотношений при данном начальном состоянии x_0 будем иметь $\lambda^0 \geq \bar{\chi}(x) \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{f} > 0$. Получили противоречие предположению, которое и доказывает теорему 2.

Доказательство достаточности теоремы 3 проводится по схеме работ [2, 3]. необходимость теоремы 3 доказывается аналогично доказательству необходимости теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Халанай Л., Вакслер Д. Качественная теория импульсных систем.— М., 1971.
2. Зубов В. И. Лекции по теории управления.— М., 1975.
3. Забелло Л. Е.— Докл. АН БССР, 1980, т. 24, № 6, с. 497.
4. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова.— М., 1966.
5. Забелло Л. Е.— Изв. вузов СССР: Математика, 1976, № 12, с. 30.
6. Габасов Р., Кирilloва Ф. М. Основы динамического программирования.— Минск, 1975.

Краткие сообщения

УДК 537.311.33

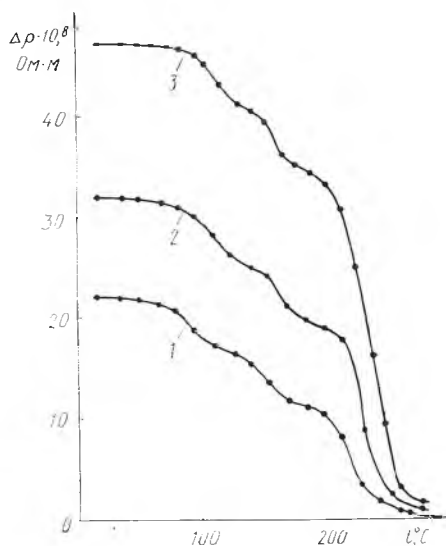
В. И. ПРОКОШИН, В. Г. ШЕПЕЛЕВИЧ

ТЕРМИЧЕСКАЯ СТАБИЛЬНОСТЬ ДЕФОРМИРОВАННЫХ СПЛАВОВ ВИСМУТ—СУРЬМА

Сплавы висмут—сурьма, содержащие 4—20 ат. % Sb, используются в приборостроении для изготовления термоэлементов, гальваномангнитных преобразователей, терморезисторов и других устройств. Их технические параметры во многом определяются кинетическими эффектами, которые существенно зависят от дефектов кристаллической решетки, вводимых при обработке материалов, или внешних воздействий [1, 2]. Несомненный интерес поэтому представляют исследования по термической стабильности дефектов кристаллической решетки сплавов висмут—сурьма.

Дефекты кристаллической решетки в поликристаллах сплавов висмут—сурьма создавались пластической деформацией сжатием при комнатной температуре. Деформированные образцы подвергались изохронному и изотермическому отжигам. Изохронный отжиг проводился в интервале 20—270 °С через 10—15 градусов с выдержкой по 15 мин при каждой температуре. Удельное электросопротивление ρ после отжига измерялось компенсационным методом при комнатной температуре; погрешность измерения изменения удельного электросопротивления при отжиге не превышала 0,3 %. Рентгеноструктурные исследования текстуры отжигаемых образцов проводились на дифрактометре УРС-50 ИМ с помощью обратных полюсных фигур по методике Харриса.

На рисунке представлены кривые изохронного отжига сплавов Bi—4, 12 и 20 ат. % Sb, деформированных на 6 %. Дифференцирование кривых $\rho(T)$ выявило три этапа восстановления удельного электросопротивления. Так, для сплава Bi—4 ат. % Sb первый этап наблюдается в интервале 60—130 °С, второй — 130—190 °С, а третий — выше 190 °С. Увеличение концентрации сурьмы значительно смещает указанные этапы



Изменение удельного электросопротивления деформированных на $\epsilon = 6\%$ сплавов висмут—сурьма при изохронном отжиге:

1 — 4 ат. % Sb; 2 — 12 ат. % Sb; 3 — 20 ат. % Sb

в сторону более высоких температур. С ростом степени деформации увеличивается перекрытие этапов отжига.

Для выяснения природы процессов, протекающих на первом и втором этапах, определялась энергия активации методом угловых коэффициентов по кривым изотермического отжига. На первом этапе отжига энергия активации равна $0,5 \pm 0,1$ эВ. Это значение близко к значениям энергий активаций миграции ($0,35$ эВ) и образования ($0,47$ эВ) вакансий в висмуте [3, 4]. Можно предположить, что на данном этапе происходит отжиг дефектов типа вакансионных скоплений.

На втором этапе отжига энергия активации принимает значение $0,85 \pm 0,15$ эВ, что примерно равно сумме энергий активаций образования и миграции вакансий. Энергия активации переползания дислокаций в деформированном металле равна сумме энергий активаций образования и миграции вакансий [5], поэтому второй этап восстановления удельного электросопротивления, наблюдаемый при изохронном отжиге, целесообразно связать с полигонизационными процессами, протекающими при нагреве деформированных сплавов.

Значительная часть изменения удельного электросопротивления при отжиге деформированных сплавов висмут — сурьма наблюдается на третьем этапе. Рентгеноструктурные исследования показали, что отжиг при $t > 190^\circ\text{C}$ вызывает изменение полюсных плотностей дифракционных линий. Так как значение полюсных плотностей дифракционных линий определяется ориентировкой кристаллитов, то третий этап изохронного отжига необходимо связать с рекристаллизационными процессами, происходящими в деформированном материале при нагреве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прокошин В. И., Шепелевич В. Г.— Докл. АН БССР, 1980, т. 24, № 5, с. 430.
2. Прокошин В. И., Шепелевич В. Г.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 1, с. 35.
3. Otake S., Ishi Y., Matsuno N.— Jap. J. Appl. Phys., 1981, т. 20, № 6, с. 1037.
4. Шепелевич В. Г., Прокошин В. И.— Докл. АН БССР, 1977, т. 21, № 3, с. 218.
5. Фридель Ж. Дислокации.— М., 1967.

УДК 517.977

О. Н. БУДЬКО

ОДНО ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СИЛЬНОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ВТОРОЙ ВАРИАЦИИ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО УПРАВЛЕНИЮ

Пусть на траекториях управляемой системы

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}x(t) &= f(x(t), u(t), u(t-h), t), \quad t \in T = [t_0, t_1]; \\ x(t_0) &= x_0; \quad u(\cdot) = \{\varphi_1(\tau), \tau \in [t_0-h, t_0]\}; \\ u(t) &\in U, \quad t \in T, \end{aligned} \quad (1)$$

требуется минимизировать функционал

$$I(u) = \varphi(x(t_1)), \quad (3)$$

где $x \in R^n$; $u \in R^m$ — управление из класса дифференцируемых функций с ограниченной производной; $U \subset R^m$ — открытое множество; функционал φ и функция $f(x, u, u(t-h), t)$ обладают достаточными аналитическими свойствами для дальнейших исследований; h — постоянное запаздывание, $h > 0$.

Пусть $u^0(t)$, $t \in T$, — управление, удовлетворяющее принципу максимума. Вдоль таких управлений будем исследовать вторую вариацию функционала (3). Известно [1], что сильная положительность второй ва-

риации является достаточным условием слабого локального минимума функционала. Для задачи (1) — (3) вторая вариация имеет вид

$$\delta^2 I(u^0) = \bar{x}^T(t_1) Q_1(t_1) \bar{x}(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} [\bar{x}^T(t) Q(t) \bar{x}(t) + \bar{u}^T(t) R(t) \bar{u}(t) + 2\bar{x}^T(t) \times \\ \times D_1(t) \bar{u}(t) + 2\bar{x}^T(t) D_2(t) \bar{u}(t-h) + 2\bar{u}^T(t) R_2(t) \bar{u}(t-h)] dt; \quad (4)$$

$$-\frac{d}{dt} \bar{x}(t) = A(t) \bar{x}(t) + B(t) \bar{u}(t) + C(t) \bar{u}(t-h), \quad t \in T; \quad (5)$$

$$\bar{x}(t_0) = 0; \quad \bar{u}(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0-h, t_0], \quad (6)$$

где $\bar{x}(t) = \delta x(t)$ — вариация траектории; $\bar{u}(t) = \delta u(t)$ — вариация управления из класса дифференцируемых функций с ограниченной производной. В дальнейшем будем считать, что $R(t) > 0$; $R_2(t) = 0$; $t \in T$.

Рассмотрим тождество

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left\{ \bar{x}^T(t) M(t) \bar{x}(t) + \bar{x}^T(t) \int_{-h}^0 M(t, s) \bar{u}(t+s) ds + \right. \\ \left. + \left(\int_{-h}^0 \bar{u}^T(t+s) M^T(t, s) ds \right) \bar{x}(t) + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \bar{u}^T(t+s) M(t, s, r) \bar{u}(t+r) ds dr \right\} dt - \\ - \bar{x}^T(t_1) M(t_1) \bar{x}(t_1) - \bar{x}^T(t_1) \int_{-h}^0 M(t_1, s) \bar{u}(t_1+s) ds - \\ - \left(\int_{-h}^0 \bar{u}^T(t_1+s) M^T(t_1, s) ds \right) \bar{x}(t_1) - \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \bar{u}^T(t_1+s) M(t_1, s, r) \bar{u}(t_1+r) ds dr + \\ + \bar{x}^T(t_0) M(t_0) \bar{x}(t_0) + \bar{x}^T(t_0) \int_{-h}^0 M(t_0, s) \bar{u}(t_0+s) ds + \\ + \left(\int_{-h}^0 \bar{u}^T(t_0+s) M^T(t_0, s) ds \right) \bar{x}(t_0) + \\ + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \bar{u}^T(t_0+s) M(t_0, s, r) \bar{u}(t_0+r) ds dr = 0 \quad (7)$$

для любых $\bar{x}(t_0)$; $\bar{u}(\tau)$, $\tau \in [t_0-h, t_0]$. На траекториях системы (5) рассмотрим функционал $\delta^2 I(u^0)$, полученный добавлением тождества (7) к функционалу (4) с учетом начальных условий (6).

Поступая аналогично [2], получаем следующую систему матричных дифференциальных уравнений Риккати (СМДУР):

$$-\frac{d}{dt} \bar{K}(t) = -A^T(t) \bar{K}(t) - \bar{K}(t) A(t) - \bar{Q}(t) + \bar{F}(t) R^{-1}(t) \bar{F}^T(t); \\ \bar{K}(t_1) = Q_1(t_1) - M(t_1); \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{K}(t, s) = \frac{\partial}{\partial s} \bar{K}(t, s) - [A^T(t) - \bar{F}(t) R^{-1}(t) B^T(t)] \bar{K}(t, s) + \\ + \bar{F}(t) R^{-1}(t) \bar{K}^T(t, s, 0) + \Sigma_2(t, s);$$

$$\bar{K}(t, -h) = \bar{K}(t) C(t) + \bar{D}_2(t); \quad \bar{K}(t_1, s) = -M(t_1, s); \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{K}(t, s, r) = \left[\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial r} \right] \bar{K}(t, s, r) + [\bar{K}^T(t, s) B(t) +$$

$$+ \bar{K}(t, s, 0) + M^T(t, s) B(t) + M(t, s, 0)] R^{-1}(t) [B^T(t) \bar{K}(t, r) + \\ + \bar{K}(t, 0, r) + B^T(t) M(t, r) + M(t, 0, r)] + \Sigma_3(t, s, r);$$

$$\bar{K}(t, -h, r) = C^T(t) \bar{K}(t, r) + \Sigma_{31}(t, r); \quad \bar{K}(t_1, s, r) = -M(t_1, s, r), \quad (10)$$

для всех $t \in T$, $s, r \in [-h, 0]$, где

$$\begin{aligned} \bar{F}(t) &= \bar{K}(t) B(t) + \bar{K}(t, 0) + \bar{D}_1(t); \quad \bar{D}_1(t) = D_1(t) + M(t)B(t) + M(t, 0); \\ \bar{Q}(t) &= Q(t) + A^T(t) M(t) + M(t)A(t) + \frac{d}{dt} M(t); \\ D_2(t) &= D_2(t) + M(t)C(t) - M(t, -h); \\ \Sigma_2(t, s) &= \left[\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial t} \right] M(t, s) - A^T(t) M(t, s) + \\ &\quad + \bar{F}(t) R^{-1}(t) [B^T(t) M(t, s) + M^T(t, s, 0)]; \\ \Sigma_3(t, s, r) &= \left[\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial t} \right] M(t, s, r) + [M(t, s) B(t) + M(t, s, 0)] \times \\ &\quad \times R^{-1}(t) [B^T(t) M(t, r) + M(t, 0, r)]; \quad \Sigma_{31}(t, r) = C^T(t) M(t, r) - M(t, -h, r). \end{aligned}$$

Предположим, что СМДУР (8)–(10) имеет решение. Тогда, используя (5)–(7), (8)–(10), функционал (4) можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} \delta^2 I(u^0) &= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \bar{u}(t) + R^{-1}(t) \bar{F}(t) \bar{x}(t) + R^{-1}(t) \int_{-h}^0 [B^T(t) \bar{K}(t, s) + \right. \\ &\quad + \bar{K}^T(t, s, 0)] \bar{u}(t+s) ds + R^{-1}(t) \int_{-h}^0 [B^T(t) M(t, s) + M^T(t, s, 0)] \times \\ &\quad \times \bar{u}(t+s) ds \Big\}^T R(t) \left\{ \bar{u}(t) + R^{-1}(t) \bar{F}(t) \bar{x}(t) + R^{-1}(t) \int_{-h}^0 [B^T(t) \bar{K}(t, s) + \right. \\ &\quad + \bar{K}^T(t, s, 0)] \bar{u}(t+s) ds + R^{-1}(t) \int_{-h}^0 [B^T(t) M(t, s) + \\ &\quad \left. + M^T(t, s, 0)] \bar{u}(t+s) ds \right\} dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Похожие преобразования проделаны в [2, 3]. Отсюда $\delta^2 I(u^0) > 0$ для любых $\bar{u}(t) \neq 0$, $t \in T$, т. е. вторая вариация определено положительная. Вдоль траекторий системы (5) рассмотрим функционал

$$I(\bar{u}, \varepsilon) = \delta^2 \bar{I}(u^0) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \bar{u}^T(t) R(t) \bar{u}(t) dt. \quad (12)$$

Функционал (12) определено положителен, если имеет решение СМДУР (8)–(10) при $R(t, \varepsilon) = \frac{1}{1-\varepsilon} R(t)$. Следуя [4], можно показать, что СМДУР ε действительно имеет решение. Тогда $I(\bar{u}, \varepsilon) \geq 0$ для любых $\bar{u}(t)$, $t \in T$. Преобразовав (12), получим $\delta^2 I(\bar{u}^0) \geq k_2 \|u(\cdot)\|_{L_2}^2$ для любых $\bar{u}(t)$, $t \in T$. Таким образом, справедлива

Теорема. Для того чтобы вторая вариация $\delta^2 I(u^0)$ (4) была сильно положительной, достаточно, чтобы для любых $t \in T$, $s, r \in [-h, 0]$ существовало решение СМДУР (8)–(10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Soliman M. A., Ray W. H.—Int. J. Control, 1972, v. 15, № 4, p. 609.
2. Забелло Л. Е. Минимизация квадратичных функционалов и проблема второй вариации для управляемых систем с запаздыванием.—Рукопись деп. в ВИНТИ, № 505-83. Деп. от 27.01.83.
3. Bell D. J., Jacobson D. H.—Academic Press, London: New York: San-Francisco, 1975.
4. Колмановский В. Б., Майзенберг Т. Л.—Автоматика и телемеханика, 1973, № 1, с. 47.
5. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление.— М., 1961.

О ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ИЗОМОРФИЗМА

Структурно-сложная информация в вычислительных системах представляется в виде таблиц. Их элементами являются записи, идентифицируемые при помощи ключей. В записях содержится полная информация о топологии обрабатываемых структур данных (множества, графы, деревья, списки). В связи с этим при обработке структур данных широко используются операции табличного характера: поиск, удаление, вставка, модификация.

Известны работы по созданию эффективной структуры памяти для систем, ориентированных на обработку структур данных [1, 2]. Однако эти варианты имеют низкое быстродействие вследствие их программной реализации на базе обычной линейной памяти. Очевидно, что для построения эффективной вычислительной системы, ориентированной на обработку структур данных, необходимо обеспечить поддержку в виде памяти, выполняющей табличные операции с высокой скоростью. Кроме того, необходимо устройство замены числовых полей, так как эта операция встречается весьма часто.

В качестве памяти, обладающей такими свойствами, предлагается память на основе перемешивания (хеширования) с многоключевым доступом [3, 4] с некоторой модификацией. Она включает аппаратный генератор адреса на основе хеш-функции с переменной длиной исходного ключа [5], память, допускающую хранение данных с переменной длиной, и устройство замены числовых полей. В качестве способа разрешения коллизий выбран метод списка.

Применение такой памяти позволяет значительно повысить эффективность обработки структур, данных в системах. Кроме того, использование некоторых свойств описанной памяти, например, совпадение адреса у элементов с одинаковыми именами, порождает новые алгоритмы решения некоторых задач.

В качестве примера использования предложенной памяти рассмотрим процесс установления изоморфизма топологическими методами. Топологические методы определения изоморфизма основаны на определении простых свойств обоих структур и последующем установлении взаимно-однозначного соответствия между двумя множествами, образованными из этих свойств. Будем обозначать свойство узла структуры G_1 с именем η_i через α_i , а свойство узла структуры G_2 с именем ξ_i через β_i . Тогда два множества свойств будут состоять из пар вида (η_i, α_i) и (ξ_i, β_i) соответственно. Задача состоит в нахождении для каждого α_i соответствующего ему элемента β_j : $\alpha_i = \beta_j$, тогда имя ξ_j определяет изоморфную подстановку для вершины η_i . Перебрав все α_i , определим для соответствующих η_i изоморфные подстановки. Результирующее множество подстановок для каждого узла даст изоморфную подстановку для структуры G_1 , которая переводит ее в структуру G_2 . В случае, когда одному α_i соответствуют несколько β_j , необходимо произвести уточнение свойств и дальнейшее сравнение производить по уже уточненным. Таким образом, в топологических методах время установления взаимно-однозначного соответствия между элементами двух множеств является определяющим для всей задачи [6, 7].

Структуры G_1 и G_2 размещаются в памяти с хешированием поэлементно, причем информацией (ключем) для определения адреса является сцепление $G_1\eta_i$ и $G_2\xi_i$. При установлении изоморфизма производятся следующие операции. По имени G_1 извлекаем поочередно все элементы указанной структуры, вычисляем для каждого свойство α_i и размещаем в памяти по ключу $G_1\alpha_i$, причем в качестве информации фигурирует G_1 и η_i . Далее по ключу G_2 читаются поочередно элементы G_2 , для каж-

дого ξ_i определяем β_i , заменяем G_2 на G_1 и размещаем по ключу $G_1\beta_i$, причем в качестве информации фигурирует G_2 и ξ_i . Элементы разных структур, создавшие коллизию, выявляют взаимнооднозначное соответствие, что и определяет изоморфную подстановку. Такое использование хеширования можно назвать оперативным, так как оно используется для решения поставленной задачи.

Число сравнений с учетом коллизий при установлении изоморфизма: $L^1 = 2kN$, где k — величина коллизии и $k = 1 \div 5$.

В [8] показано, что число сравнений и обращений в память для простейшего случая графов, имеющих различные пары полустепеней исхода и захода вершин, при использовании обычной памяти равно:

$$L^2 = \frac{N(N+1)}{2},$$

где N — число вершин в графе.

Если использовать в качестве свойств пары чисел $(v_{i,j}, w_{i,j})$, где $j = 1, 2; i = 1, \dots, N$ и $v_{i,j}$ — полустепень исхода, а $w_{i,j}$ — полустепень захода, то выигрыш R равен

$$R = \frac{L^2}{L^1} = \frac{N+1}{2k} \approx \frac{N}{2k}.$$

Очевидно, что R есть функция от N .

Можно сделать следующие выводы. Использование памяти предложенного типа, эффективно реализующей табличные операции, дает значительный выигрыш в быстродействии при обработке структур данных. Использование указанной памяти порождает новые алгоритмы решения ряда задач обработки структур данных. Для рассмотренного случая графов выигрыш в скорости равен $N/2k$. Данная память в аппаратном варианте может быть использована в любой вычислительной системе в качестве внешнего ЗУ. Возможна также реализация системы с использованием такой памяти в качестве оперативного ЗУ. В случае отсутствия аппаратной реализации эту память с точки зрения функциональных возможностей можно осуществить в виде программного комплекса при сохранении выигрыша по времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вельбицкий И. В., Нетесин И. Е., Шолмов Л. И.— Программирование, 1982, № 1, с. 27.
2. Яковлев Ю. С.— Управляющие системы и машины, 1983, № 3, с. 15.
3. Липницкий А. С., Черников Г. Н., Шпаковский Г. И. Двухпризнаковая память с хеш-доступом, ч. 1. Структура и функционирование.— Рукопись деп. в ВИНТИ, № 431-83. Деп. от 26.01.83.
4. Липницкий А. С., Черников Г. Н., Шпаковский Г. И.— Труды Всесоюзной конференции: Развитие теории и техники хранения информации, окт. 1983, с. 53.
5. Липницкий А. С., Черников Г. Н., Шпаковский Г. И., Сериков А. В. Выбор генератора функций расстановки для параллельной вычислительной системы.— Рукопись деп. в ВИНТИ, № 347-83. Деп. от 20.03.83.
6. Курейчик В. М., Королев А. Г.— Кибернетика, 1977, № 2, с. 82.
7. Земляченко В. Н., Корненко Н. М., Тышкевич Р. И.— Записки науч. семинаров Ленинградского отделения Матем. ин-та АН СССР, 1982, т. 118, с. 83.
8. Мелихов А. Н. Ориентированные графы и конечные автоматы.— М., 1971, с. 24.

УДК 517.925

А. КЕССИ

УРАВНЕНИЯ С НЕПОДВИЖНЫМИ КРИТИЧЕСКИМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ ВИДА $\omega'^m = P_{2m}(z, \omega)$ И ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Будем рассматривать дифференциальные уравнения вида:

$$\omega'^m = P_{2m}(z, \omega), \quad (1)$$

где $P_{2m}(z, \omega)$ — полином степени не выше $2m$ от ω и аналитическая функция от z .

Очевидно, что уравнение (1) удовлетворяет первому и второму условиям Фукса. Рассмотрим 3-е условие:

$$F(\omega', \omega, z) = \omega'^m - P_{2m}(z, \omega) = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (2) получаем:

$$D(\omega, z) = P_{2m}(z, \omega). \quad (3)$$

Из общей теории известно [1], что нули дискриминанта $D(\omega, z)$ должны быть решениями уравнения (1). При $P_{2m}(z, \omega) = 0$ $\frac{\partial P_{2m}}{\partial z} + \frac{\partial P_{2m}}{\partial \omega} \cdot \omega' = 0$, т. е. при $P_{2m}(z, \omega) = 0$ $\frac{\partial P_{2m}}{\partial z} \equiv 0$. Отсюда мы получим, что $P_{2m}(z, \omega) = a_0(z) \cdot P(\omega)$. Тогда уравнение (1) имеет такой вид:

$$\left(\frac{d\omega}{\sqrt[m]{a_0(z)} \cdot dz} \right)^m = P(\omega).$$

Пусть $d\tau = \sqrt[m]{a_0(z)} dz$, тогда получим

$$\left(\frac{d\omega}{d\tau} \right)^m = P(\omega). \quad (4)$$

Так как уравнения вида (4) уже изучены [2], то можно найти все формы уравнения вида (1) с неподвижными критическими точками и их интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.— М., 1941.
2. Колесникова Н. С., Лукашевич Н. А.— Дифференц. уравнения, 1972, т. 8, № 10, с. 1753.

УДК 519.872

А. Н. ДУДИН

ОБ ОДНОЙ НЕНАДЕЖНОЙ СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ИЗМЕНЯЕМОЙ СКОРОСТЬЮ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА

Рассмотрим следующую математическую модель системы массового обслуживания (СМО) с ожиданием. В систему поступают требования, длина которых имеет распределение $B(\tau)$ с преобразованием Лапласа—

Стилтьеса $\beta(s)$ и конечными моментами $b_j = \int_0^{\infty} \tau^j dB(\tau)$, $j=1, 2$. В течение

времени, имеющего экспоненциальное распределение с параметром ϕ_1 , система функционирует нормально: в систему поступает простейший поток требований интенсивности λ_1 , происходит обслуживание требований с постоянной скоростью δ_1 единиц длины в единицу времени. По истечении времени нормального функционирования системы происходит поломка прибора. Время, затрачиваемое на его ремонт, имеет распределение $D(\tau)$ с преобразованием Лапласа — Стилтьеса $d(s)$ и конечными моментами $d_j = \int_0^{\infty} \tau^j dD(\tau)$, $j=1, 2$. Во время ремонта в систему поступает

простейший поток требований интенсивности λ_2 , обслуживание требований не производится. После окончания ремонта снова начинается нормальное функционирование СМО, причем требование, находившееся на приборе в момент поломки, дообслуживается. Требуется найти производящую функцию стационарного распределения вероятностей числа требований в данной системе. Эта задача решена в [1], когда распределения $B(\tau)$ и $D(\tau)$ экспоненциальные, в [2], когда эти распределения эрланговские. Решим эту задачу в случае произвольных распределений $B(\tau)$, $D(\tau)$.

Рассмотрим процесс $\xi_t = \{i_t, v_t, \tau_t \theta_t\}$, где i_t — число требований в системе в момент t ; $v_t = 1$, если в момент t система работает нормально, и $v_t = 2$, если в момент t прибор ремонтируется; τ_t — остаточная длина требования, находящегося на приборе в момент t ; θ_t — остаточное время ремонта, если $v_t = 2$. Обозначим: $\pi_t^{(1)}(i, x) = P\{i_t = i, v_t = 1, \tau_t < x\}$, $\pi_t^{(2)}(i, x, y) = P\{i_t = i, v_t = 2, \tau_t < x, \theta_t < y\}$, $i \geq 0, x, y \geq 0$.

Утверждение. Если выполняется условие

$$Ab_1 < 1, \quad (1)$$

где $A = (\lambda_1 + \varphi_1 d_1 \lambda_2) / \delta_1$, то существует стационарное распределение вероятностей состояний СМО:

$$\pi^{(1)}(i, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_t^{(1)}(i, x), \quad \pi^{(2)}(i, x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_t^{(2)}(i, x, y), \quad i \geq 0, x, y \geq 0.$$

Введем производящие функции:

$$R_1(z, x) = \pi^{(1)}(0, 0) + \sum_{i=1}^{\infty} \pi^{(1)}(i, x) z^i,$$

$$R_2(z, x, y) = \pi^{(2)}(0, 0, y) + \sum_{i=1}^{\infty} \pi^{(2)}(i, x, y) z^i, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Поскольку нас интересует производящая функция стационарного распределения вероятностей процесса i_t , для решения задачи достаточно найти вид $R_1(z, +\infty)$, $R_2(z, +\infty, +\infty)$.

Теорема. Производящие функции $R_1(z, +\infty)$, $R_2(z, +\infty, +\infty)$ определяются следующим образом:

$$R_1(z, +\infty) = R_1(0, 0) \frac{\beta(\bar{s}(z))(1-z)}{\beta(\bar{s}(z))-z}, \quad (2)$$

$$R_2(z, +\infty, +\infty) = \varphi_1 \frac{1-d(\lambda_2(1-z))}{\lambda_2(1-z)} R_1(z, +\infty), \quad (3)$$

$$R_1(0, 0) = \pi^{(1)}(0, 0) = (1-Ab_1)/(1+\varphi_1 d_1), \quad (4)$$

где $\bar{s}(z) = (\lambda_1(1-z) + \varphi_1(1-d(\lambda_2(1-z)))) / \delta_1$.

Доказательство теоремы проводится путем составления уравнений Чепмена — Колмогорова для стационарных вероятностей марковского процесса ξ_t , получения системы уравнений для их производящих функций, для преобразований Лапласа этих производящих функций, решения этой системы и обратного перехода к производящим функциям.

Используя формулы (2) — (4), можно находить различные характеристики рассматриваемой СМО. Например, выражения для вероятности P_0 того, что система пуста и для среднего числа L требований в системе следующие:

$$P_0 = \pi^{(1)}(0, 0) + \pi^{(2)}(0, 0, +\infty) = \left(1 + \frac{1-d(\lambda_2)}{\varphi_1 \lambda_2}\right) \frac{1-Ab_1}{1+\varphi_1 d_1},$$

$$\begin{aligned} L &= R_1'(1, +\infty) + R_2'(1, +\infty, +\infty) = \\ &= Ab_1 + \frac{A^2 b_2 + b_1 \delta_1^{-1} \varphi_1 \lambda_2^2 d_2}{2(1-Ab_1)} + \frac{\varphi_1 \lambda_2 d_2}{2(1+\varphi_1 d_1)}. \end{aligned}$$

Отметим некоторые частные случаи рассматриваемой СМО.

А. Случай, когда $B(\tau)$, $D(\tau)$ — экспоненциальные или эрланговские распределения. Результаты данной работы согласуются с [1, 2].

Б. Случай $d_1 \rightarrow 0$ или $\lambda_2 \rightarrow 0$ — поведение числа требований в рассматриваемой СМО совпадает с поведением числа требований в надежной СМО $M|G|1$ с интенсивностью входящего потока λ_1 и распределением времени обслуживания $B(\delta_1 \tau)$.

В. Случай осцилляции между исправным и неисправным состоянием прибора ($\varphi_1 \rightarrow +\infty, d_1 \rightarrow 0, \varphi_1 d_1 = c$) — поведение числа требований в рассматриваемой СМО совпадает с поведением числа требований в надежной СМО $M|G|1$ с интенсивностью входящего потока $\bar{\lambda} = (\lambda_1 + c\lambda_2)/\delta_1$ и распределением времени обслуживания $B(\tau)$.

Г. Случай редких поломок прибора и долгих ремонтов ($\varphi_1 \rightarrow 0, d_1 \rightarrow +\infty, \varphi_1 d_1 = c$) — поведение числа требований в рассматриваемой СМО описывается той же надежной СМО, что и в случае В.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yechiali U., Naor P.— Oper. Res., 1971, v. 19, № 3, p. 722.
 2. Shogan A. W.— Nav. Res. Log. Quart., 1979, v. 29, № 3, p. 487.

УДК 519.21

Н. В. ЛАЗАКОВИЧ

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ
 В ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ СУММ
 НЕЗАВИСИМЫХ k -РЕШЕТЧАТЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ**

Пусть $\xi_j = (\xi_{j1}, \xi_{j2}, \dots, \xi_{jk}), j = \overline{1, n}$ — независимые k -решетчатые случайные векторы (с. в.), принимающие значения из общей решетки

$$\{(m_1, m_2, \dots, m_k) : m_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; i = \overline{1, k}\}, \quad (1)$$

с функциями распределения (ф. р.) $\bar{V}_j(x)$.

Без существенного ограничения общности предполагаем, что математические ожидания компонент случайного вектора $\xi_j, j = \overline{1, n}$ равны 0.

Введем следующие обозначения:

$$\sigma_{jl}^2 = M\xi_{jl}^2, j = \overline{1, n}, l = \overline{1, k}; B_{nl}^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_{jl}^2; B_n = (B_{n1}, \dots, B_{nk});$$

$$\bar{F}_j(x) — \text{ф. р. с. в. } \frac{\xi_j V_n}{B_n};$$

θ — с. в. с ф. р.

$$F(x) = \frac{1}{n} (\bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(x) + \dots + \bar{F}_n(x));$$

V_n — ковариационная матрица с. в. Θ , предполагаем, что она положительно определенная;

U — класс всех борелевских множеств в R^k ;

$$F_n(x) — \text{ф. р. суммы } S_n = \frac{1}{B_n} (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n);$$

$$P_n(A) = P(S_n \in A);$$

Λ_n — ковариационная матрица с. в. $Z_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$;

$$\beta_{sj} = M(\xi_j \Lambda_n^{-1} \xi_j')^{\frac{s}{2}}, L_{sn} = \sum_{j=1}^n \beta_{sj};$$

$P_j(\Theta, -\Phi)(x)$ — стандартные многочлены аппроксимации, см., например, [4];

λ_n — наименьшее собственное значение V_n ;

$$G_{\xi_j}^{(i)}(v_i) = \frac{\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} P(\xi_j = (v_1, \dots, v_i + \mu, \dots, v_k)) P(\xi_j = (v_1, \dots, \mu, \dots, v_k))}{\sum_{v_i=-\infty}^{\infty} P(\xi_j = v)};$$

$$\Lambda_{r,n}(F)(x) = \sum_{j(\alpha) < r} (-1)^{|\alpha|} \frac{1}{B_n^\alpha} S_\alpha(B_n x) (D^\alpha F)(x),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ — произвольный неотрицательный целочисленный вектор, $|\alpha| = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_k|$,

$$j(\alpha) = \sum_{\alpha_j > 2} (\alpha_j - 1); \quad j(\alpha) = 0, \text{ если } \alpha_j < 2 \text{ для всех } j;$$

$$S_\alpha(x) = S_{\alpha_1}(x_1) \cdot S_{\alpha_2}(x_2) \dots S_{\alpha_k}(x_k), \quad x = (x_1, \dots, x_k);$$

$$S_j(x) = \begin{cases} (-1)^{j/2-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos(2\pi n x)}{(2\pi n)^j}, & j \text{ — четно, } j > 0 \\ (-1)^{\frac{j-1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(2\pi n x)}{(2\pi n)^j}, & j \text{ — нечетно.} \end{cases}$$

Выпишем ряд условий, которые нам понадобятся в дальнейшем:

$$\liminf_n \lambda_n > 0; \quad (2)$$

$$\liminf_n \frac{B_n^2}{n} > 0, \quad i = \overline{1, k} \quad \limsup_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n M \|\xi_j\|^s < \infty; \quad (3)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_{\|x\| > n^\tau} \|x\|^s dV_j(x) \rightarrow 0, \quad 0 < \tau < \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Теорема. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые k -решетчатые с. в., принимающие значения из общей решетки (1), маргинальные распределения координат которых имеют равные 1 максимальные шаги распределения, удовлетворяют условиям (2)–(4) и

$$\frac{1}{\ln n} \min_{1 < i < k} \min_{a/q} \sum_{j=1}^n \frac{1}{q^2} \sum_{-\frac{q}{2} < r \leq \frac{q}{2}} r^2 \times \\ \times \sum_{\substack{av_i \equiv r \pmod{q} \\ \|v_i\| < \frac{1}{2}}} G_{\xi_j}^{(i)}(v_i) \rightarrow \infty,$$

где минимум берется по всем целым a и q таким, что $1 < q \leq 16k \|B_n\| L_{3n}$, $a \leq \frac{1}{2}q$, $(a, q) = 1$, тогда равномерно по $A \in U$ для $s \geq 3$ имеет место следующее соотношение;

$$P_n(A) = \int_A d \sum_{j=0}^{s-2} n^{-\frac{j}{2}} \Lambda_{s-j-1, n}(P_j(\Theta, -\Phi)(x)) + o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right).$$

Доказательство теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 1 из [4] с использованием теоремы А. 4.3. из [2] и леммы 2 из [3].

Следствие. При выполнении условий теоремы

$$\sup_{x \in R^k} |F_n(x) - \sum_{|\alpha| \leq s-2} (-1)^{|\alpha|} B_n^{-\alpha} S_\alpha(B_n x) (D^\alpha \Phi)(x) - \\ - n^{-\frac{1}{2}} \sum_{|\alpha| \leq s-2} (-1)^{|\alpha|} B_n^{-\alpha} S_\alpha(B_n x) (D^\alpha P_1(\Theta, -\Phi)(x)) - \\ - n^{-\frac{s-2}{2}} P_{s-2}(\Theta, -\Phi)(x)| = o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Полученные результаты обобщают работы [1], [4] и теоремы 23.1, 23.2 из [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бикьялис А.— Теория вероятностей и ее применение, 1969, т. 14, № 3, с. 499.
2. Бхаттачарья Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения.— М., 1982.
3. Дубинский И.— Лит. матем. сб., 1981, т. 21, № 4, с. 97.
4. Лазакевич Н.— Лит., матем. сб., 1982, т. 22, № 1, с. 86.

УДК 513.83

В. Л. ТИМОХОВИЧ

o -МЕТРИКИ С УСЛОВИЕМ (сК)

В предлагаемой заметке рассматриваются топологические пространства с o -метрикой [1], удовлетворяющей условию (сК) (слабое условие Коши [2]). Внутреннюю и внешнюю характеристики пространств, допускающих симметрику с (сК), дал Я. А. Кофнер [3]. Здесь результаты Я. А. Кофнера обобщаются на случай произвольных o -метризуемых пространств. Все отображения предполагаются непрерывными сюръекциями, все пространства, если это не оговорено особо, T_1 .

1. Для топологического пространства X , $A \subset X$, $x \in X$ обозначим: τ_x — топология на X , $\tau_x(x)$ — семейство всех окрестностей точки x , $[A]_x$ — замыкание A в X .

Вещественно значащая функция $d(x, y)$ на множестве X называется o -метрикой, если для любых $x, y \in X$ $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. o -Метрика d называется симметрикой, если для любых $x, y \in X$ $d(x, y) = d(y, x)$. Говорят, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ сходится к точке $x \in X$ по o -метрике d , если $d(x, x_n) \rightarrow 0$. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называют фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует n такое, что каковы бы ни были $k \geq n$, $m \geq n$, $d(x_k, x_m) < \varepsilon$. Отметим, что сходящаяся по d последовательность может не быть фундаментальной [4].

Обозначим $B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$, $B_d(A, \varepsilon) = \bigcup_{x \in A} B_d(x, \varepsilon)$, $\text{diam}_d(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$. Говорят, что пространство X допускает o -метрику d , или что d согласуется с топологией, если $U \in \tau_x \Leftrightarrow$ для любой точки $x \in U$ можно указать $\varepsilon > 0$ такое, что $B_d(x, \varepsilon) \subset U$. В этом случае из сходимости по d следует сходимость в топологическом смысле, обратное, однако, не всегда верно [1]. Говорят, что согласованная с топологией o -метрика d удовлетворяет условию (сК), если для любого $\varepsilon > 0$ в любом незамкнутом множестве A можно указать точки x, y , $x \neq y$, такие, что $\text{diam}_d(\{x, y\}) < \varepsilon$.

Пусть на X фиксирована некоторая согласованная с топологией o -метрика d . Отображение $f: X \rightarrow Y$ называют Π -отображением, если, каковы бы ни были $y \in Y$, $U \in \tau_Y(y)$, существует $\varepsilon > 0$, для которого $B_d(f^{-1}(y), \varepsilon) \subset f^{-1}(U)$ [5].

И, наконец, обозначим $\langle A \rangle_d = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$. Ясно, что при согласованности o -метрики d с топологией, $\langle A \rangle_d \subset [A]_x$.

2. **Теорема 1.** Согласованная с топологией o -метрика d удовлетворяет условию (сК) тогда и только тогда, когда из любой сходящейся по d последовательности можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Принципиальная идея доказательства содержится в упомянутой работе Я. А. Кофнера [3].

Пусть X — регулярное пространство, допускающее o -метрику d с условием (сК). Построим метрическое пространство S и факторное Π -отображение $f: S \rightarrow X$. Обозначим γ_n — семейство всех множеств $\alpha_n \subset X$, представимых в виде $\alpha_n = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \cup \{x\}$, $\text{diam}_d(\{x_i\}_{i=1}^{\infty}) < \frac{1}{n}$, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset B_d(x, \frac{1}{n})$, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ сходится по d к x , $S = \{\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in$

$\in \prod_{n=1}^{\infty} \gamma_n | \bigcap_{n=1}^{\infty} \alpha_n \neq \emptyset$. Ясно, что для любой $\alpha \in S \bigcap_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ — одноточечное множество. Таким образом, имеет место отображение $f: S \rightarrow X: \alpha \rightarrow x = \bigcap_{n=1}^{\infty} \alpha_n$. На S определим метрику $\rho(\alpha, \beta) = 1/n(\alpha, \beta)$, где $n(\alpha, \beta)$ — первое n , для которого $\alpha_n \neq \beta_n$ или ∞ в случае $\alpha = \beta$. Имеем для любых $\alpha \in S, x \in X$:

$$1) B_\rho(\alpha, \frac{1}{n}) = (\{\alpha_1\} \times \dots \times \{\alpha_n\} \times \prod_{i>n} \gamma_i) \cap S;$$

$$2) f(B_\rho(\alpha, \frac{1}{n})) = \alpha_1 \cap \dots \cap \alpha_n;$$

$$3) f(B_\rho(f^{-1}(x), \frac{1}{n})) \subset \subset B_d(x, \frac{1}{n}) \supset \supset B_d(x, \frac{1}{n})|_X.$$

Опираясь на свойства 1)–3) и на теорему 1, нетрудно показать, что f — факторное П-отображение. Таким образом, в силу результатов Я. А. Кофнера [3] справедлива

Теорема 2. Регулярное пространство, допускающее σ -метрику с (сК), допускает и симметрику с (сК).

В связи со сказанным представляется интересным вопрос: можно ли в теореме 2 опустить требование регулярности?

ЛИТЕРАТУРА

1. Недев С. Й.— Труды Моск. матем. об-ва, 1971, т. 24.
2. Архангельский А. В.— Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 2.
3. Кофнер Я. А.— Докл. АН СССР, т. 187, № 2.
4. Александров П. С., Немыцкий В. В.— Матем. сб., 1938, т. 3, № 3.
5. Пономарев В. И.— Бюл. Польской АН. Сер. матем., астр. и физ., 1960, т. 8, № 3.

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ СТАТЕЙ *

УДК 621.395.345.519.872.8

В. А. Бабичский, Е. В. Коновалов. Комплекс имитационных моделей для автоматизации проектирования внутреннего программного обеспечения коммутационных узлов. № 833Бе-Д84. Деп. от 05.03.84. в БелНИИТИ.

В качестве общей концептуальной модели (ОКМ) коммутационных узлов (КУ) с программным управлением предлагается использовать систему массового обслуживания (СМО) специального вида, так называемую СМО с доминированием. В результате редуцирования данной ОКМ формируются частные концептуальные модели (ЧКМ), позволяющие описывать широкий спектр проектных решений по построению внутреннего программного обеспечения (ВПО) КУ. Проводится краткое описание возможностей комплекса имитационных моделей, реализующих некоторые ЧКМ процессов сканирования комплектов, обработки информации о вызовах, искания путей в коммутационном поле и др.

УДК 681.3.06

А. И. Денисов, А. П. Макаров, Л. С. Шадурская. Псевдоустройство вывода графической информации. № 835Бе-Д84. Деп. от 05.03.84. в БелНИИТИ.

Предложен метод реализации приборонезависимого вывода графической информации на базе специализированной структуры графических данных, называемой псевдодисплейным файлом. Приводится описание функций, характеристик, структуры, системы команд псевдодисплейного файла, необходимого программного обеспечения и преимуществ используемого подхода к процессу вывода информации на графические устройства.

УДК 519.63:532.546

В. В. Жуковский, В. Б. Таранчук. О разностных схемах для расчета концентрации в задачах вытеснения нефти раствором с добавками активной примеси. № 836Бе-Д84. Деп. от 05.03.84. в БелНИИТИ.

Представлены и обсуждаются результаты расчетов насыщенности и концентрации в задачах вытеснения нефти активной примесью. Для модельных одномерных задач вытеснения, довытеснения и вытеснения оторочкой путем сравнения с эталонными аналитическими решениями проведено тестирование и оценена эффективность применения ряда разностных схем расчета концентрации примеси.

УДК 535.34

Г. С. Романов, Л. К. Станциц, К. Л. Степанов. Таблицы среднегрупповых коэффициентов поглощения плазмы алюминия. № 837Бе-Д84. Деп. от 06.03.84. в БелНИИТИ.

Приводятся систематические таблицы оптических свойств равновесной плазмы алюминия, рассчитанных для широкого диапазона термодинамических параметров: температура $T \leq 25$ эВ, плотность $10^{-7} \leq \rho \leq 10^{-1}$ г/см³. Расчеты выполнены для 12 спектральных групп, включающих энергии квантов от 0,01 до 249 эВ. Получены среднегрупповые росселандовы пробеги излучения, средние планковские коэффициенты поглощения, средние коэффициенты в пределах спектральных групп, а также осредненные по всему спектру излучательные характеристики плазмы. Используемая в работе методика учитывает основные процессы взаимодействия излучения с плазмой — свободно-свободные переходы в полях атомов и ионов, фотоионизацию из оптической и внутренних оболочек, связанно-связанные переходы.

УДК 535.34

Г. С. Романов, Л. К. Станциц, К. Л. Степанов. Таблицы среднегрупповых коэффициентов поглощения углеродной плазмы. № 838Бе-Д84. Деп. от 06.03.84. в БелНИИТИ.

Приводятся систематические таблицы оптических свойств равновесной углеродной плазмы, рассчитанных для широкого диапазона термодинамических параметров: температура $T \leq 25$ эВ, плотность $10^{-6} \leq \rho \leq 10^{-1}$ г/см³. Расчеты выполнены для 12 спектральных групп, включающих энергии квантов от 0,06 до 249 эВ. Получены среднегрупповые росселандовы пробеги излучения, средние планковские коэффициенты поглощения, средние коэффициенты в пределах спектральных групп, а также осредненные по всему спектру излучательные характеристики плазмы. Используемая в работе методика учитывает основные процессы взаимодействия излучения с плазмой — свободно-свободные переходы в полях атомов и ионов, фотоионизацию из оптической и внутренних оболочек, связанно-связанные переходы.

* Копии депонированных статей можно заказать по адресу: 220048, г. Минск, проспект Машерова, 7. Справочно-информационный отдел БелНИИТИ.

УДК 517.948.32

А. П. Шилин. Краевая задача Гильберта для полуплоскости. № 839Бе-Д84. Деп. от 06.03.84. в БелНИИТИ.

Изложена теория задачи Гильберта, краевое условие которой записывается в виде $\Phi^+ = Gr + g$. Здесь Φ^+ — предельное значение на вещественной оси искомой аналитической в верхней полуплоскости функции, r — искомая вещественнозначная, а G и g — заданные комплекснозначные функции на вещественной оси. Теория задачи основана на факторизации коэффициента и вполне аналогична теории задачи Римана. Указаны также сингулярные интегральные уравнения на вещественной оси, решаемые сведением к задачам Гильберта.

УДК 517.948.32

А. П. Шилин. Краевая задача Гильберта для полуплоскости. № 839Бе-Д84. Деп. от 06.03.84. в БелНИИТИ.

Изложена теория задачи Гильберта, краевое условие которой записывается в виде $\Phi^+ = Gr + g$. Здесь Φ^+ — предельное значение на вещественной оси искомой аналитической в верхней полуплоскости функции, r — искомая вещественнозначная, а G и g — заданные комплекснозначные функции на вещественной оси. Теория задачи основана на факторизации коэффициента и вполне аналогична теории задачи Римана. Указаны также сингулярные интегральные уравнения на вещественной оси, решаемые сведением к задачам Гильберта.

УДК 519.246

Ю. В. Меленец. Статистический анализ периодических бинарных последовательностей. № 840Бе-Д84. Деп. от 06.03.84. в БелНИИТИ.

Временные ряды, рассматриваемые в работе, являются реализацией случайной последовательности, получаемой сложением (по модулю 2) ненаблюдаемой бинарной периодической компоненты с последовательностью независимых случайных величин Бернулли. Решается ряд задач статистического анализа последовательностей указанного типа. Найдены оценки параметров ненаблюдаемой компоненты, в том числе ее периода, исследованы свойства полученных оценок. Приводятся данные, полученные методом статистического моделирования на ЭВМ и показывающие работоспособность предложенных алгоритмов оценивания неизвестных параметров.

УДК 621.395.345:681.3.06

Е. В. Коновалов. Методология структурного синтеза внутреннего программного обеспечения коммутационных узлов. № 841Бе-Д84. Деп. от 07.03.84. в БелНИИТИ.

Основные особенности предлагаемой методологии структурного синтеза внутреннего программного обеспечения (ВПО) коммутационных узлов (КУ) заключаются в следующем: 1) выявляются внешние условия проектирования (ВУП) ВПО КУ; 2) формируется система показателей и критериев (СПК), адекватных ВУП; 3) формируется система альтернативных проектных решений (АПР) по построению ВПО КУ, адекватных ВУП и СПК; 4) формируется система концептуальных моделей (СКМ) объекта, адекватных ВУП, СПК и АПР; 5) формируются задачи анализа АПР и математические модели; 6) проводится моделирование и системный анализ его результатов; 7) работы 2—6 образуют итеративную последовательность. Основными результатами применения методологии являются концептуальная база проектирования (КБП), содержащая итоговые варианты СПК, АПР и СКМ, и комплекс унифицированных проектных решений по построению ВПО КУ. Приводятся нетрадиционные решения в части КБП.

УДК 621.395.345:681.3.06

Е. В. Коновалов. Система показателей и критериев качества внутреннего программного обеспечения коммутационных узлов. № 842Бе-Д84. Деп. от 07.03.84. в БелНИИТИ.

Система формируется по следующей схеме: 1) выявляются и классифицируются свойства коммутационных узлов (КУ), зависящие от решений в части внутреннего программного обеспечения (ВПО), и свойства собственно ВПО КУ, существенные с позиций потребителей КУ и проекта ВПО КУ; 2) вводятся показатели, отражающие наличие и интенсивности проявления этих свойств; 3) синтезируется комплексный критерий качества (ККК) проекта ВПО КУ, включающий показатели, отражающие все существенные с позиций потребителей свойства КУ и ВПО КУ, и согласованный с предпочтениями потребителей; 4) формируются частные критерии качества (ЧКК), согласованные с ККК и частными задачами проектирования ВПО КУ. Полученные ККК и ЧКК являются нетрадиционными.

УДК 621.395.345:519.687.5

Е. В. Коновалов. Моделирование программных процессов вывода команд управления в коммутационных узлах. № 843Бе-Д84. Деп. от 07.03.84. в БелНИИНТИ.

Для исследования программных процессов вывода команд управления в квазиэлектронных коммутационных узлах (КУ) предлагается использовать в качестве концептуальной модели (КМ) линейную систему массового обслуживания, в которой один прибор обслуживает процессор КУ, а остальные n — периферийные управляющие устройства КУ. Получены и исследованы аналитические зависимости, позволяющие определить оптимальный — по критерию «коэффициент загрузки процессора КУ» — период выполнения процессов вывода.

УДК 519.872.7:621.395.345

Е. В. Коновалов. Оптимизация аperiodических программных процессов в коммутационных узлах. № 844Бе-Д84. Деп. от 07.03.84. в БелНИИНТИ.

Предлагается следующая схема решения задачи структурной оптимизации аperiodических программных процессов (АПП) в коммутационных узлах (КУ): 1) обосновывается выбор модели КУ — однолинейной системы массового обслуживания (ОСМО) — и критерия качества реализации АПП — пропускной способности системы при ограничениях на вероятности условных потерь; 2) для данной ОСМО и стратегии управления типа « Δ -расписание с ожиданием» выводятся аналитические выражения для квантов оптимального расписания (ОР); 3) значения ОР используются в качестве исходных данных в процедурах параметрической оптимизации других стратегий управления.

УДК 62.50

М. Айяши. Адаптивный метод решения одной задачи динамического транспортного типа. № 849Бе-Д84. Деп. от 11.03.84. в БелНИИНТИ.

Рассматривается динамическая транспортная задача с дополнительными ограничениями в сетевой форме. Для ее решения предлагается один метод, основанный на использовании опоры. В основу итераций положен принцип максимального уменьшения оценки субоптимальности.

УДК 62.50

М. Айяши. Двойственный опорный метод решения одной задачи динамического транспортного типа. № 850Бе-Д84. Деп. от 11.03.84. в БелНИИНТИ.

Рассматривается динамическая транспортная задача с дополнительными ограничениями в сетевой форме. Для ее решения предлагается один метод, основанный на использовании опоры. В основу итераций положено правило выбора подходящего направления улучшения целевой функции.

УДК 53:51

Г. Ч. Шушкевич. Решение задачи электростатики для тонкого сферического сегмента, расположенного над плоскостью с отверстием. № 862Бе-Д84. Деп. от 12.03.84. в БелНИИНТИ.

Краевая задача с помощью теорем сложения, связывающих сферические и цилиндрические гармонические функции, сведена к парным сумматорным и интегральным уравнениям. Затем парные уравнения преобразуются к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Получено разложение решения в ряд по малому параметру и найдено выражение для емкости сегмента.

УДК 517.912

В. И. Назаров. Дифференциально-операторное уравнение второго порядка с запаздыванием в пространствах Румье. № 863Бе-Д84. Деп. от 12.03.84. в БелНИИНТИ.

Рассматривается дифференциально-операторное уравнение второго порядка с коэрцитивным оператором в пространствах гладких функций Румье. Устанавливается, что дифференциальный оператор второго порядка (состоящий из суммы операторов: оператора дифференцирования второго порядка, коэрцитивного линейного оператора и разностного оператора с постоянной или произвольной гладкой неотрицательной функцией запаздывания) является изоморфизмом в различных классах пространств бесконечно дифференцируемых функций, в частности в пространствах финитных слева бесконечно дифференцируемых функций и финитных слева пространствах Румье.

УДК 519.62

В. В. Бобков, П. А. Мандрик, В. И. Репников. **О повышении согласованности в поведении решений дифференциальной и разностной задач.** № 864Бе-Д84. Деп. от 12703.84. в БелНИИНТИ.

Рассматриваются новые способы повышения согласованности в поведении решений дифференциальной и разностной систем обыкновенных дифференциальных уравнений с экспоненциальным характером траекторий. Приведены результаты численного эксперимента.

УДК 621.496

И. Б. Гаврис. **Дифракция поля электрического диполя на идеально проводящей сфере, нагруженной на круговую щель.** № 865Бе-Д84. Деп. от 13.03.84. в БелНИИНТИ.

Получены некоторые результаты численного решения краевой задачи дифракции волн электрического дипольного источника с произвольной ориентацией момента на идеально проводящей сфере, нагруженной на круговую щель, прорезанную вдоль параллели по всей окружности. Дан анализ характеристик направленности излучения и составляющих проводимости нагрузки на щели, обеспечивающей максимальную мощность излучения, в зависимости от размеров сферы, удаления диполя от поверхности сферы, изменения ориентации момента диполя и положения щели на сфере.

УДК 621.496

И. Б. Гаврис. **Дифракция поля магнитного диполя на идеально проводящей сфере, нагруженной на круговую щель.** № 865Бе-Д84. Деп. от 13.03.84. в БелНИИНТИ.

Приведены полученные с помощью ЭВМ результаты численного решения задачи дифракции волн магнитного дипольного источника с произвольной ориентацией момента на идеально проводящей сфере, нагруженной на круговую щель, представленные диаграммами направленности и графиками, которые характеризуют поведение активной и реактивной составляющих проводимости нагрузки на щели, обеспечивающей максимальную мощность излучения. Дан анализ характеристик направленности излучения, активной и реактивной составляющих проводимости нагрузки на щели в зависимости от изменения частоты колебаний, положения щели на сфере, удаления диполя от поверхности сферы и изменения ориентации его момента.

УДК 517.544

Т. Н. Жорвина. **Обобщенная задача Римана с постоянными коэффициентами для разомкнутого контура на торе.** № 868Бе-Д84. Деп. от 03.03.84. в БелНИИНТИ.

В замкнутом виде решается обобщенная краевая задача Римана с постоянными коэффициентами на торе K . Краевое условие задается на контуре, состоящем из n прямолинейных отрезков, лежащих на прямой, являющейся линией симметрии K .

УДК 517.5

А. П. Старовойтов. **О рациональной аппроксимации с заданными полюсами.** № 869Бе-Д84. Деп. от 13.03.84. в БелНИИНТИ.

Изучается аппроксимация кусочно-аналитических на всей действительной прямой функций рациональными дробями, у которых число геометрически различных полюсов либо фиксировано, либо произвольно задано. На этой основе строятся рациональные функции, хорошо приближающие стандартные функции $|x|$ и $\text{sign } x$ в соответствующих областях. Полученные результаты применяются при выводе оценок сверху для наилучших рациональных аппроксимаций с заданным числом геометрически различных полюсов функций класса Лишица, имеющих ограниченную вариацию, и некоторых классов кусочно-аналитических, выпуклых функций.

УДК 517.926

Н. Ф. Наумович. **Построение нестационарных систем дифференциальных уравнений с законом площадей.** № 870Бе-Д84. Деп. от 13.03.84. в БелНИИНТИ.

Выведен критерий закона площадей для нестационарных систем дифференциальных уравнений. Построены некоторые классы нестационарных систем, обладающих законом площадей.

УДК 539.12:530.145

В. А. Коробов. К структуре энергетического спектра в КЭД. № 872Бе-Д84. Деп. от 15.03.84. в БелНИИНТИ.

Установлена связь структуры энергетического спектра с проблемой замкнутости квантовой электродинамики. Показано, что все допущения и трудности КЭД можно устранить, если энергия физического электрона положительна при достаточно большом его импульсе.

УДК 62-50

З. М. Алейников, Л. Е. Забелло. К исследованию второй вариации функционалов вдоль траекторий дискретных систем с запаздыванием по управлению. № 875Бе-Д84. Деп. от 15.03.84. в БелНИИНТИ.

Рассматривается система

$$x(t+1) = f(x(t), u(t), u(t-h), t), t \in [t_0, t_1-1], \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0, u(t) = \varphi_0(t), t \in [t_0-h, t_0].$$

$$u(t) \in U, t \in [t_0, t_1-1], \quad (2)$$

где $x(t)$ — n -вектор; u — r -вектор; $f(x(t); u(t), u(t-h), t)$ — непрерывная, дважды дифференцируемая функция, $h > 0$ — запаздывание.

Вдоль траекторий системы (1) минимизируется функционал.

Исследуется вторая вариация функционала (3) для невырожденного случая. С помощью системы матричных рекуррентных уравнений типа Риккати получено достаточное условие положительности второй вариации. Показано, что в случае разрешимости системы рекуррентных уравнений типа Риккати вторая вариация функционала положительна.

УДК 681.142:378.95

Г. В. Ермаков. Средства отладки программ в МИХ-системе. № 876Бе-Д84. Деп. от 15.03.84. в БелНИИНТИ.

Предлагается набор средств отладки программ в МИХ-системе, ориентированной на первоначальное знакомство обучаемых с программированием на языке ассемблерного типа. Указанный набор включает слежение команд передач управлений, прокрутку выполняемой программы с распечаткой значений всех регистров, снятие профиля программы или ее части, распечатку памяти в удобном для программиста виде. Сформулированы основные принципы отладки, даны примеры использования отладочных средств, рассматриваются основные черты их реализации.

УДК 537.321:621.373

А. В. Бушман, Г. С. Романов, А. С. Сметанников. Моделирование слоистого импульсного разряда с учетом переноса энергии излучением. № 879Бе-Д84. Деп. от 16.03.84. в БелНИИНТИ.

Рассматриваются физическая модель, методика и результаты расчета слоистого импульсного разряда, представляющего собой электрический взрыв тонкой цилиндрической фольги металла. Модель явления включает нагрев твердого проводника, его плавление, нагрев жидкого проводника с учетом теплового расширения и испарение в соответствии с уравнениями состояния и проводимостью, отвечающим этим фазовым превращениям. Уравнение переноса излучения рассчитывается в двухпоточковом приближении с введением 10 спектральных групп. Конкретные расчеты проведены для разряда алюминиевой фольги в воздухе с удельной энергией 8,5 кДж/см. Показано, что учет переноса энергии излучением приводит к существенным изменениям параметров разряда и перераспределению энергии по компонентам в элементах электрической цепи.

УДК 621.327.535

Ю. П. Макаров. Новый полихроматор с телевизионной регистрацией спектра в диапазоне 400—1100 нм. № 880Бе-Д84. Деп. от 16.03.84. в БелНИИНТИ.

Проанализированы различные варианты ориентации строчки спектра на мишени телевизионной передающей трубки относительно раstra считывания. Несмотря на то, что предпочтение отдано варианту направления считывания, совпадающего с направлением дисперсии полихроматора, по техническим причинам пришлось выбрать вариант, при котором телевизионный растр считывания ложится параллельно спектральным линиям строчки. Сформулированы технические условия на разработку полихроматора, рабочая

область которого полностью перекрывает область спектральной чувствительности кремникона ЛИ-446. Рассчитана оптическая схема малогабаритного светосильного полихроматора, комплектуемого прозрачной дифракционной решеткой и линзовой оптикой. Описаны конструкция и техническое исполнение прибора, пристыкованного к серийной телевизионной передающей камере КТП-39, приведены оценки его разрешающей способности. С учетом того, что динамический диапазон кремникона по освещенности не превышает одного порядка и реальная разрешающая сила полихроматора не обеспечивается линейным разрешением кремникона, сделан вывод о целесообразности применения телевизионной регистрации только в случае исследования спектров быстроизменяющихся световых процессов.

УДК 517.926.45

Т. Л. Сурни. **Инварианты некоторых специальных возмущений линейных дифференциальных систем.** № 892Бе-Д84, Деп. от 18.06.84. в БелНИИНТИ.

Исследуется влияние φ - и A -возмущений на инварианты линейных дифференциальных систем Лапко-Данилевского

$$\dot{x} = P(t)x. \quad (1)$$

Установлены достаточные условия совпадения показателей системы (1) и систем

$$\dot{y} = \varphi(t)P(t)y \quad (2), \quad \dot{z} = A(t)P(t)z \quad (3),$$

а также достаточные условия сохранения свойств приводимости и правильности системы (1) при φ - и A -возмущениях.

УДК 533.6.011.6:535.1

И. М. Козлов, Г. С. Романов. **Динамика излучающего плазменного облака, возникшего при мгновенном энерговыделении у твердой поверхности.** № 893Бе-Д84, Деп. от 18.06.84. в БелНИИНТИ.

Получено численное решение двумерной нестационарной радиационно-газодинамической задачи о лучистом охлаждении и разлете плазменного облака у твердой поверхности в воздухе. Перенос излучения рассматривается в диффузионном приближении, для решения соответствующих разностных уравнений используется алгоритм « α — β итераций». Рассмотрен вопрос о граничных условиях для уравнений переноса излучения на внешних, прозрачных для излучения границах расчетной области. Уравнения газовой динамики решаются в эйлеровой цилиндрической системе координат по методу «крупных частиц». Конкретные расчеты с табличным заданием термодинамических функций и усредненных по Росселанду пробегов излучения в воздухе выполнены для случая источника энерговыделения $E = 10^{11}$ эрг на расстоянии 2,5 см от поверхности при нормальной плотности воздуха. Динамика процессов прослежена до времени $\sim 10^{-4}$ с. Определены доля энергии, высвечиваемая в окружающее пространство, а также радиационные потоки, поглощаемые поверхностью преграды.

УДК 537.22

М. Ольшовы. **Изменение структуры поверхности пленочных полимеров после облучения ускоренными ионами.** № 896Бе-Д84, Деп. от 18.06.84. в БелНИИНТИ.

Исследовано изменение структуры поверхности полимерных пленок из ПТФЭ и ПЭТФ после облучения ускоренными положительными ионами кислорода и висмута. Облучение проводилось с целью получения ионноимплантированных полимерных электретов. На поверхности электретов обнаружено образование ямок микронных размеров. Обсуждаются возможные причины изменения структуры облученных поверхностей.

УДК 620.17:620.183

В. Г. Шепелевич, А. Барн. **Гомогенизация сплава Bi — 8 ат. % Sb** № 897Бе-Д84, Деп. от 18.06.84. в БелНИИНТИ.

Проведены металлографические исследования и механические испытания дендритных поликристаллов сплава Bi — 8 ат. % Sb. Установлено, что время гомогенизации при 538 К составляет 15 ч. Исчезновение дендритной структуры при отжиге не вызывает изменения предела прочности, модуля Юнга и твердости по Виккерсу, но уменьшает относительное укорочение сплава Bi — 8 ат. % Sb.

УДК 681.326.32

В. И. Акимов, И. С. Вайнилович, А. И. Крюков, В. Ф. Ранчинский. Быстродействующий микропрограммный автомат. № 898Бе-Д84. Деп. от 18.06.84. в БелНИИНТИ.

Рассмотрено применение в микропрограммных автоматах принципа совмещения по выборке. Проанализированы причины, по которым этот принцип не нашел широкого применения. Показана эффективность его применения.

УДК 681.3.072.3

И. С. Вайнилович, В. И. Акимов, А. И. Крюков, В. Ф. Ранчинский. Организация высокоскоростного канала ввода — вывода мини-ЭВМ. № 899Бе-Д84. Деп. от 18.06.84. в БелНИИНТИ.

Приведены структура и принципы работы канала с пропускной способностью 12 Мбайт/с. Высокая эффективность канала достигнута за счет применения блочной передачи данных при использовании расслоения оперативной памяти.

УДК 681.3.06

Г. Я. Лейтес, Ф. С. Пилиповец, Э. С. Рабинович. Об одном языке запросов для диалоговой информационно-справочной системы. № 900Бе-Д84. Деп. от 18.06.84. в БелНИИНТИ.

Предлагается язык запросов, характеризующийся простотой синтаксической структуры при достаточной семантической выразительности. Приводится схема организации диалога в информационно-справочной системе, использующей реляционную модель базы данных.

УДК 621.382.82.001

С. Г. Мулярчик, В. Г. Соловьев. Входной язык программ физико-структурного моделирования. № 901Бе-Д84. Деп. от 18.06.84. в БелНИИНТИ.

Рассматриваются вопросы разработки входного языка описания структур произвольной конфигурации. Предлагается язык, который благодаря использованию ключевого способа записи параметров позволяет легко дополнить и корректировать текст описания. Описаны конструкции языка, его алфавит и синтаксис. Приводятся структура внутреннего представления информации и характеристики транслятора.

РЕФЕРАТЫ

УДК 621.372.8

Титов А. Д., Хапалюк А. П. Гибридные направляемые моды асимметричного плоского прозрачного волновода.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 2.

Исследованы гибридные собственные и несобственные направляемые EH-моды асимметричного плоского диэлектрического волновода в случае прозрачности волноведущей сердцевинны, подложки и покрытия. Показано, что такие моды реализуются только при скользющем затухании или скользщем распространении плоских неоднородных волн и являются поверхностными волнами.

Библ. 13 назв., ил. 2.

УДК 548.0539

Барышевский В. Г., Метелица О. Н. Угловые распределения γ -квантов распада позитрония в магнитном поле.— Вестн. Белорусского ун-та, Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 2.

Найдено временное распределение γ -квантов, образованных при трехфотонном распаде позитрония в магнитном поле произвольной по отношению к сверхтонкому расщеплению уровней величины. Исследованы затухающие биения углового распределения γ -квантов. Получено сечение процесса при различной геометрии эксперимента.

Библ. 7 назв.

УДК 681.3

Ямный В. Е., Нгуен Данг Куанг. Исследование диэлектрической абсорбции конденсаторов.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 2.

Предложена и обоснована методика измерения параметров эквивалентной схемы конденсатора, учитывающей абсорбцию диэлектрика. Описана установка и проведены исследования наиболее употребляемых типов конденсаторов, позволяющие оценивать возможную ошибку работы аналоговых запоминающих устройств, вызванную диэлектрической абсорбцией накопительного конденсатора.

Библ. 1 назв., ил. 2, табл. 1.

УДК 539.186

Комаров А. Ф. Деканализирование ультрарелятивистских электронов в толстых кристаллах при аксиальном канализировании.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 2.

На основе решения кинетического уравнения типа Фоккера — Планка исследуется динамика движения ультрарелятивистских электронов в режиме аксиального канализирования. Проведено исследование функции деканализирования в зависимости от типа кристалла, энергии частиц, типа канала, угла влета в кристалл и температуры кристалла.

Библ. 7 назв., ил. 3.

УДК 621.382.002.621.785.3

Горушко В. А., Николаеня А. З., Пилипенко В. А., Сержанов Н. И., Чигирь Г. Г. Влияние импульсной оптической обработки на параметры диэлектрических пленок.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 2.

Приводятся результаты исследований влияния импульсной оптической обработки на свойства диэлектрических пленок. Показано, что оптический отжиг позволяет увеличить плотность диэлектрических пленок, улучшить их стехиометрию и электрофизические свойства, а также состояние границы раздела диэлектрик — полупроводник.

Библ. 3 назв., ил. 2, табл. 4.

УДК 535.37

Миксюк Ю. И., Гулис И. М., Горбачевич С. К. Двухканальный импульсный наносекундный лазерный флуорометр.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 2.

Описан простой, удобный в эксплуатации флуорометр, использующий в качестве источника возбуждения импульсный азотный лазер ($\lambda_{ген} = 337$ нм), работающий в частотном режиме и позволяющий с помощью стробоскопической аппаратуры за короткое время регистрировать спектрально-временные характеристики флуоресценции в наносекундном диапазоне. Использование «канала сравнения» позволило свести к минимуму ошибки, обусловленные медленными флуктуациями во времени интенсивности лазерного излучения.

Библ. 11, ил. 2.

УДК 535.37

Шалаховская Г. В., Бойков В. Н., Красовский А. Н., Умрейко Д. С. **Формирование линий низкотемпературных спектров люминесценции ураниловых соединений.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 2.

На примере кристаллов нитратов и хлоридов уранила в диапазоне температур 4—120 К экспериментально прослеживаются и анализируются различия полуширин и контуров флуоресцентных линий, соответствующих переходам на подуровни энергии v_1 и v_3 иона UO_2 . При гелиевых температурах вместе с сужением линий при увеличении колебательного квантового числа обнаружено постепенное обособление и отделение от линии более протяженного длинноволнового крыла, интерпретированного как фонное. Обсуждается влияние несовершенства кристаллов и резонансного межмолекулярного взаимодействия на форму линий. Для линии 17573 см^{-1} в спектре $CsUO_2(NO_3)_3$ в диапазоне 4—50 К проведено сопоставление сдвига и уширения с выводами теории Кривоглаза — Маккамбера.

Библ. 12 назв., ил. 3, табл. 1.

УДК 530.145.7.539.182

Лавренов А. Н., Трофименко Е. Е. **О применении метода преобразования Лапласа к возмущенному уравнению Шредингера для 1s-состояния водородоподобного атома.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 2.

Методом преобразования Лапласа найдена поправочная волновая функция в первом порядке теории возмущений по сферически-симметричному оператору возмущения для 1s-состояния водородоподобных атомов. С ее помощью рассмотрено влияние конечных размеров ядра на величину магнитного момента связанного лептона в легких атомах.

Библ. 6 назв.

УДК 681.518.3

Демчук М. И., Денисенко В. Н., Иванов М. А., Сильнов Л. В. **Универсальная измерительная система для анализа двух случайных потоков импульсов.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 2.

Описана универсальная система, пригодная для измерения времени прихода импульсов или получения до десяти выборок амплитуды сигнала в каждом из двух каналов. Рассмотрены основные режимы работы, среди них — анализ перекрывающихся потоков импульсов, характерных, например, для радиолюминесценции.

Библ. 9 назв., ил. 2, табл. 1.

УДК 548.0:532.783

Абдулин А. З., Комяк А. И., Муравский А. А., Минько А. А., Рачкевич В. С. **Оптические свойства закрученных нематических слоев.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 2.

Рассмотрено прохождение света через жидкокристаллическую твист-ячейку с планарно ориентированным нематическим жидким кристаллом. Проанализировано влияние азимута поляризации и длины волны падающего света, а также толщины образца и концентрации хиральной добавки на контрастные характеристики ячейки. Предложены методы оптимизации параметров жидкокристаллических твист-ячеек.

Библ. 10 назв., ил. 2.

УДК 532.22:519.6

Полевиков В. К., Денисенко В. М. **Численное исследование равновесных форм капли, вращающейся в гравитационном поле.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 2.

Численно решена осесимметричная задача о равновесных формах капли жидкости, помещенной на вращающуюся плоскость в поле сил тяжести. Для решения задачи применен новый итерационно-разностный подход. Угол смачивания α варьировался от 20° до 170° , число Бонда Bo изменялось в диапазоне $0 \leq Bo \leq 10^4$. Изучено влияние осесимметричных возмущений на устойчивость равновесия. Построена эмпирическая формула зависимости безразмерной критической скорости вращения от безразмерного объема $Bo^{3/2}$ и угла α .

Библ. 6 назв., ил. 2, табл. 1.

УДК 62-50:519.2

Малюгин В. И. **Об оценивании плотности вероятностей случайных векторов с существенно зависимыми компонентами.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 2.

При использовании оценки Розенблатта — Парзена с гауссовским ядром для оценивания плотности вероятностей случайных векторов с существенно зависимыми ком-

понентами по выборке ограниченного объема возникает проблема выбора ковариационной матрицы ядра. В работе исследуются оценка плотности с фиксированным ядром, а также модифицированная оценка, использующая в качестве ковариационной матрицы ядра и коэффициентов размытости специально построенные статистики. Для этих оценок получены асимптотические разложения двух мер точности. Показано, что использование модифицированной оценки предпочтительнее.

Библ. 7 назв.

УДК 519.10

Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. Алгоритм решения линейной экстремальной задачи с континуумом ограничений.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 2.

Для решения линейной задачи строится алгоритм поиска конечномерного оптимального плана, удовлетворяющего континууму ограничений, заданных с помощью линейных стационарных дифференциальных уравнений.

Библ. 1 назв.

УДК 517.948.32

Забелло И. Н. О разрешимости системы интегральных уравнений с логарифмическим ядром и постоянными коэффициентами.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 2.

Получены необходимые и достаточные условия разрешимости и существования единственного решения для системы интегральных уравнений с логарифмическим ядром и постоянными коэффициентами в случае, когда матрица $(A-B)^{-1}$ имеет простую структуру.

Библ. 4 назв.

УДК 519.1

Вальк М. Обобщенные потоки и напряжения на графах.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 2.

Исследуется структура пространств обобщенных потоков и напряжений в банаховых пространствах.

Библ. 7 назв.

УДК 62-50

Забелло Л. Е. Об управлении показателем Ляпунова в линейных непрерывных нестационарных системах.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 2.

Рассматривается задача управляемости старшим верхним показателем Ляпунова. Устанавливается связь между решением указанной задачи и задачей полной управляемости в дискретной и непрерывной системах. В качестве управления используются дискретные регуляторы.

Библ. 6 назв.

УДК 537.311.33

Прокошин В. И., Шепелевич В. Г. Термическая стабильность деформированных сплавов висмут — сурьма.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 2.

Методом изохронного отжига деформированных сплавов висмут — сурьма, содержащих 4—20 ат. % Sb, выявлено три этапа восстановления удельного электросопротивления. Предполагается, что на первом этапе происходит отжиг дефектов типа вакансионных скоплений, а на втором и третьем этапах — полигонизационные и рекристаллизационные процессы соответственно.

Библ. 5 назв., ил. 1.

УДК 517.977

Будько О. Н. Одно достаточное условие сильной положительности второй вариации для непрерывной системы с запаздыванием по управлению.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 2.

Получено одно достаточное условие сильной положительности второй вариации для непрерывной системы с запаздыванием по управлению, связанное с разрешимостью системы матричных дифференциальных уравнений Риккати.

Библ. 5 назв.

УДК 681.322.06

Черников Г. Н., Шпаковский Г. И. О возможности использования перемешивания в задачах изоморфизма.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 2.

Рассматривается способ ускорения операции установления изоморфизма двух структур топологическими методами при помощи перемешивания (хеширования). Приводится оценка выигрыша во времени выполнения для некоторого класса графов.

Библ. 8 назв.

УДК 517.925

Кесси А. Уравнения с неподвижными критическими особыми точками вида $\omega'^m = P_{2m}(z, \omega)$ и их интегрирование.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат., мех., 1985, № 2.

Найдены и проинтегрированы дифференциальные уравнения вида $\omega'^m = P_{2m}(z, \omega)$, где P_{2m} полином от ω степени не больше $2m$ и аналитическая функция от z , решения которых не имеют подвижных критических точек.

Библ. 2 назв.

УДК 519.872

Дудин А. Н. Об одной ненадежной системе массового обслуживания с изменяемой скоростью входящего потока.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 2.

Получена производящая функция стационарного распределения ненадежной системы массового обслуживания с произвольным распределением времен обслуживания и ремонта и скоростью входящего потока, зависящей от исправности прибора.

Библ. 2 назв.

УДК 519.21

Лазакевич Н. В. Асимптотические разложения в интегральных предельных теоремах для сумм независимых k -решетчатых случайных векторов.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех. 1985, № 2.

Построено асимптотическое разложение, исследованы достаточные условия и оценка остаточного члена в интегральной предельной теореме для сумм независимых k -решетчатых случайных векторов со значениями из R^h .

Библ. 4 назв.

УДК 513.83

Тимохович В. Л. o -Метрики с условием (сК).— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 2.

Рассматриваются o -метрики с условием (сК) (слабое условие Коши). Показывается, что для регулярных пространств наличие o -метрики с (сК) влечет наличие симметрии с (сК).

Библ. 5 назв.

95 коп.

Индекс 74851