

# ВЕСТНИК

*Белорусского государственного  
университета имени В. И. Ленина*

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с 1969 года  
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ I

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

№ 1  
ЯНВАРЬ

# СОДЕРЖАНИЕ

## ФИЗИКА

<i>Барышевский В. Г., Чан Ван.</i> Ковариантное описание оптической анизотропии вещества с поляризованными ядрами	3
<i>Буров Л. И., Гончаренок И. И.</i> Эффекты наведенной анизотропии в средах с двойным оптическим резонансом	5
<i>Онищенко Н. С.</i> Расчет кубических членов электрической и магнитной поляризации среды с учетом электрического квадрупольного и магнитного дипольного моментов	9
<i>Квеу Хак Туан.</i> Электронные спектры поглощения и устойчивость борсодержащих органических комплексов в растворах	12
<i>Анишаков О. М., Гурачевский В. Л., Машлан М., Холмецкий А. Л., Чудаков В. А.</i> Мёссбауэровский толщиномер защитных покрытий	15
<i>Патек М., Халалюк А. П.</i> Открытый резонатор с периодически расположенными линзами	19
<i>Зайцева А. М.</i> Ядерное рассеяние быстрых нейтронов кристаллами	24
<i>Абдулин А. З., Гумен А. А., Последович Н. Р., Ткаченко В. М.</i> Моделирование дифракции света на многомерных структурах с помощью жидких кристаллов	26

## МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

<i>Дан Динь Куанг.</i> Оценка степени достоверности гипотез о функциональных закономерностях в булевом пространстве признаков	29
<i>Кирилица В. П.</i> Об одной задаче линейного стохастического программирования с двусторонними ограничениями	33
<i>Струсович В. А.</i> Задача трех станков: достаточное условие сводимости в выпуклой форме	36
<i>Труш Н. Н.</i> Статистические характеристики непрерывного стационарного случайного процесса и их свойства	39
<i>Митюшев В. В.</i> О линейном функциональном уравнении в классе аналитических функций	44
<i>Прохорова Р. А., Компель В. Г.</i> Показатели решений квазилинейной системы	47
<i>Лобач В. И.</i> Об одном подходе к решению задачи управления частично наблюдаемым случайным процессом	51
<i>Шилин А. П.</i> Интегральные уравнения типа свертки, сводящиеся к задачам Гильберта	54
<i>Ковалев А. А., Малышко В. В.</i> Экспериментальное исследование трудоемкости алгоритмов установления изоморфизма орграфов	57
<i>Ширяев В. М.</i> Полурешетки с полудистрибутивными решетками подполурешеток	61
<i>Жоровина Т. Н.</i> Обобщенная задача Римана с постоянными коэффициентами на торе	64

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

<i>Кастрица О. А.</i> О построении интерполяционных формул для матричной функции	68
<i>Хацкевич Г. А.</i> Об адаптивной идентификации параметров многомерных стохастических линейных систем	70

## НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Евгений Алексеевич Иванов (К 60-летию со дня рождения)	72
Геннадий Алексеевич Медведев (К 50-летию со дня рождения)	73
Станислав Станиславович Шушкевич (К 50-летию со дня рождения)	74

УДК 539.12.04

В. Г. БАРЫШЕВСКИЙ, ЧАН ВАН

## КОВАРИАНТНОЕ ОПИСАНИЕ ОПТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ ВЕЩЕСТВА С ПОЛЯРИЗОВАННЫМИ ЯДРАМИ

В работах [1, 2] показано, что вещество с поляризованными ядрами обладает ярко выраженными свойствами оптической анизотропии в  $\gamma$ -диапазоне (двойным лучепреломлением, гиротропией, дихроизмом). Как подчеркнуто в [2], наиболее полное описание оптических свойств в этом случае может быть дано бескоординатными (ковариантными) методами, развитыми Ф. И. Федоровым [3].

Тензор диэлектрической проницаемости в случае вещества с поляризованными ядрами найден в [1, 2]:

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + \frac{4\pi c^2}{\omega^2} \sum_{\alpha, a_g} \rho_{\alpha} W_{\alpha}(a_g) f_{ij}^{\alpha}(a_g), \quad (1)$$

где  $\omega$  — частота  $\gamma$ -кванта;  $c$  — скорость света;  $\rho_{\alpha}$  — число ядер сорта  $\alpha$  в единице объема;  $W_{\alpha}(a_g)$  — вероятность нахождения ядра  $\alpha$  на подуровне основного состояния  $a_g$ ;  $f_{ij}^{\alpha}(a_g)$  — амплитуда упругого когерентного рассеяния  $\gamma$ -кванта на ядре типа  $\alpha$  на угол ноль. Используя явные выражения для матричных элементов, определяющих амплитуду  $f$  (см., например, [4]), можно записать (1) в следующем виде:

$$\epsilon(\bar{K}, \omega) = 1 + 4\pi\chi_e - \frac{4\pi}{c^2\bar{K}^2} \sum_{\alpha, a_e, a_g} f_{\text{мессб}}^{\alpha}(\bar{K}) \rho_{\alpha} W_{\alpha}(a_g) \frac{\bar{J}_{a_g a_e}^{(\alpha)}(\bar{K}) \cdot \bar{J}_{a_g a_e}^{(\alpha)*}(\bar{K})}{E_K - E_{R\alpha}^{a_e a_g} + \frac{i\Gamma_{\alpha}}{2}}, \quad (2)$$

где  $\chi_e$  — восприимчивость, обусловленная электронами;  $\bar{K}$  — волновой вектор  $\gamma$ -кванта;  $\omega$  — его частота;  $f_{\text{мессб}}^{\alpha}(\bar{K})$  — фактор Лэмба-Мёссбауэра ядра типа  $\alpha$ ,  $J_{a_e a_g}^{(\alpha)}(\bar{K})$  — матричный элемент тока перехода в импульсном представлении между основным  $|a_g\rangle$  и возбужденным  $|a_e\rangle$  состояниями  $\alpha$  ядра,  $E_{R\alpha}^{a_e a_g}$  — разность энергетических уровней  $\alpha$  ядра в состояниях  $|a_g\rangle$  и  $|a_e\rangle$ ;  $E_K$  — энергия  $\gamma$ -кванта;  $\Gamma_{\alpha}$  — полная ширина возбужденного уровня.

В случае аксиально симметричного сверхтонкого взаимодействия ядра с окружением имеем  $|a_g\rangle = |m_g\rangle$ ,  $|a_e\rangle = |m_e\rangle$ , где  $m_g$  — магнитное квантовое число ядра в основном состоянии;  $m_e$  — то же в возбужденном состоянии. Если при этом мишень неполяризована и все ядра

одинаковы, то  $W_{\alpha}(a_g) = \frac{1}{2I_g + 1} (I_g$  — величина спина основного состояния ядра) и (2) сводится к выражению, приведенному в [4].

Для анализа эффектов оптической анизотропии, обусловленных поляризацией ядер мишени, так же как и в [4], запишем векторы  $\bar{J}_{m_g m_e}(\bar{K})$  в системе координат, связанной с кристаллом. Например, если сверхтонкое взаимодействие является аксиально симметричным, то, согласно [4],

$$\begin{aligned} J_{m_g m_e}(\bar{K}) = & 4\pi c \sum_{\lambda} \sum_{l, m} \sum_L i^{L+l} (-1)^{L+l} I_{\max} - I_e - L + \\ & + l \frac{\langle I_g \parallel LL \parallel I_e \rangle}{\sqrt{2I_e + 1}} \langle I_g m_g LM | I_e m_e \rangle \langle 1 \lambda m | LM \rangle Y_{lm} \left( \frac{\bar{K}}{K} \right) \bar{h}_l, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\bar{h}_\lambda$  — сферические орты системы осей сверхтонкого взаимодействия. Проведя вычисления, аналогичные известным для неполяризованной мишени [4], мы можем, в случае электрических дипольных переходов, записать диэлектрическую проницаемость в виде

$$\bar{\epsilon} = 1 + \sum_{\alpha} \alpha_{0\alpha} + \sum_{\alpha} \beta_{\alpha} \bar{c}_{\alpha} \cdot \bar{c}_{\alpha}^* + \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \bar{c}_{\alpha}^* \cdot \bar{c}_{\alpha}, \quad (4)$$

где по определению  $\bar{c}_{\alpha} = \bar{h}_{1\alpha}$ ,  $\bar{c}_{\alpha}^* = \bar{h}_{-1\alpha}$ ,  $\bar{c}_{1\alpha} = \bar{h}_{0\alpha}$ ,  $\bar{c}_{\alpha} \cdot \bar{c}_{\alpha}^* + \bar{c}_{\alpha}^* \cdot \bar{c}_{\alpha} - \bar{c}_{1\alpha} \times \times \bar{c}_{1\alpha} = 1$ ,  $\beta_{\alpha} = \alpha_{1\alpha} - \alpha_{0\alpha}$ ,  $\gamma_{\alpha} = \alpha_{-1\alpha} - \alpha_{0\alpha}$ ,

$$\alpha_{M\alpha} = - \frac{4\pi \Gamma_{\gamma} \rho_{\alpha}}{K^2} \frac{3}{4} f_{\text{мессб}}^{\alpha}(\bar{K}) \sum_{m_e m_g} \frac{W_{\alpha}(m_g) |\langle I_g m_g LM | I_e m_e \rangle|^2}{E_K - E_{R\alpha}^{m_e m_g} + \frac{i\Gamma_{\alpha}}{2}}; \quad (5)$$

$\bar{h}_{i\alpha}$  — сферические орты сверхтонкого взаимодействия на ядре типа  $\alpha$ .

Важнейшие отличия (4), (5) от соответствующего выражения, полученного в [4], состоят в том, что и в отсутствие сверхтонкого взаимодействия (или же в случае, когда ширина линии  $\Gamma$  много больше сверхтонкого расщепления  $\Delta E$ ), сохраняется гиротропия среды. Выражение (5), учитывающее влияние сверхтонкого взаимодействия на оптическую анизотропию поляризованного вещества при  $\Gamma \gg \Delta E$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha_{M\alpha} = & - \frac{4\pi \rho_{\alpha} \Gamma_{\gamma}}{K^2} \frac{3}{4} f_{\text{мессб}}^{\alpha}(\bar{K}) \frac{\sum_{m_e m_g} W_{\alpha}(m_g) |\langle I_g m_g LM | I_e m_e \rangle|^2}{E_K - E_{0\alpha} + \frac{i\Gamma_{\alpha}}{2}} + \\ & + \frac{4\pi \rho_{\alpha} \Gamma_{\gamma}}{K^2} \frac{3}{4} f_{\text{мессб}}^{\alpha}(\bar{K}) \frac{\sum_{m_e m_g} W_{\alpha}(m_g) (E_{R\alpha}^{m_e m_g} - E_{0\alpha}^{\alpha}) |\langle I_g m_g LM | I_e m_e \rangle|^2}{(E_K - E_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $E_0$  — разность энергии возбужденного и основного состояний в отсутствие расщепления.

Таким образом, в случае поляризованных мишеней даже при  $\Gamma \gg \Delta E$  оптическая анизотропия имеет место.

Важно отметить, что вероятности заселенности подуровней основного состояния  $W_{\alpha}(m_g)$  существенно зависят от способа поляризации вещества. Если поляризация ядер достигается путем охлаждения, например, в рефрижераторах растворения  ${}^3\text{He} \div {}^4\text{He}$ , то ядра будут распределены по подуровням в соответствии с больцмановским законом. Если же ядра поляризуются при помощи метода динамической ориентации, то  $W_{\alpha}(m_g)$  будет зависеть от внешних полей, вызывающих динамическую ориентацию, и могут легко изменяться при варьировании параметров этих полей.

Пусть все ядра одинаковы и находятся в одинаковых условиях. Если охлаждение происходит во внешнем магнитном поле, то заселенности всех подуровней разные, параметры  $\beta$  и  $\gamma$  не равны друг другу. Среда может вращать плоскость поляризации  $\gamma$ -кванта, в ней возможен также эффект двойного лучепреломления. Если же охлаждение происходит в аксиально симметричном неоднородном электрическом поле в отсутствие магнитного поля, то заселенность подуровней с разными знаками  $m_g$  одинакова. Как следствие  $\beta = \gamma$  и

$$\epsilon = 1 + \alpha_0 + \beta (\bar{c} \cdot \bar{c}^* + \bar{c}^* \cdot \bar{c}) = 1 + \alpha_0 + \beta (1 + \bar{c}_1 \cdot \bar{c}_1) = 1 + \alpha_0 + \beta + \beta \bar{c}_1 \cdot \bar{c}_1. \quad (7)$$

Согласно (5), в этом случае вещество обладает только двойным лучепреломлением и является одноосным. Если же ядра находятся в неодинаковых условиях, например, в кристалле в разных узлах кристаллической ячейки на них действуют различные сверхтонкие взаимодействия, то из (4) вытекает, что при помощи выбора первичной поляризации фотона и направления его падения можно разделять вклады в  $\epsilon$ , обусловленные разными ядрами.

Рассмотрим магнитный дипольный переход. Анализ, аналогичный приведенному, позволяет записать диэлектрическую проницаемость в виде (сравн. со случаем неполяризованной среды [4])

$$\hat{\epsilon}(\bar{K}) = 1 + \sum_{M\alpha} a_{M\alpha} m^{\times} \bar{h}_M^{\alpha} (\bar{h}_{MM}^{\alpha})^{\times*}, \quad (8)$$

где  $\bar{m} = \frac{\bar{K}}{K}$ . Согласно [4], выражение (7) означает, что мы можем ввести магнитную проницаемость среды

$$\hat{\mu} = 1 + \sum_{\alpha} a_{1\alpha} \bar{c}_{\alpha} \cdot \bar{c}_{\alpha}^* + \sum_{\alpha} a_{-1\alpha} \bar{c}_{\alpha} \cdot \bar{c}_{\alpha} + \sum_{\alpha} a_{0M} \bar{c}_{0\alpha} \cdot \bar{c}_{1\alpha}. \quad (9)$$

При этом  $\epsilon = 1$ .

Важно отметить, что в случае поляризованных ядер отличное от единицы значение  $\mu$  может быть получено в отсутствие каких-либо внешних полей.

Приведем также выражение для диэлектрической проницаемости в случае квадрупольных переходов в поляризованных ядрах

$$\hat{\epsilon} = 1 + \sum_{M\alpha} A_{\alpha}(M) (\bar{m} : \hat{Q}_{\alpha}^{(2)}(M)) \cdot (\hat{Q}_{\alpha}^{(2)}(M) : \bar{m})^*, \quad (10)$$

где

$$A(M) = -\frac{10\pi}{K^3} \Gamma_{\nu} \rho_{\alpha} f_{\text{мессб}}^{\alpha}(\bar{K}) \sum_{m_e m_g} \frac{W_{\alpha}(m_g) | \langle I_g m_g L M | I_e m_e \rangle |^2}{E_K - E_{R\alpha}^{m_e m_g} + \frac{i\Gamma_{\alpha}}{2}}. \quad (11)$$

Тензоры  $\hat{Q}_{\alpha}^{(2)}(M)$  в диадном виде приведены в [4]. Среда и вращает плоскость поляризации и вызывает двулучепреломление. Если ядра неполяризованы и все одинаковы, то  $W(m_g) = \frac{1}{2I_g + 1}$  и (10) совпадает с соответствующими выражениями, полученными в [4].

Диэлектрическая проницаемость поляризованной среды в более общем случае смешанных переходов и произвольной симметрии полей, действующих на ядро, будет исследована отдельно.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Барышевский В. Г.— ЯФ, 1966, т. 4, вып. 5, с. 1045.
2. Барышевский В. Г. Ядерная оптика поляризованных сред.— Минск, 1976.
3. Федоров Ф. И. Теория гиротропии.— Минск, 1976.
4. Андреева М. А., Кузьмин Р. Н. Мёсбауэровская гамма-оптика.— М., 1982.

УДК 535.5

Л. И. БУРОВ, И. И. ГОНЧЕРЕНКО

### ЭФФЕКТЫ НАВЕДЕННОЙ АНИЗОТРОПИИ В СРЕДАХ С ДВОЙНЫМ ОПТИЧЕСКИМ РЕЗОНАНСОМ

Развитие методов нелинейной поляризационной спектроскопии связано с возможностями получения качественно новой информации об исследуемой системе [1—3]. Применительно к трехуровневым квантовым

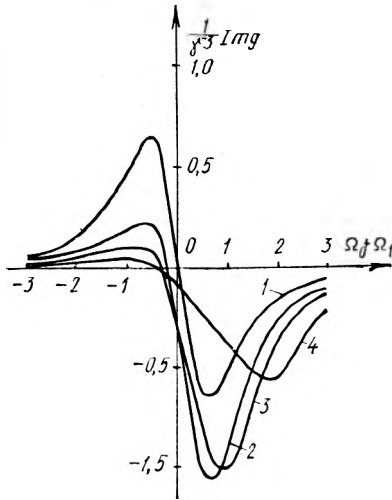


Рис. 1. Зависимость  $\text{Im}\chi$  от расстройки двухфотонного резонанса  $\Omega_0 + \Omega_1$  для некоторых значений расстройки сильного поля  $\Omega_0$  в приближении  $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma$ .  $\Omega_0 = 0$  (1);  $-0,5$  (2);  $-1$  (3);  $-2$  (4)

системам продуктивность этих методов продемонстрирована в области комбинационного рассеяния [2]. Аналогичная ситуация должна наблюдаться и для ступенчатого возбуждения, что частично подтверждают результаты работы [4]. Однако в последнем случае интерпретация полученных зависимостей не может быть проведена непосредственно на основании теории [2] несмотря на сходство процессов, а требует самостоятельного теоретического анализа, что и является целью настоящей работы.

Итак, пусть две монохроматические поляризованные световые волны с частотами  $\omega_0$  и  $\omega_1$  и векторами поляризации  $\underline{\epsilon}_0$  и  $\underline{\epsilon}_1$  распространяются в изотропной среде. Будем считать, что каждая из волн резонансна некоторому (и только одному) спектральному переходу с расстройками частот  $\Delta\omega_0$  и  $\Delta\omega_1$  соответственно, причем эти переходы связаны через общий уровень так, что реализуется ступенчатый переход.

Можно показать, что и при лэмбовской схеме уровней [5], и в том случае, когда нижний уровень является основным [6], результаты для нелинейной поляризации среды будут аналогичными. В рамках обычной для нелинейной спектроскопии схемы (слабый пробный поток в сильном световом поле) в приближении слабого насыщения вектор нелинейной поляризации на частоте пробного поля  $\omega_1$  (поле на частоте  $\omega_0$  предполагается сильным) может быть представлено в виде

$$\underline{P}^{NL}(\omega_1) = -i \frac{\Delta N_1^0}{\hbar^3} g |E_0|^2 c_0 (1 + c_1 \underline{\epsilon}_0 \underline{\epsilon}_0^* + c_2 \underline{\epsilon}_0^* \underline{\epsilon}_0) \underline{E}_1, \quad (1)$$

где  $\underline{E}_k$  — амплитуда соответствующего поля ( $k=0, 1$ ),  $\Delta N_1^0$  — разность начальных населенностей в канале частоты  $\omega_1$  в расчете на единицу объема,

$$g = \frac{1}{\gamma_1 + i\Delta\omega_1} \left( \frac{1}{[\gamma + i(\Delta\omega_0 + \Delta\omega_1)][\gamma_0 + i\Delta\omega_0]} + \frac{2\gamma_0}{\gamma_b [\gamma_0^2 + (\Delta\omega_0)^2]} \right), \quad (2)$$

$\gamma_k$  — спектральная ширина перехода на частоте  $\omega_k$ ;  $\gamma$  — спектральная ширина перехода на частоте  $\omega_0 + \omega_1$ ;  $\gamma_b$  — константа релаксации промежуточного уровня. Параметры  $c_0, c_1, c_2$  зависят от природы дипольных моментов переходов и определяются следующим образом.

### 1. Постоянный дипольный момент.

$$c_0 = \frac{1}{30} (-A_1 - A_2 + 4A_3); \quad c_1 = \frac{-A_1 + 4A_2 - A_3}{30c_0}; \quad c_2 = \frac{4A_1 - A_2 - A_3}{30c_0};$$

$$A_1 = |\underline{\mu}_0 \underline{\mu}_1|^2; \quad A_2 = |\underline{\mu}_0 \underline{\mu}_1^*|^2; \quad A_3 = |\underline{\mu}_0|^2 |\underline{\mu}_1|^2; \quad (3)$$

$\underline{\mu}_k$  — дипольный момент перехода на частоте  $\omega_k$ .

### 2. Индуцированный дипольный момент.

$$c_0 = \frac{1}{2} |\underline{\mu}_0|^2 |\underline{\mu}_1|^2 (-1)^{I_a - I_c} (W^2(2) + W^2(1));$$

$$c_1 = \frac{W^2(2) - W^2(1)}{W^2(2) + W^2(1)}; \quad c_2 = \frac{W^2(0) - W^2(2)}{W^2(2) + W^2(1)}, \quad (4)$$

где  $W(k) \equiv W(11j_a, j_c, kj_b)$  — коэффициенты Рака,  $j_a$ ,  $j_b$  и  $j_c$  — полные моменты нижнего, промежуточного и верхнего состояний соответственно.

Из выражения (1) следует, что структура наведенной в среде анизотропии описывается тензором

$$s = 1 + c_1 \underline{\underline{\varepsilon}}_0^* + c_2 \underline{\underline{\varepsilon}}_0^* \quad (5)$$

который является тензором более общего вида, чем соответствующий тензор, описывающий естественную анизотропию кристаллов [7]. Не останавливаясь детально на исследовании свойств тензора  $s$ , отметим лишь, что в силу вещественности параметров  $c_1$  и  $c_2$  этот тензор эрмитов. Кроме того, в приближении слабого насыщения поляризация сильного поля не изменяется и тензор  $s$  остается постоянным. В этом случае для описания эволюции пробной волны могут быть использованы методы классической кристаллооптики. В случае совпадения волновых векторов обеих волн и пренебрежения комбинационной волной решение для слабого поля можно представить в следующем виде:

$$\underline{\underline{E}}_1(z) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma_1 z\right) (G_+ \exp[\lambda_+ g B(z)] + G_- \exp[\lambda_- g B(z)]) \underline{\underline{E}}_1(0), \quad (6)$$

где  $\sigma_k$  — коэффициент линейных потерь на частоте  $\omega_k$ ,  $\lambda_{\pm}$  и  $G_{\pm}$  — собственные значения и соответствующие проективные операторы тензора  $s$ ,

$$B(z) = 2\pi \frac{\omega_1}{cn_1} \frac{\Delta N_1^0}{\bar{n}^3} |\underline{\underline{E}}_0(0)|^2 \frac{c_0}{\sigma_0} [1 - \exp(-\sigma_0 z)]. \quad (7)$$

Для последующего анализа примем условия, наиболее широко распространенные в области нелинейной поляризационной спектроскопии [1, 4]: сильное поле поляризовано циркулярно, а слабое — линейно. Тогда по мере распространения пробный поток будет становиться эллиптически поляризованным, причем оси эллипса будут поворачиваться. Для угла поворота и степени эллиптичности (соотношение осей эллипса) нетрудно получить следующие соотношения:

$$\theta = -\frac{1}{2} B(z) (\lambda_+ - \lambda_-) \operatorname{Im} g \quad (8), \quad \eta = \operatorname{th} \left( \frac{1}{2} B(z) (\lambda_+ - \lambda_-) \operatorname{Re} g \right). \quad (9)$$

Частотная зависимость  $\theta$ , а именно она и интересует в первую очередь исследователей [4, 8, 9], определяется главным образом частотной функцией  $g$ , поскольку член  $\frac{1}{\sigma_0} [1 - \exp(-\sigma_0 z)]$  будет существенным лишь при  $\sigma_0 z \gg 1$ , но даже в этом случае он не вносит качественных изменений. На рис. 1 приведена зависимость  $\operatorname{Im} g$  от расстройки двухфотонного резонанса при фиксированной частоте  $\omega_0$  (именно этот случай рассматривается в работе [4]) в предположении одинаковой спектральной ширины всех переходов ( $\Omega_k = \Delta\omega_k/\gamma$ ). При отказе от последнего допущения характер кривых в принципе не изменяется, уменьшается лишь асимметрия. Аналогичная картина получается и при увеличении неоднородного уширения. Таким образом, асимметрия угла поворота непосредственно вытекает из рассматриваемой теории, а не является следствием некоторых дополнительных процессов, как предполагали авторы [4].

В экспериментах, однако, угол  $\theta$  определяется по минимуму пропускания через анализатор, ось которого отклоняется на малый угол  $\beta$  от скрещенного положения [4, 8, 9]. На основании решения (6) для функции пропускания такой системы несложно получить выражение

$$T = \frac{\Delta I}{I_{10}} = \frac{1}{4} \exp(-\sigma_1 z) (4\beta^2 - 4\beta B(z) (\lambda_+ - \lambda_-) \operatorname{Im} g + B^2(z) (\lambda_+ - \lambda_-)^2 |g|^2), \quad (10)$$

где  $I_{10}$  — интенсивность пробного потока на входе в кювету с веществом, причем учтено, что  $|B(z)g(\lambda_+ - \lambda_-)| \ll 1$ .

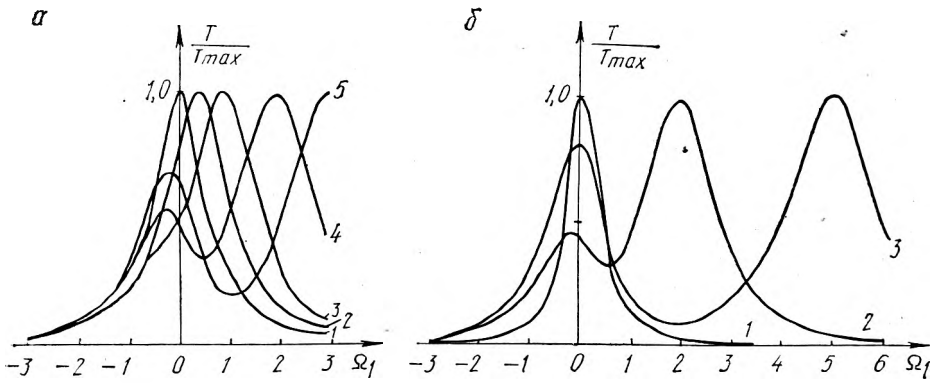


Рис. 2. Зависимость относительного пропускания  $T/T_{\max}$  от расстройки  $\Omega_1$  при условии  $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma$ :

$a - \frac{1}{\gamma^2} B(z) |\lambda_+ - \lambda_-| = 0.01$ ;  $\varrho_0 = 0$  (1);  $-0.5$  (2);  $-1$  (3);  $-2$  (4);  $-3$  (5);  $b - \frac{1}{\gamma^2} B(z) |\lambda_+ - \lambda_-| = 0.5$ ;  $\varrho_0 = 0$  (1);  $-2$  (2);  $-5$  (3)

Зависимость  $T(\beta)$  имеет вид параболы, что совпадает с результатами [8, 9] для ряда кристаллов. Минимум этой функции наблюдается при  $\beta_{\min} = \frac{1}{2} B(z) (\lambda_+ - \lambda_-) \text{Im} g = -\theta$ , т. е. метод определения  $\theta$  по минимуму пропускания вполне корректен. В то же время  $T_{\min} = \frac{1}{4} B^2(z) (\lambda_+ - \lambda_-)^2 (\text{Re} g)^2 \exp(-\sigma_1 z)$ , т. е. по значениям  $T_{\min}$  можно определять степень эллиптичности или ее частотную зависимость, что более реально для экспериментальных исследований.

Определенный интерес представляют спектральные зависимости пропускания  $T$  при  $\beta=0$  (скрещенное положение). Контур пропускания достаточно узок и при фиксированной частоте  $\omega_1$  имеет один максимум, который несколько смещается в сторону, противоположную расстройке  $\Delta\omega_1$ . При фиксированной частоте  $\omega_0$  контур имеет более пологий вид, но максимум смещается почти в точном соответствии с двухфотонным резонансом (рис. 2). Более того, при расстройке  $\Delta\omega_0$  большей, чем ширина линии, вблизи точки  $\Delta\omega_1=0$  начинает формироваться второй максимум, относительная интенсивность которого растет по мере увеличения  $\Delta\omega_0$  и при  $\frac{\Delta\omega_0}{\gamma_0} \sim 10$  становится сравнимой с интенсивностью основного максимума. Характер зависимостей практически не зависит от величины  $B(z)$  и лишь для аномально больших значений (в рамках принятых допущений) проявляется некоторое сужение контуров. Наличие максимумов в пропускании указывает на одинаковую эффективность в создании наведенной анизотропии двухступенчатых и двухфотонных процессов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Wieman C., Hänsch T. W.—Phys. Rev. Lett., 1976, v. 56, N 20, p. 1170.
2. Ахманов С. А., Бункин А. Ф., Иванов С. Г., Коротеев Н. И.—ЖЭТФ, 1978, т. 74, вып. 4, с. 1272.
3. Гавлик В.—Квант. электроника, 1982, т. 9, № 5, с. 1040.
4. Liao P. F., Bjorklund G. C.—Phys. Rev. A., 1977, v. 15, N 5, p. 2009.
5. Lamb W. E., Icssevgi A.—Phys. Rev., 1969, v. 185, N 2, p. 517.
6. Апанасевич П. А. Основы теории взаимодействия света с веществом.—Минск, 1977, с. 368.
7. Федоров Ф. И. Теория гиротропии.—Минск, 1976.
8. Данишевский А. М., Кошгаров С. Ф., Субашев В. К.—Письма в ЖЭТФ, 1981, т. 33, вып. 12, с. 625.
9. Поляков А. А., Трухин В. Н., Ярошецкий И. Д.—Письма в ЖТФ, 1982, т. 8, вып. 16, с. 1018.



## РАСЧЕТ КУБИЧЕСКИХ ЧЛЕНОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ И МАГНИТНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ СРЕДЫ С УЧЕТОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КВАДРУПОЛЬНОГО И МАГНИТНОГО ДИПОЛЬНОГО МОМЕНТОВ

При расчете нелинейно-оптических восприимчивостей сред, обладающих оптической активностью, нельзя ограничиваться лишь дипольным взаимодействием излучения с веществом. Нелокальность отклика и обусловленная ею пространственная дисперсия связаны, как известно, с электрическим квадрупольным и магнитным дипольными моментами, учет которых существует в случае сред, состоящих из макромолекул (биологические объекты, жидкие кристаллы и т. п.), отношение размера которых к длине волны излучения  $a/\lambda$  не мало.

В ряде работ нелинейная оптическая активность исследовалась в рамках феноменологического подхода [1, 2]. При этом нет уверенности, что учтены все члены в зависимости  $\vec{P}(\vec{E})$ , дающие вклад в поляризацию одного порядка с учитываемыми. Микроскопическая теория пока применялась только для вычисления квадратичной нелинейности [3].

В данной работе вычислены кубические члены электрической и магнитной поляризации среды с учетом электрического квадрупольного и магнитного дипольного моментов молекул, т. е. в рамках микроскопического подхода найдены уравнения связи для кубически нелинейных оптически активных сред.

Взаимодействие излучения с веществом будем описывать с помощью уравнений для матрицы плотности. Эти уравнения могут быть записаны в виде [4]:

$$\frac{d\rho_{ij}^t}{dt} = -i \sum_k [V_{ik}^t \rho_{kj}^t - \rho_{ik}^t V_{ki}^t] - \int_0^t \gamma_{ij}^{\tau} \rho_{ij}^{t-\tau} d\tau + \delta_{ij} \sum_k \int_0^{\infty} d_{kj}^{\tau} \rho_{kk}^{t-\tau} d\tau, \quad (1)$$

где  $\gamma_{ij}^{\tau}$  и  $d_{kj}^{\tau}$  — релаксационные параметры;  $V_{ik}^t$  — матричные элементы оператора взаимодействия, которые с учетом магнитного дипольного и электрического квадрупольного моментов имеют вид:

$$V_{ik}^t = -\frac{1}{\hbar} (\vec{p}_{ik} \vec{E}(t) + \vec{m}_{ik} \vec{B}(t) + \hat{q}_{ik} : \vec{\nabla} \vec{E}(t)) \exp i\omega_{ik} t. \quad (2)$$

Здесь  $\vec{p}_{ik}$ ,  $\vec{m}_{ik}$ ,  $\hat{q}_{ik}$  — матричные элементы операторов электрического дипольного, магнитного дипольного и электрического квадрупольного моментов, причем третье слагаемое в (2) следует понимать как  $\hat{q} : \vec{\nabla} \vec{E} \equiv \equiv q_{\alpha\beta} \partial E_{\alpha} / \partial x_{\beta}$ ;  $\vec{E}(t)$  и  $\vec{B}(t)$  — электрическое и магнитное эффективные поля в центре масс рассматриваемой молекулы;  $\omega_{ik}$  — собственная частота молекулы, соответствующая переходу между состояниями  $i$  и  $k$ .

Решая уравнение (1) с помощью преобразования Лапласа, в третьем порядке теории возмущений для недиагональных элементов матрицы плотности получим [4]:

$$\rho_{ij,3}^t = \sum_{\substack{k,l \\ x,x',x''}} [\exp i(\omega_{ij} - \omega_x - \omega_{x'} - \omega_{x''}) t] \cdot \left\{ i [L_{il}^{-1}(x) - L_{il}^{-1}(x)] A_{ik}^{xx'}(x) \frac{V_{lk}^x V_{kl}^{x'} V_{ij}^{x''} z_{lk}^0}{i(x + \varepsilon_{ij}^{x''}) + \gamma_{ij}^{x+\varepsilon_{ij}^{x''}}} \Big|_{x > \omega_x - \omega_{x''}} + \right. \\ \left. + \frac{i V_{ik}^{x''} V_{kl}^{x'} V_{ij}^{x'} z_{jl}^0}{(i\varepsilon_{ij}^{x'} + \gamma_{ij}^{\varepsilon_{ij}^{x'}})(ix + \gamma_{kj}^x) [i(x + \varepsilon_{ik}^{x''}) + \gamma_{ij}^{x+\varepsilon_{ik}^{x''}}]} \Big|_{\substack{k \neq j \\ x = \varepsilon_{kl} + \varepsilon_{ij}^{x'}}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{iV_{ik}^{x''}V_{kl}^{x'}V_{lj}^x z_{lk}^0}{(i\varepsilon_{kl}^{x'} + \gamma_{kl}^{x'}) (ix + \gamma_{kj}^x) [i(x + \varepsilon_{ik}^{x''}) + \gamma_{ij}^{x+\varepsilon_{ik}^{x''}}]} \Bigg|_{\substack{k \neq j \\ x = \varepsilon_{ij}^x + \varepsilon_{kl}^{x'}}} \\
& + \frac{iV_{il}^x V_{lk}^{x'} V_{kj}^{x''} z_{kl}^0}{(i\varepsilon_{ik}^{x'} + \gamma_{lk}^{x'}) (ix + \gamma_{ik}^x) [i(x + \varepsilon_{kj}^{x''}) + \gamma_{ij}^{x+\varepsilon_{kj}^{x''}}]} \Bigg|_{\substack{k \neq i \\ x = \varepsilon_{il}^x + \varepsilon_{lk}^{x''}}} \\
& + \frac{iV_{il}^{x'} V_{lk}^x V_{kj}^{x''} z_{li}^0}{(i\varepsilon_{il}^{x'} + \gamma_{il}^{x'}) (ix + \gamma_{ik}^x) [i(x + \varepsilon_{kj}^{x''}) + \gamma_{ij}^{x+\varepsilon_{kj}^{x''}}]} \Bigg|_{\substack{k \neq i \\ x = \varepsilon_{lk}^x + \varepsilon_{il}^{x''}}} \Bigg\}, \quad (3)
\end{aligned}$$

где  $\varepsilon_{ij}^x = \omega_{ij} - \omega_k$  — расстройка резонансов между частотами излучения  $\omega_k$  и собственными частотами молекулы  $\omega_{ij}$ ;

$$A_{lk}^{x'}(x) = \frac{1}{i(x - \varepsilon_{lk}^x) + \gamma_{kl}^{x-\varepsilon_{lk}^x}} + \frac{1}{i(x - \varepsilon_{kl}^x) + \gamma_{lk}^{x-\varepsilon_{kl}^x}}$$

с учетом только прямых оптических переходов  $L_{il}^{-1}(x) = \frac{\delta_{il}}{ix + 1/\tau_i}$  ( $\tau_i = (\sum_k d_{ik})^{-1}$  — время жизни уровня  $i$ );  $z_{ik}^0 = \rho_{ii}^0 - \rho_{kk}^0$  — равновесная разность населенностей комбинирующих уровней;  $V_{ik}^x$  — Фурье-компонента матричного элемента оператора энергии взаимодействия  $V_{ik}^t$  в Фурье-разложении по частотам расстройки  $\varepsilon_{ik}^x$ :

$$V_{ik}^t = \sum_x V_{ik}^x e^{i\varepsilon_{ik}^x t}, \quad (4)$$

$\gamma_{ij}^x = \int_0^\infty \gamma_{ij}^x e^{-ix\tau} d\tau$  — изображение параметра релаксации  $\gamma_{ij}^x$  в преобразовании Лапласа.

Квадрупольный электрический и дипольный магнитный моменты сравнимы по величине, поэтому их необходимо учитывать одновременно. При этом отклик среды на действие излучения должен описываться не только электрической, но и магнитной поляризациями среды. Выражения для этих поляризаций можно представить в виде [4]:

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = N \langle \text{Sp } \rho \vec{p} \rangle - \vec{\nabla} N \langle \text{Sp } \rho \vec{q} \rangle, \quad (5)$$

$$\vec{M}(\vec{r}, t) = N \langle \text{Sp } \rho \vec{m} \rangle. \quad (6)$$

Угловые скобки в (5) и (6) обозначают усреднение по степеням свободы, движение которых описывается классически (например, по ориентациям молекул в жидком кристалле). При записи (6) опущено слагаемое, содержащее  $[\vec{v} \times \vec{p}]/c$ , что соответствует малости  $\vec{v}/c$  или статистической независимости  $\vec{v}$  и  $\vec{p}$  для различных молекул ( $\vec{v}$  — скорость движения молекулы в целом).

Подставляя (3) с учетом (2) и (4) в (5) и (6) и оставляя лишь члены, линейные по  $q$  или по  $m$ , для кубических поляризаций на частоте  $\omega_k = \omega_k + \omega_k' + \omega_k''$  получаем выражения:

$$\begin{aligned}
P_\alpha^{(3)} = & \chi_{\alpha\beta\gamma} E_\beta E_\gamma E_\delta + [\nu_{\alpha\beta\gamma\delta} + \bar{\nu}_{\alpha\beta\delta\gamma} + \bar{\nu}_{\alpha\delta\gamma\beta} - \bar{\nu}_{\alpha\delta\beta\gamma} - \bar{\nu}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \\
& - \bar{\nu}_{\alpha\delta\beta\gamma}] E_\beta E_\gamma (\nabla_\varepsilon E_\delta) + [\kappa_{\alpha\beta\gamma\delta} + \bar{\kappa}_{\alpha\beta\delta\gamma} + \bar{\kappa}_{\alpha\delta\gamma\beta}] E_\beta E_\gamma B_\delta, \quad (7)
\end{aligned}$$

$$M_\alpha^{(3)} = \xi_{\alpha\beta\gamma\delta} E_\beta E_\gamma E_\delta, \quad (8)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  — индексы, нумерующие координаты  $x, y, z$ . По повторяющимся индексам в (7) и (8) проводится суммирование. Входящие в выражения (7) и (8) тензоры определены соотношениями (индексы  $x$  опущены)

$$\chi_{\alpha\beta\gamma\delta} = \Phi_{\omega, \omega', \omega''}(p_{\alpha}, p_{\beta}, p_{\gamma}, p_{\delta}), \quad (9) \quad \nu_{\alpha\beta\gamma\delta} = \Phi_{\omega, \omega', \omega''}(p_{\alpha}, p_{\beta}, p_{\gamma}, q_{\varepsilon\delta}), \quad (10)$$

$$\bar{\nu}_{\alpha\beta\delta\gamma} = \Phi_{\omega, \omega', \omega''}(p_{\alpha}, p_{\beta}, q_{\varepsilon\delta}, p_{\gamma}), \quad (11) \quad \bar{\nu}_{\alpha\delta\gamma\beta} = \Phi_{\omega, \omega', \omega''}(p_{\alpha}, q_{\varepsilon\delta}, p_{\beta}, p_{\gamma}), \quad (12)$$

$$\tilde{\nu}_{\alpha\varepsilon\beta\gamma\delta} = \Phi_{\omega, \omega', \omega''}(q_{\alpha\varepsilon}, p_{\beta}, p_{\gamma}, p_{\delta}), \quad (13) \quad \kappa_{\alpha\beta\gamma\delta} = \Phi_{\omega, \omega', \omega''}(p_{\alpha}, p_{\beta}, p_{\gamma}, m_{\delta}), \quad (14)$$

$$\bar{\kappa}_{\alpha\beta\delta\gamma} = \Phi_{\omega, \omega', \omega''}(p_{\alpha}, p_{\beta}, m_{\delta}, p_{\gamma}), \quad (15) \quad \bar{\kappa}_{\alpha\delta\beta\gamma} = \Phi_{\omega, \omega', \omega''}(p_{\alpha}, m_{\delta}, p_{\beta}, p_{\gamma}), \quad (16)$$

$$\xi_{\alpha\beta\gamma\delta} = \Phi_{\omega, \omega', \omega''}(m_{\alpha}, p_{\beta}, p_{\gamma}, p_{\delta}), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\omega, \omega', \omega''}(a, b, c, d) = & \left\langle \frac{N}{i\hbar^3} \sum_{i,j,k,l} \rho_{jj}^0 \{ a_{ki} b_{jl} c_{ij} d_{ik} A_{ij} D_{ik} (L_{kj}^{-1} - L_{ij}^{-1}) - \right. \\ & - a_{ki} b_{lj} c_{jl} d_{ik} A_{jl} D_{ik} (L_{kl}^{-1} - L_{il}^{-1}) + a_{kj} b_{li} c_{jl} d_{ik} B_{jl} C_{ji} D_{jk} - \\ & - a_{jk} b_{il} c_{ij} d_{ki} B_{ij} C_{ij} D_{kj} + a_{ki} b_{il} c_{ij} d_{jk} B_{lj} C_{ij} D_{ik} - a_{ih} b_{li} c_{ij} d_{hk} B_{jl} C_{ji} D_{kh} + \\ & + a_{il} b_{ji} c_{kj} d_{lh} B_{kj} C_{ki} D_{li} - a_{il} b_{ij} c_{jk} d_{kl} B_{jk} C_{ik} D_{il} + a_{kl} b_{ij} c_{jl} d_{li} B_{jk} C_{ik} D_{lk} - \\ & \left. - a_{lh} b_{ji} c_{kj} d_{il} B_{kj} C_{ki} D_{hl} \right\rangle. \quad (18) \end{aligned}$$

В (18) величины  $A_{ij}, C_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, L_{ij}^{-1}$  зависят от частот внешнего электромагнитного поля следующим образом:

$$A_{ij} = \frac{1}{\omega_{ij} + \omega' + i\gamma_{ji}} + \frac{1}{\omega_{ij} + \omega + i\gamma_{ij}}, \quad (19) \quad B_{ij} = \frac{1}{\omega_{ij} - \omega' - i\gamma_{ij}}, \quad (20)$$

$$C_{ij} = \frac{1}{\omega_{ij} - \omega - \omega' - i\gamma_{ij}}, \quad (21) \quad D_{ij} = \frac{1}{\omega_{ij} - \omega - \omega' - \omega'' - i\gamma_{ij}}, \quad (22)$$

$$L_{ij}^{-1} = \frac{\delta_{ij}}{\omega + \omega' + i\Gamma/\tau_i}, \quad (23)$$

$\rho_{jj}^0$  — начальная заселенность  $j$ -того уровня. С помощью соотношений (9) — (23) можно установить некоторые общие свойства симметрии тензоров, задающих кубическую поляризацию среды (7) и (8). Так как тензор квадрупольного момента  $q_{\alpha\beta}$  симметричен, то должны быть симметричными по соответствующим индексам и тензоры пятого ранга (10) — (13). Из соотношения (18) следует далее, что функция  $\Phi_{\omega, \omega', \omega''}$  в случае двухфотонного резонанса (т. е. когда множители  $C_{ij}$  велики) обладает свойством  $\Phi_{\omega, \omega', \omega''}(a, b, c, d) = \Phi_{-\omega, -\omega', -\omega''}(a, b, c, d)$ . Эта ситуация, в частности, реализуется в методе активной спектроскопии комбинационного рассеяния, когда разность частот двух волн накачки близка к частоте перехода  $\omega_{ij}$ .

Уравнения (7) и (8) представляют собой, по сути дела, уравнения связи для кубических членов нелинейной электрической и магнитной поляризации. В них  $E$  и  $B$  фигурируют в качестве эффективных полей. Однако переход от эффективных полей к средним легко осуществляется по известной формуле модели эффективного поля Лоренц-Лоренца (см. например, формулу (1.153) в [4]).

Входящие в (7) и (8) тензоры, определяемые соотношениями (10) — (17) (кроме  $\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ), имеют один и тот же порядок по величине. Следовательно, второе и третье слагаемые в (7) должны давать вклад в гиротропию примерно одного порядка. Однако в работах [1, 2], где использован феноменологический подход, слагаемое вида:  $[\chi_{\alpha\beta\gamma\delta} + \bar{\nu}_{\alpha\beta\delta\gamma} + \bar{\nu}_{\alpha\delta\beta\gamma}] E_{\beta} E_{\gamma} B_{\delta}$  отсутствует. Использованный в данной работе микроскопический подход позволяет наиболее последовательно учесть все компоненты поляризации, дающие вклад в нелинейность, в частности, в кубическую нелинейность оптически активных сред.

Автор выражает благодарность П. А. Апанасевичу за помощь и полезные обсуждения на всех этапах работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ахманов С. А., Жариков В. И.—Письма в ЖЭТФ, 1967, т. 6, с. 644.
2. Бокуть Б. В., Казак Н. С., Сердюков А. Н. Нелинейная оптическая активность.— Минск, 1971.
3. Ляхов Г. А., Свирко Ю. П.—ЖЭТФ, 1981, т. 80, вып. 4, с. 1308.
4. Апанасевич П. А. Основы теории взаимодействия света с веществом.— Минск, 1977.

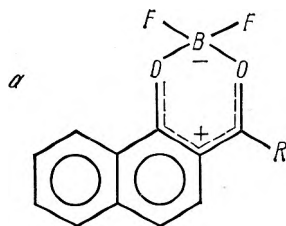
УДК 535.34 : 543.876 : 541.749

КБЕУ ХАК ТУАН

## ЭЛЕКТРОННЫЕ СПЕКТРЫ ПОГЛОЩЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ БОРСОДЕРЖАЩИХ ОРГАНИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ В РАСТВОРАХ

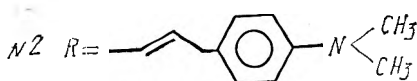
Природа растворителя существенно влияет на спектрально-люминесцентные характеристики борсодержащих органических комплексных соединений. По изменению этих характеристик можно судить об устойчивости молекул растворенного вещества в растворе.

В предлагаемой работе изучено влияние растворителей на спектры поглощения растворов некоторых борсодержащих органических комплексов двух типов а) и б), структурные формулы которых приведены ниже.



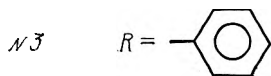
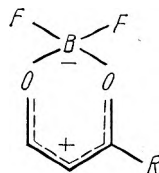
где R — радикал. В зависимости от природы радикала соединения № 1—6 имеют следующие названия:

№ 1 R = CH<sub>3</sub>; 2,2-дифтор-4-метилнафто (2,1-е)-1,3,2-диоксаборин

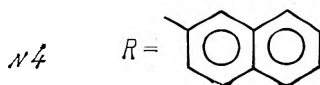


2,2-дифтор-4-(4-диметиламиностирил)-нафто (2,1-е)-1,3,2-диоксаборин

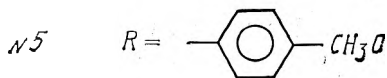
б



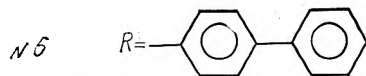
2,2-дифтор-4-(фенил)-1,3,2-диоксаборин



2,2-дифтор-4-(2-нафтил)-1,3,2-диоксаборин



2,2-дифтор-4-(4-метоксифенил)-1,3,2-диоксаборин



2,2-дифтор-4-(4-дифенил)-1,3,2-диоксаборин

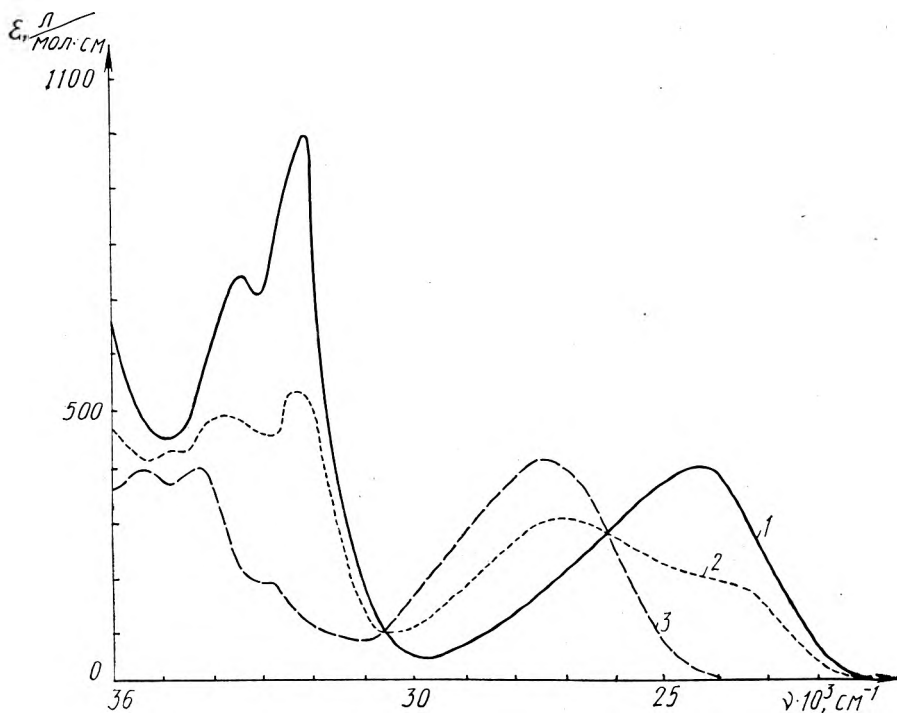


Рис. 1. Электронные спектры поглощения растворов 2,2-дифтор-4-метилнафто (2,1-е)-1,3,2-диоксаборина в ацетонитриле (1, 2) и его лиганда 2-ацето-1-нафтола в ацетонитриле (3):

1 — спектр раствора до начала реакции; 2, 3 — спектры раствора через 30 и 190 мин после начала реакции

Спектры поглощения и их изменения под влиянием растворителей измерялись с помощью спектрофотометра «Specord UVVIS M40». В качестве растворителей использованы толуол, диоксан, этилацетат, ацетонитрил, нитрометан, диметилформамид и диметилсульфоксид.

Спектры поглощения растворов борсодержащих органических комплексов имеют полосатый вид. Полуширина длинноволновой полосы поглощения некоторых растворов достигает величины порядка тысячи  $\text{см}^{-1}$ . В области меньших частот относительно максимума длинноволновой полосы поглощения растворов соединений № 1, 3, 4, 5 обнаружена слабая полоса в виде перегиба, которая испытывает смещение в зависимости от полярности растворителя. Поскольку с увеличением полярности растворителя происходит гипсохромный сдвиг слабой полосы, следует считать, что она соответствует  $n \rightarrow \pi^*$ -переходу.

Изучение поведения интенсивности длинноволновой полосы поглощения растворов борсодержащих комплексов в зависимости от величины дипольного момента растворителя свидетельствует об отсутствии корреляции между смещением максимума этой полосы поглощения и полярностью растворителя. С увеличением полярности растворителя  $n \rightarrow \pi^*$ -полоса поглощения должна смещаться в область длинных волн, однако это не подтверждается нашими экспериментальными данными [1]. Далее замечено, что для ряда веществ № 1, 3—6 наблюдается большой стоксовый сдвиг спектра люминесценции, что свидетельствует о сильном изменении дипольного момента перехода растворенного вещества в возбужденном состоянии. Указанный факт характерен для полос переноса заряда. Анализируя поведение длинноволновой полосы в различных растворителях, а также величины стоксовых сдвигов спектров люминесценции, мы пришли к выводу, что длинноволновая полоса поглощения в борсодержащих органических комплексах обусловлена переносом заряда от  $\pi$ -сопряженной системы к атому бора.

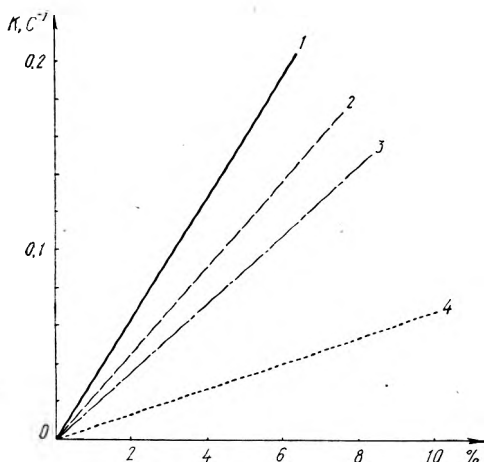


Рис. 2. Зависимость константы скорости распада толуольного раствора 2,2-дифтор-4-метилнафта (2,1-е)-1,3,2-диоксаборина от количества добавляемого растворителя:

1 — этилацетата; 2 — ацетонитрила; 3 — диметилформамида; 4 — диметилсульфоксида

сопряженных связей среди исследуемых соединений, причем, чем больше полярность растворителя, тем дальше в область длинных волн смещена эта точка. Для соединений № 1, 3, 6 в полярном растворителе такого смещения не наблюдается.

Изучена динамика распада исследуемых борсодержащих органических комплексов в различных растворителях, а также определено время  $\tau_e$ , за которое оптическая плотность основной полосы электронного спектра поглощения растворов соединений № 1—6 уменьшается в  $e$  раз (см. таблицу). В качестве примера на рис. 2 приведены зависимость константы скорости распада вещества № 1 от концентрации полярной добавки к толуолу. Для всех используемых растворителей, кроме диоксана, эта зависимость имеет линейный характер. Данные таблицы показывают, что соединения № 1, 2 медленнее разлагаются в ацетонитриле, чем в диоксане и этилацетате. Остальные вещества разлагаются во всех используемых растворителях, однако время распада этих веществ не пропорционально полярности растворителя. В диметилформамиде, например, они разлагаются медленнее, чем в менее полярном растворе (например, диоксане). Не наблюдается корреляции между устойчивостью борсодержащих соединений № 1—6 и значениями диэлектрической проницаемости и вязкости растворителя. Предполагается, что разложение исследуемых комплексных соединений происходит за счет воздействия от-

Изучение влияния растворителя на устойчивость молекул борсодержащих комплексов показывает, что молекулы исследуемых соединений устойчивы в толуоле. Об этом свидетельствует неизменность контуров спектров поглощения в толуоле с течением времени. В диоксане, этилацетате, ацетонитриле, диметилформамиде и диметилсульфоксиде соединения № 1—6 менее устойчивы, и в результате взаимодействия с молекулами растворителя они разлагаются на лиганды. Длинноволновые полосы поглощения лиганда и вещества связаны изобестической точкой (рис. 1). Наибольшее смещение изобестической точки в электронном спектре поглощения наблюдается для вещества № 2, молекула которого обладает самой длинной цепью

Время (мин), за которое оптическая плотность основной полосы поглощения комплексов бора уменьшается в  $e$  раз

Растворитель	Номер вещества					
	1	2	3	4	5	6
Толуол	Устойчиво	Устойчиво	Устойчиво	Устойчиво	Устойчиво	Устойчиво
Диоксан	2	2200	48	58	126	69
Этилацетат	3	3500	190	135	205	222
Ацетонитрил	43	45000	4800	6540	5700	7080
Нитрометан	2429	Устойчиво	—	—	—	—
Диметилформамид	7	2167	65250	45000	39000	51000
Диметилсульфоксид	4	2700	5	7	18	10

дельных групп атомов, имеющих в структуре растворителя. Для проверки предположения, что разложение комплексов бора в полярных растворителях может быть обусловлено координацией молекул растворителя через донорные атомы такие, как кислород или сера, записаны ИК спектры поглощения комплексов в полярном диметилсульфоксиде. Как показано в [2], в растворе диметилсульфоксида молекулы последнего могут вступать в донорно-акцепторную связь с молекулами растворенного вещества. При координации сульфоксида через атом кислорода полоса поглощения, относящаяся к колебаниям S=O, смещается в низкочастотную область, а при координации через атом серы — в высокочастотную. В ИК спектрах поглощения растворов комплексных соединений бора в диметилсульфоксиде не наблюдалось смещения характерных полос. Это указывает на отсутствие координации молекул растворителя через атом кислорода или серы. Однако отметим, что соединения № 3—6 наиболее стабильны в растворителях, молекулы которых содержат атом азота, например, в диметилформамиде  $C_3H_7NO$  или в ацетонитриле  $C_2H_3N$ , и устойчивы в растворителях, имеющих атом серы или атом кислорода в структуре, например, в диметилсульфоксиде  $(CH_3)_2SO$  или в диоксане  $C_4H_8O_2$ .

Таким образом, для исследуемых борсодержащих органических комплексов № 1—6 в диоксане и диметилсульфоксиде предполагается, что атомы серы и кислорода играют главную роль в разрыве донорно-акцепторной связи в молекуле, по-видимому, за счет большого дипольного момента S=O связи.

Анализ полученных экспериментальных данных позволяет заключить, что молекулы борсодержащих органических комплексов № 1—6 устойчивы в толуоле. Установлено, что в диметилсульфоксиде разрыв донорно-акцепторной связи бор-кислород в молекуле комплексных соединений происходит за счет диполь-дипольных взаимодействий молекул растворенного вещества с молекулами растворителя.

В заключение автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук профессору А. И. Комяку за большую помощь в осуществлении работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кьен Хак Туан. Спектрально-люминесцентные характеристики борсодержащих органических комплексов.— Рукопись деп. в БелНИИТИ. № 607 БЕ-Д83. Деп. от 04.05.1983.

2. Гурьянова Е. Н., Гольдштейн И. П. Донорно-акцепторная связь.— М., 1973.

УДК 539.1+539.2

О. М. АНШАКОВ, В. Л. ГУРАЧЕВСКИЙ, М. МАШЛАН,  
А. Л. ХОЛМЕЦКИЙ, В. А. ЧУДАКОВ

#### МЕССБАУЭРОВСКИЙ ТОЛЩИНОМЕР ЗАЩИТНЫХ ПОКРЫТИЙ

В ряде задач современной технологии производства большое значение имеет развитие методов и аппаратуры для толщинометрии и неразрушающего контроля качества защитных покрытий материалов. Это обусловлено, с одной стороны, растущими требованиями к качеству таких покрытий, с другой — непрерывным усложнением их производства.

Для целей толщинометрии защитных покрытий используется ряд физических методов, например рентгенофлуоресцентный метод обратного рассеяния  $\beta$ -частиц и т. д. [1, 2]. Однако эти методы становятся малоэффективными, когда атомные номера материалов основания и покрытия близки, например, при нанесении хромо-никелевых покрытий на железо. В этом случае единственным неразрушающим методом толщинометрии практически становится метод регистрации резонансно рассеянного мёс-

сбауэровского излучения, имеющий чрезвычайную избирательность к ядрам определенного типа, содержащимся в веществе основания. При этом материал покрытия играет роль ослабителя падающего и рассеянного мёссбауэровского излучения, следовательно, интенсивность последнего связана с толщиной защитного покрытия по обычному закону ослабления гамма-излучения в веществе:

$$I_p = BI_0 e^{-\mu 2l}, \quad (1)$$

где  $I_p$  — регистрируемая интенсивность резонансного рассеяния при толщине покрытия  $l$ ;  $I_0$  — интенсивность резонансного рассеяния при толщине покрытия, равной нулю;  $\mu$  — линейный коэффициент поглощения гамма-квантов в веществе покрытия;  $B$  — фактор накопления, величина которого постоянна при фиксированной геометрии измерений.

Несмотря на простоту физических принципов, лежащих в основе работы мёссбауэровского толщиномера, практическая реализация такого прибора в переносном виде связана с целым рядом технических трудностей, главной из которых является проблема минимизации размеров электродинамического вибратора мёссбауэровского спектрометра, с помощью которого реализуется движение источника по некоторому фиксированному закону.

Обычно задают движение с линейно изменяющейся скоростью, при котором полнее используется время эксперимента и наиболее просто обеспечивается линейность скоростной шкалы регистрирующего устройства путем равномерного переключения регистрирующих каналов. Однако в этом случае предъявляются значительные требования к конструкции вибратора, вытекающие из необходимости обрабатывать линейно изменяющуюся скорость.

Для иллюстрации технических трудностей, возникающих при этом, достаточно отметить хотя бы то обстоятельство, что линейный закон является многокомпонентным по фурье-составляющим, в то время как функция отклика механической системы в зависимости от частоты возмущающего сигнала имеет резко неоднородный характер. Конструкция такого вибратора поэтому достаточно сложна и громоздка.

Для преодоления указанных трудностей нами разработаны принципы построения портативного ЯГР-спектрометра, в котором предусматривается задание гармонически изменяющейся скорости с использованием системы автоматической линеаризации скоростной шкалы регистрирующей системы [3]. При гармоническом задании скорости существенно снижаются требования к параметрам системы задания движения, что позволило создать мини-вибратор весом 0,4 кг и размерами  $\varnothing 30 \times 50$  мм, что примерно на порядок величины меньше габаритов вибраторов, предназначенных для обработки линейно изменяющейся скорости. На рис. 1 представлен мёссбауэровский спектр поглотителя из  $\alpha$ -железа, измеренный с помощью портативного ЯГР-спектрометра с гармоническим заданием скорости. Удовлетворительное разрешение резонансных линий и величина интегральной нелинейности скоростной шкалы, составляющая  $< 1\%$ , являются достаточными для проведения большинства прикладных исследований.

На основе портативного ЯГР-спектрометра разработан мёссбауэровский толщиномер покрытий переносного типа, включающий в себя пульт управления и измерительный зонд, с помощью которого реализуется та или иная геометрия измерений.

Пульт управления содержит измерительный блок (см. рис. 2), который включает функциональный генератор 1, вырабатывающий гармонически изменяющееся напряжение, которое через кабельную связь подается на задающую катушку вибратора, обеспечивая движение источника по гармоническому закону. Дифференциальный дискриминатор 2 через кабельную связь подключен к выходу детектора обратно-рассеянного гамма-излучения и предназначен для выделения линии резонансно-



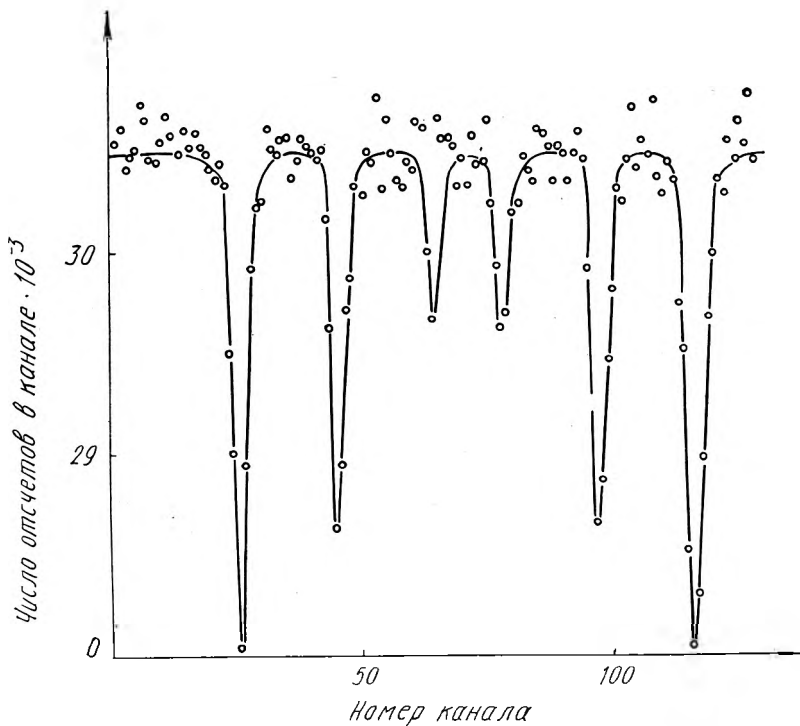


Рис. 1. Мёссбауэровский спектр поглощения образца из  $\alpha$ -железа, измеренный с помощью портативного ЯГР-спектрометра. Источник — Co-57 (Pt)

го взаимодействия. Импульсы с выхода дифференциального дискриминатора 2 поступают на вход логического блока 3, в котором осуществляется регистрация резонансных событий по закону задания скорости с одновременным обеспечением одинаковых условий счета в каждом скоростном канале. Предположим далее, что спектр резонансно-рассеянного излучения содержит только одну линию. В этом случае в логическом блоке 3 запоминаются значения четырех адресов регистрирующих каналов —  $n_1$  и  $n_2$ , соответствующие значениям скорости, лежащим на краях резонансного пика, и  $n_3$  и  $n_4$ , соответствующие двум значениям скорости вдали от резонанса; при этом  $n_2 - n_1 = n_4 - n_3$ . Когда текущее значение адреса регистрирующего канала  $i$  лежит в пределах  $n_1 < i < n_2$ , открывается схема «И» 5, когда значение  $i$  лежит в пределах  $n_3 < i < n_4$ , открыва-

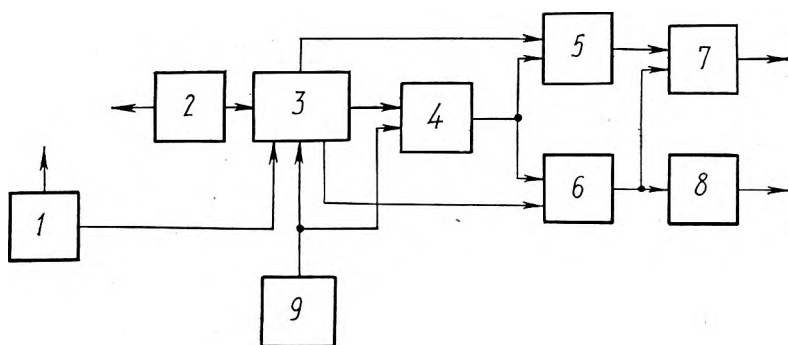


Рис. 2. Структурная схема мёссбауэровского толщиномера защитных покрытий

ется схема «И» 6. Очевидно, что при этом с выхода схемы «И» 5 поступают импульсы, соответствующие регистрации резонансного пика, а с выхода схемы «И» 6 — импульсы, соответствующие регистрации нерезонансного фона. Разность средних частот следования импульсов с выходов схем «И» 5 и 6 равна интенсивности резонансных событий. Вычитание указанных частот производится в реверсивном счетчике 7, время измерения задается таймером 9, управляющим работой схемы совпадений 4. Таким образом, по окончании времени измерения в реверсивном счетчике 7 записано число, равное числу зарегистрированных резонансных событий, связанному соотношением (1) с толщиной измеряемого покрытия. Это число выводится на индикационное табло, по соответствующим калибровочным кривым определяется толщина покрытия. Так как источник  $^{57}\text{Co}$ , используемый для измерения толщин покрытий на железосодержащих материалах, имеет сравнительно небольшой период полураспада ( $\sim 270$  дней), необходима постоянная корректировка калибровочной кривой, учитывающая изменение активности источника. Очевидно, что интенсивность нерезонансного фона прямо пропорциональна активности источника, поэтому с помощью счетчика 8 отдельно регистрируется уровень фона и его величина выводится на индикационное табло.

В общем случае, когда спектр обратнорассеянного мёссбауэровского излучения имеет несколько линий, производится измерение интенсивностей каждой из резонансных линий и определяется суммарная величина резонансного эффекта. При этом в логическом блоке 3 запоминаются значения чисел  $n_{1k}$ ,  $n_{2k}$  ( $k=1 \dots m$ , где  $m$  — число резонансных линий в спектре), соответствующие значениям скорости, лежащим на краях каждой линии, и  $n_3$  и  $n_4$ , которые соответствуют значениям скорости вдали от резонанса, при этом для сопоставимости результатов необходимо соблюдение условия

$$\sum_{k=1}^m (n_{2k} - n_{1k}) = n_4 - n_3. \quad (2)$$

В остальном схема построения измерительного блока остается без изменений.

На основе описанного мёссбауэровского толщиномера легко реализуется дефектоскоп защитных покрытий, принцип работы которого заключается в том, что при измеренной за некоторое фиксированное время величине резонансного эффекта, больше некоторой пороговой (т. е. толщине защитного покрытия, меньшей некоторой критической величины), на индикационном табло появляется соответствующий сигнал. При этом, по сравнению с мёссбауэровским толщиномером, изменяется только система индикации. Кроме того, для дефектоскопии защитных покрытий можно проводить измерение не абсолютной величины резонансного эффекта (зависит от активности источника, изменяющейся во времени), а измерение отношения величины резонансного эффекта к уровню фона, т. е. отношения показаний счетчиков 7 и 8. При этом сигналом обнаружения дефекта является превышение этой величиной некоторого критического значения.

Немаловажным вопросом является экспрессность измерений рассмотренных приборов и методы ее повышения. В принципе, при достаточно большой активности источника и выборе оптимальной геометрии для регистрации обратнорассеянного резонансного излучения время измерения мёссбауэровского спектра может составлять несколько минут [4]. Кроме того, в специализированном мёссбауэровском толщиномере удобно использовать источник излучения в матрице того же материала, что и материал основания, на которое нанесено защитное покрытие. В этом случае мёссбауэровский спектр содержит одну резонансную линию в районе нуля скоростей, что позволяет сузить задаваемый диапазон изменения скорости и сократить время регистрации нерезонансного фона. Следует также отметить, что в отличие от обычного мёссбауэровского

эксперимента, в котором требуется измерять как интенсивность, так и форму резонансных линий, в рассмотренном толщиномере достаточно измерить только интенсивность резонансных линий, величина которой в соответствии с выражением (1) дает полную информацию о толщине контролируемого покрытия, а для определения интенсивности линии требуется значительно меньше время, чем для измерения ее формы. С учетом перечисленных обстоятельств необходимое время измерения мёссбауэровского толщиномера или дефектоскопа можно, по-видимому, довести до величины  $\sim 1$  мин.

Детектором обратнорассеянного резонансного излучения может служить компактный сцинтилляционный спектрометр. В настоящее время разрабатывается портативная система для регистрации спектров ядерного гамма-резонанса и первичной обработки информации на основе микропроцессорной системы управления.

Таким образом, на основе портативного ядерного гамма-резонансного спектрометра с гармоническим заданием скорости вполне реальной становится задача по созданию переносного мёссбауэровского толщиномера, описанного в настоящей работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ohno K.—In: Advances in X-ray Analysis, Ründ, Plenum Press. New York, U. S., 1978, v. 21, p. 89.
2. Novaka I., Sigai I.—Nucl. Instrum. and Meth., 1979, v. 158, № 2—3, p. 453.
3. Аншаков О. М., Нестерович З. И., Холмецкий А. Л., Чудаков В. А.—В кн.: IX Всесоюзная науч.-техн. конф. Неразрушающие физические методы и средства контроля, секция Г. М., 1981, с. 252.
4. Pawlowski Z., Marges I., Cudny W., Holinicka I.—Nucl. Instrum. and Meth., 1979, v. 163, p. 423.
5. Аншаков О. М., Чудаков В. А., Холмецкий А. Л., Гуринович В. И.—ПТЭ, 1982, № 6, с. 31.

УДК 621.372.412

М. ПАТЕК, А. П. ХАПАЛЮК

### ОТКРЫТЫЙ РЕЗОНАТОР С ПЕРИОДИЧЕСКИ РАСПОЛОЖЕННЫМИ ЛИНЗАМИ

В работе [1] показано, что расчет собственных полей открытого оптического резонатора, усложненного произвольным числом  $m-2$  фокусирующих или дефокусирующих элементов типа оптических линз или гауссовых диафрагм, можно свести к более простой задаче расчета параметров эквивалентных резонаторов (ЭР). Каждый  $j$ -ый из  $(m-1)$  ЭР характеризуется длиной  $L_j = z_{mj+1} - z_{1j}$  ( $z_{1j}$  и  $z_{mj+1}$  — координаты первого и второго зеркал  $j$ -го ЭР на оси  $z$ ) и радиусами кривизны зеркал  $\rho_{1j}$  и  $\rho_{mj+1}$ . Собственные гауссовы пучки  $j$ -го ЭР совпадают с собственными пучками  $j$ -го промежутка между линзами исходного резонатора. Параметры этих пучков (положение локусов  $l_j$  и радиусы в них  $w_j$ ) определяются через параметры ЭР по известным формулам [1, 2]:

$$\begin{aligned} knw_{ja}^2 + il_{ja} &= iz_{mj+1} + \frac{D_j - iL_j(\rho_{1j} - L_j)}{\rho_{1j} + \rho_{mj+1} - 2L_j}, \\ knw_{jb}^2 - il_{jb} &= -iz_{1j} + \frac{D_j - iL_j(\rho_{mj+1} - L_j)}{\rho_{1j} + \rho_{mj+1} - 2L_j}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$D_j^2 = L_j(\rho_{1j} - L_j)(\rho_{mj+1} - L_j)(\rho_{1j} + \rho_{mj+1} - L_j),$$

где индексом  $a$  отмечены параметры волн, распространяющихся вдоль положительного,  $b$  — вдоль отрицательного направлений оси  $z$ ;  $n = \text{Re } N$ ,  $N$  — комплексный коэффициент преломления среды;  $k$  — волновое число в вакууме.

Задача сводится к определению двух параметров каждого зеркала ЭР. В дальнейшем вместо радиуса кривизны зеркала будем использовать координату центра его кривизны на оси  $z$  ( $z_{1j} + \rho_{1j}$ ,  $z_{mj+1} - \rho_{mj+1}$ ). Четыре точки на оси  $z$ , определяющие параметры двух зеркал  $j$ -го ЭР, в соответствии с геометрической терминологией будем называть кардинальными точками и обозначать  $q_{1j} = z_{1j}$ ,  $z_{1j} + \rho_{1j}$  и  $q_{mj+1} = z_{mj+1}$ ,  $z_{mj+1} - \rho_{mj+1}$ . Кардинальные точки вычисляются по формулам [1]:

$$q_{1j} = z_j + \frac{f_j (q_{1j-1} - z_j)}{f_j + (q_{1j-1} - z_j)}, \quad q_{mj+1} = z_{j+1} + \frac{f_{j+1} (q_{mj+2} - z_{j+1})}{f_{j+1} - (q_{mj+2} - z_{j+1})}, \quad (2)$$

где  $z_j$  — координата положения линзы,  $f_j$  — ее фокусное расстояние;  $q_{11}$ ,  $q_{mm}$  — координаты кардинальных точек зеркал исходного резонатора.

В данной работе, исходя из общих соотношений (1) — (2), рассмотрим более подробно частный случай резонатора, заполненного одинаковыми линзами с фокусным расстоянием  $f$ , расположенными на равных расстояниях  $\Delta = z_{j+1} - z_j > 0$ . В дальнейшем учтем следующие особенности формул (2). Физически их можно интерпретировать как последовательное определение изображений кардинальных точек зеркал исходного резонатора в линзах [1] по правилам геометрической гауссовой оптики. Первая формула в (2) определяет изображение кардинальных точек первого зеркала исходного резонатора сначала в первой, затем во второй и т. д. линзах. Вторая формула дает изображение кардинальных точек второго зеркала исходного резонатора сначала в  $m-1$ -й, затем в  $m-2$ -й и т. д. линзах.

С математической точки зрения эти формулы можно интерпретировать как дробно-линейные преобразования, общие свойства которых достаточно хорошо известны. Обе формулы в (2) мало чем отличаются, и их можно упростить, если ввести новые переменные

$$p_{1j} = 1 + \frac{1}{f} (q_{1j} - z_{j+1}), \quad p_{mj+1} = 1 - \frac{1}{f} (q_{mj+1} - z_j), \quad (3)$$

тогда формулы (2) запишутся в виде

$$p_{1j} = d - \frac{1}{p_{1,j-1}}, \quad p_{mj+1} = d - \frac{1}{p_{mj+2}}, \quad (4)$$

где  $d = 2 - \Delta/f$  является фактически единственным параметром системы. Начальные значения для первой ( $p_{11}$ ) и второй ( $p_{mm}$ ) формул (3) определяются кардинальными точками зеркал исходного резонатора

$$p_{11} = \begin{cases} 1/f [f - (z_2 - z_{11})] \\ 1/f [f - (z_2 - z_{11} - \rho_{11})] \end{cases}, \quad p_{mm} = \begin{cases} \frac{1}{f} [f - (z_{mm} - z_{m-1})] \\ \frac{1}{f} [f - (z_{mm} - \rho_{mm} - z_{m-1})], \end{cases} \quad (5)$$

Фактически все четыре кардинальные точки  $j$ -го ЭР определяются по одной формуле, но с различными начальными значениями, поэтому достаточно исследовать одну рекуррентную формулу, которую можно записать также в виде простой цепной дроби ( $p_j \equiv p_{1j}$ ,  $p_1 = p_{11}$ ):

$$\dot{p}_j = d - \frac{1}{p_{j-1}} = d - \frac{1}{d - \frac{1}{\vdots - \frac{1}{p_1}}} \quad (6)$$

в зависимости от параметра  $d$ , начального значения  $p_1$  и числа линз  $j$ . К этой же формуле сводится также и волноводная задача на прохождении гауссова пучка через такую линзовую систему, причем для нее характерно большое число линз.

Для исследования задачи наряду с аналитическими методами удобно применить графические, дающие возможность использовать наглядные геометрические представления. Вычисление по рекуррентной формуле

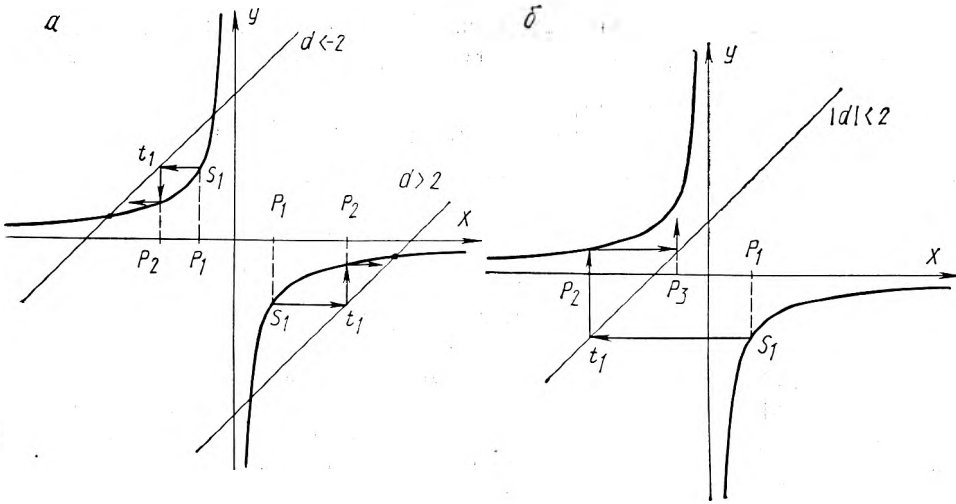


Схема итераций:  
а — случай  $|d| > 2$ ; б — случай  $|d| < 2$

(4) или (6) формально совпадает с обычным итерационным процессом решения уравнения

$$x - d = -\frac{1}{x}. \quad (7)$$

Исходя из этой аналогии можно предложить простой и довольно универсальный графический метод исследования поставленной задачи (см. рисунок). На плоскости  $xy$  представлены графики левой (прямая  $y = x - d$ ) и правой (две ветви гиперболы  $xy = -1$ ) частей уравнения (7). Если уравнение (7) имеет действительные корни и прямая пересекается с гиперболой (см. рисунок, а), итерации с увеличением  $j$  сходятся к одному и тому же значению независимо от начальных условий. При  $d < -2$  ( $4f < \Delta$ ) итерации сходятся к корню  $0,5(d - \sqrt{d^2 - 4})$ , а при  $d > 2$  ( $f < 0$ ) — к корню  $0,5(d + \sqrt{d^2 - 4})$  уравнения (7). Это означает, что положение зеркала ЭР и центр его кривизны с увеличением  $j$  стремятся к одной точке. Следовательно, радиус кривизны зеркала стремится к нулю и линзовая система становится неустойчивой. Как известно [3], в волноводе такого типа лучи после прохождения конечного числа линз быстро уходят за пределы волновода, поэтому пучок разрушается.

Более разнообразные ситуации реализуются при условии  $|d| < 2$  ( $4f > \Delta$ ). В этом случае уравнение (7) не имеет действительных корней и, как следствие, итерации (6) не сходятся. На графике (см. рисунок 1, б) прямая не пересекается с гиперболой. Тем не менее этот график вполне пригоден для решения задачи. Для этого нужно начальное значение отложить на оси  $x$  (точка  $p_1$ ). Из этой точки восстанавливается перпендикуляр к оси  $x$  до пересечения с гиперболой (точка  $s_1$ ) и находится точка  $t_1$  на прямой  $y = x - d$  с той же ординатой. Абсцисса точки  $t_1$  является результатом второй итерации ( $p_2$ ). Исходя из точки  $p_2$  аналогичным построением находим результат третьей итерации и т. д. При этом непосредственно из рисунка видно, насколько могут быть разнообразны значения  $p_j$  в зависимости от начального значения  $p_1$  и параметра  $d$ . Многие качественные результаты можно получить непосредственно из графиков, которые имеют довольно общий характер. При переходе от одной линзовой системы к другой меняется только положение прямой  $y = x - d$ . Нанеся соответствующим образом серию прямых, получим достаточно простую номограмму для расчета фактически любых периодических резонаторных систем.

Однако строгие количественные соотношения удобнее получить из аналитических выражений. Учтем, что дробно-линейное преобразование (6) обладает групповыми свойствами, и, следовательно,  $p_j$  для любого  $j$

будет дробно-линейной функцией начального значения  $p_1$ . Формула (6) дает возможность определения ее коэффициентов. Нетрудно доказать, что

$$p_j = \frac{p_1 \sin j\varphi - \sin(j-1)\varphi}{p_1 \sin(j-1)\varphi - \sin(j-2)\varphi}, \quad 2 \cos \varphi = d. \quad (8)$$

Практическое значение имеет и другая форма ее записи

$$p_j = \cos \varphi - \sin \varphi \cotg(j\varphi - \alpha), \quad (9)$$

где параметр  $\alpha$  находится из уравнения

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p_1 \sin \varphi - \sin 2\varphi}{p_1 \cos \varphi - \cos 2\varphi} \quad (10)$$

и определяется через параметры системы и начальное условие  $p_1$  (или  $q_{11}$ ). Отсюда сразу виден совершенно различный характер итераций при  $|d| > 2$  и при  $|d| < 2$ . При  $|d| > 2$  параметр  $\varphi$  мнимый и тригонометрические функции заменяются на гиперболические. Итерации, как выяснено, после некоторого значения  $j$  принимают монотонный характер и сходятся к одной точке.

При  $|d| < 2$  параметр  $\varphi$  действительный и значения итераций все время осциллируют. При этом могут быть две качественно различные ситуации: либо последовательные итерации принимают все время различные значения, либо они будут периодически повторяться. Условие периодического повторения осцилляций через  $r$  итераций запишется в виде  $p_j = p_{j+r}$ . Непосредственно из (9) видно, что это возможно для

$$\varphi = s\pi/r \quad (s = 1, 2, \dots, r-1), \quad (11)$$

т. е. когда  $\varphi$  соизмеримо с  $\pi$ . Условие (11) зависит только от расположения линз и их фокусных расстояний. Независимость от начальных условий означает, что периодически повторяться будут оба параметра зеркала ЭР независимо от параметров зеркал исходного резонатора. Из (11) легко находится связь между положением линз и их фокусным расстоянием:

$$\Delta = 4f \sin^2 s\pi/2r, \quad (12)$$

где  $s$  может принимать произвольные значения. Поэтому при заданном значении фокусного расстояния по-разному, в зависимости от значения  $s$ , можно расставить линзы так, чтобы реализовывался один и тот же период повторения. Например, при  $r=4$  линзы можно расставить тройным образом:  $\Delta_{41} = f(2 - \sqrt{2})$ ,  $\Delta_{42} = 2f$ ,  $\Delta_{43} = f(2 + \sqrt{2})$ . Однако второй вариант фактически соответствует двухлинзовому периоду. Случаи повторения периодов встречаются и при других значениях. Кратных периодов не будет, если в (9) выбрать только те целые значения  $s$ , которые не имеют общего делителя с  $r$ . Кроме того, при определении периода не имеет значения знак  $d$ , если период реализуется для  $d$ , то он же реализуется и для  $-d$ . Поэтому число вариантов расстановки линз всегда будет четным и не меньше двух. По-видимому, нет простой закономерности для числа вариантов расстановки линз, реализующих заданный период. В каждом конкретном случае  $r$  из формулы (12) легко находятся все варианты реализации периода. Их число существенно зависит от числа делителей  $r$ . С учетом кратности периодов число вариантов будет  $r-1$  и если число  $r$  простое, то среди них не будет кратных.

Для различных вариантов реализации одного и того же периода параметры зеркал и структура полей промежуточных (внутри периода) ЭР будут различными. Наличие периода означает, что зеркала исходного резонатора будут одновременно зеркалами некоторых ЭР.

Рассмотрим теперь предельные случаи  $\varphi=0$  и  $\varphi=\pi$  ( $d=\pm 2$ ), когда в (8) возникают неопределенности. Раскрывая эти неопределенности, получаем

$$p_j = \pm \frac{j\rho_1 \mp (j-1)}{(j-1)\rho_1 \mp (j-2)}, \quad (13)$$

где верхний знак соответствует  $\varphi=0$ , нижний  $\varphi=\pi$ . В графическом представлении эти случаи выделяются тем, что прямая  $y=x \mp 2$  касается в точках  $(\pm 1, \mp 1)$  ветвей гиперболы, а уравнение (7) имеет кратные корни. В общем случае здесь итерации затухают и в пределе стремятся  $p_j \rightarrow \pm 1$ . Число итераций, после которого  $p_j$  достаточно близко приближается к предельному значению, зависит от  $p_1$  и может быть большим. Такая линзовая система непригодна в качестве волноводной, но может оказаться приемлемой при небольшом числе линз для резонатора.

Случай  $\varphi=0$  ( $d=2$ ) может реализоваться только при бесконечно большом фокусном расстоянии линз (реально линзы отсутствуют). При этом начальное значение  $p_1$  в соответствии с (5) равно единице и, следовательно, в соответствии с (13) все  $p_j=1$ ; все ЭР, как и следовало ожидать, совпадают с исходным резонатором без линз. Других вариантов при  $\rho_1 < \infty$  здесь нет, предельное значение  $\rho_1 = \infty$  означает простой резонатор Фабри — Перо.

При  $\varphi=\pi$  ( $d=-2$ ), когда расстояние между линзами  $\Delta=4f$ , параметры зеркал ЭР будут зависеть от параметров зеркала исходного резонатора ( $q_{11}$ ) и его расстояния до первой линзы ( $\Delta_1=z_2-z_{11}$ ). Переходя, с учетом (3), к кардинальным точкам зеркал ЭР, из (13) получим

$$\rho_{1j} = z_2 + 2f(j-3) - \frac{(z_2 - q_{11} - 2f)f}{(j-1)(z_2 - q_{11} - 2f) + f}, \quad (14)$$

где учтено, что  $z_{j+1} = z_2 + \Delta(j-1) = z_2 + 4f(j-1)$ . Сами радиусы кривизны зеркал ЭР равны

$$\rho_{1j} = f \left[ \frac{\Delta_1 - 2f}{(j-1)(\Delta_1 - 2f) + f} - \frac{\Delta_1 - 2f - \rho_1}{(j-1)(\Delta_1 - 2f - \rho_1) + f} \right]. \quad (15)$$

В зависимости от параметров зеркал исходного резонатора можно получить большое разнообразие ЭР, которые только при небольшом числе линз представляют практический интерес, так как при большом они становятся неприемлемо малой величиной.

Теперь вернемся к случаю  $|d| > 2$  и рассмотрим его более подробно. Из вышесказанного следует, что такие линзовые системы непригодны в качестве волноводов, но при небольшом числе линз могут быть использованы в качестве резонаторов. Условие  $d > 2$  реализуется только для дефокусирующих линз ( $f < 0$ ). При этом параметры  $\varphi$  и  $\alpha$  становятся мнимыми и их можно записать  $\varphi = i\theta$ , а  $\alpha = i\beta$ , тогда формула (9) принимает вид

$$p_j = e^\nu + 2 \operatorname{sh} \nu [e^{2(i\nu - \beta)} - 1]^{-1}. \quad (16)$$

Отсюда видно, что для использования таких систем в качестве резонатора необходимо не только малое значение  $j$ , но и малые значения  $\beta$  и  $\theta$ . Если  $\beta$  отрицательно и велико, то уже вторая итерация ( $j=2$ ) приводит к неприемлемо малому значению радиуса кривизны зеркал ЭР.

Большие отрицательные значения  $d$  реализуются, когда линзы расположены на далеких расстояниях ( $\Delta > 4f > 0$ ). В этом случае в формулах (8) следует положить  $\varphi = \pi + i\theta$ . При этом формула (9) будет отличаться от (16) только знаком. Поэтому процедура решения задачи для обоих случаев фактически одна и та же, хотя их физическая интерпретация будет различна.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пате́к М., Хапалюк А. П.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1984, № 3, с. 28.
2. Kogelnik H.—Bell. Syst. Techn. J., 1965, v. 44, № 3, p. 455.
3. Маркузе Д. Оптические волноводы.— М., 1974.

## ЯДЕРНОЕ РАССЕЯНИЕ БЫСТРЫХ НЕЙТРОНОВ КРИСТАЛЛАМИ

В последние годы интенсивно изучаются процессы прохождения быстрых частиц различного типа через кристаллические среды. Возникающие при этом эффекты представляют не только чисто научный, но и большой практический интерес [1, 2].

Известно, что влияние среды на процесс рассеяния определяется величиной передаваемого импульса  $\vec{p} = \hbar\vec{q}$  и становится существенным при выполнении условия [3]:

$$q \ll \frac{\hbar}{d}, \quad (1)$$

где  $q = |\vec{k} - \vec{k}'|$ ;  $\vec{k}$  и  $\vec{k}'$  — импульс частицы до и после рассеяния;  $d$  — характерное расстояние между соседними рассеивающими центрами.

Рассеяние частиц высоких энергий характеризуется резко выраженной направленностью вперед, при этом переданный импульс оказывается почти поперечным  $\vec{k}(\vec{q} \sim \vec{q}_\perp)$ , и для его продольной составляющей начинает выполняться условие (1). Таким образом, при определенных углах влета быстрых частиц в кристалл могут наблюдаться интерференционные явления, приводящие к значительному усилению процессов рассеяния.

В данной работе рассматривается ядерное рассеяние быстрых нейтронов ( $\sim$  МэВ), проходящих через монокристалл под малым углом ( $\sim 1'$ ) к кристаллографической оси  $z$ . В этом случае условие (1) выполняется, и должно наблюдаться когерентное усиление взаимодействия.

Дифференциальное сечение упругого когерентного рассеяния нейтронов на кристалле может быть представлено в виде:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|A|^2}{N} \left| \sum_i^N \exp(i\vec{q}\vec{r}_i) \right|^2. \quad (2)$$

Здесь  $A$  — амплитуда ядерного рассеяния нейтронов на закрепленном атоме;  $\vec{r}_i$  — радиус-вектор  $i$ -го ядра решетки;  $N$  — число рассеивающих центров, черта сверху означает усреднение по тепловым колебаниям решетки.

Рассматривая рассеяние лишь на малые углы  $\theta \ll 1$  и используя условия  $k'^2 = k^2$  и  $\vec{q}_\perp = 2\pi\vec{\tau}_\perp$ , проведем в (1) суммирование по ядрам в поперечной плоскости кристалла, считая  $N_x, N_y$  бесконечно большими (пучок нейтронов проходит через кристалл почти параллельно кристаллографической оси  $z$ ). В этом случае для полного сечения ядерного рассеяния  $\sigma(k)$  можно получить следующее выражение:

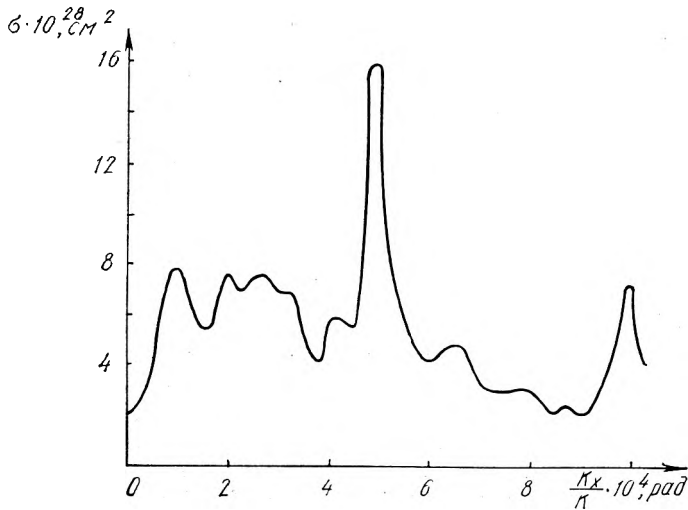
$$\sigma(\vec{k}) = \frac{(2\pi)^2 |A|^2}{abN_z k^2} \sum_{\vec{\tau}_\perp} \exp[-(2\pi\vec{\tau}_\perp)^2 \bar{u}^2] \cdot |S(\vec{\tau}_\perp)|^2 \frac{\sin^2(1/2N_z q_z(\vec{\tau}_\perp)c)}{\sin^2(1/2q_z(\vec{\tau}_\perp)c)}, \quad (3)$$

$\bar{u}^2$  — средний квадрат амплитуды тепловых колебаний;  $|S(\vec{\tau}_\perp)|^2$  — структурный фактор элементарной ячейки;  $N_z$  — число рассеивающих центров вдоль оси  $z$ , выбранной перпендикулярно к входной поверхности кристалла;  $\vec{\tau}$  — вектор обратной решетки с координатами  $n_1/a, n_2/b, n_3/c$ . Составляющая переданного импульса по оси  $z$

$$q_z = -\frac{1}{2k} [(2\pi\vec{\tau}_\perp)^2 + 2(2\pi\vec{\tau}_\perp \vec{k}_\perp)].$$

Расчет полного сечения как функции угла влета проводился на ЭВМ. В качестве мишени был выбран кристалл вольфрама, имеющий ОЦК-решетку с периодом  $a = 3,17 \cdot 10^{-8}$  см и  $\sqrt{\bar{u}^2} = 5 \cdot 10^{-10}$  см при  $T = 300$  К.





Зависимость полного сечения ядерного рассеяния нейтронов от углов влета

Рассматривалось падение нейтронов на кристалл в плоскости  $xz$  ( $k_y=0$ ). Соответственно принятым входным параметрам сечение (3) примет вид:

$$\sigma(k) = \frac{(2\pi)^2 |A|^2}{N_z a^2 k^2} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{4\pi^2 u^2}{a^2} [n_1^2 + n_2^2]\right] \times \\ \times \frac{\sin^2 \left\{ \pi N_z \left[ \frac{k_x}{k} n_1 + \frac{\pi}{ak} (n_1^2 + n_2^2) \right] \right\}}{\sinh^2 \left\{ \pi \left[ \frac{k_x}{k} n_1 + \frac{\pi}{ak} (n_1^2 + n_2^2) \right] \right\}} \cdot [1 + \cos \pi (n_1 + n_2)]^2. \quad (4)$$

Расчет (4) проводился для нейтронов с  $E_n=1$  МэВ ( $k=2 \cdot 10^{12}$  см $^{-1}$ ) на интервале углов влета  $k_x/k=0 \div 10^{-3}$  рад. Число рассеивающих центров  $N_z$  вдоль оси  $z$  выбиралось равным  $10^4$ ,  $10^6$  и  $10^8$ , что соответствует толщинам кристалла  $3 \cdot 10^{-4}$ ,  $3 \cdot 10^{-2}$  и 3 см соответственно.

Отношение синусов в (4) представляет собой быстро осциллирующую функцию, которая на исследуемом интервале углов влета имеет около 60 максимумов по  $k_x/k$  из-за обращения аргумента синуса в ноль при некоторых  $n_1 < 0$ . Эти максимумы имеют порядок  $N^2$  и полуширины  $h = \frac{1}{n_1 N}$ . Для толстых кристаллов  $h$  очень малы и необходимо провести усреднение по угловому расхождению пучка  $\Delta\theta$ , в результате которого максимумы существенно понизятся.

Что касается произвольных углов влета, то для любого  $k_x/k$  существует главный член суммы с  $n_1=0$  и  $n_2=0$ , описывающий рассеяние вперед и также имеющий порядок  $N^2$ . Из сказанного следует, что ядерное сечение для тонких кристаллов ( $l \sim 3 \cdot 10^{-4}$  см) должно иметь хорошо выраженную ориентационную зависимость от углов влета, которая должна исчезнуть для толстых кристаллов при усреднении по  $\Delta\theta$ .

Результаты расчета полного сечения по формуле (4) для кристалла  $W$  толщиной  $l=3 \cdot 10^{-4}$  см ( $N_z=10^4$ ) представлены на рисунке. Видно, что сечение представляет собой сильно осциллирующую функцию углов влета, достигающую в главном максимуме ( $\frac{k_x}{k}=4,96 \cdot 10^{-4}$  рад) значения  $1,6 \cdot 10^{-27}$  см $^2$ . С ростом толщины кристалла в результате усреднения по угловому расхождению пучка ( $\Delta\theta=2 \cdot 10^{-5}$ ) осцилляции уменьшаются и для кристаллов  $l \approx 1$  см вовсе исчезают ( $N_z=10^8$ ). Сечения упругого ядерного рассеяния в этом случае достигают значений полного упругого и неупругого сечения рассеяния нейтронов на одном ядре. Таким образом,

проведенный расчет подтверждает когерентное усиление процессов взаимодействия в кристаллической среде.

Автор выражает благодарность профессору В. Г. Барышевскому за полезное обсуждение и ценные замечания, сделанные в процессе выполнения работы, а также старшему научному сотруднику А. В. Тетереву за большую помощь в расчетах на ЭВМ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Барышевский В. Г. Канализование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях.— Минск, 1982.
2. Дюмин А. Н., Коренблит И. Я., Рубан В. А., Токарев Т. В.— Письма ЖЭТФ, 1980, т. 31, № 7, с. 413.
3. Тер-Микаэлян М. А. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях.— Ереван, 1969.

УДК 534.26

А. З. АБДУЛИН, А. А. ГУМЕН  
Н. Р. ПОСЛЕДОВИЧ, В. М. ТКАЧЕНКО

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФРАКЦИИ СВЕТА НА МНОГОМЕРНЫХ СТРУКТУРАХ С ПОМОЩЬЮ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ

Исследование дифракции света в лабораториях физического практикума проводится обычно на одномерной системе щелей (дифракционной решетке) [2]. Однако современное состояние прикладных задач оптики (голография, дифракция на объемных структурах) требует постановки новых экспериментальных задач. Одной из таких задач может быть исследование дифракции света на стоячих ультразвуковых волнах, теория которой достаточно развита, проста и подробно описана в литературе [3, 4]. Недостатком с точки зрения постановки в физическом практикуме подобных лабораторных работ является относительная сложность отдельных узлов и установки в целом. Поэтому особый интерес представляет применение в качестве объекта, на котором происходит дифракция, вещества, моделирующего стоячую ультразвуковую волну. Таким объектом может служить холестерический жидкий кристалл, ориентированный гомеотропно, т. е. ось спирали расположена в плоскости подложек.

В 1921 г. Бриллюэн предсказал, что при освещении жидкости, в которой существуют упругие стоячие волны небольшой длины, видимым светом возникает дифракция света на стоячих ультразвуковых волнах. Наличие стоячей ультразвуковой волны длины  $\Lambda$  создает в среде слоистую периодическую структуру, при этом расстояние между последовательными плоскостями максимальной плотности равно  $\Lambda$ .

Пусть вдоль оси  $X$  (рис. 1) распространяется плоская упругая волна, закон распространения которой описывается уравнением

$$\rho = \rho_0 + \Delta\rho_0 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{2\Lambda} x\right), \quad (1)$$

где  $\rho$  — мгновенное значение плотности;  $\rho_0$  — значение плотности среды при отсутствии упругих волн;  $\Delta\rho_0$  — амплитуда изменения плотности в упругой волне;  $\omega$  — циклическая частота упругих колебаний;  $2\Lambda$  — длина упругой волны. Отраженная от плоской преграды волна интерферирует с падающей, при этом возникает стоячая волна длины  $\Lambda$ .

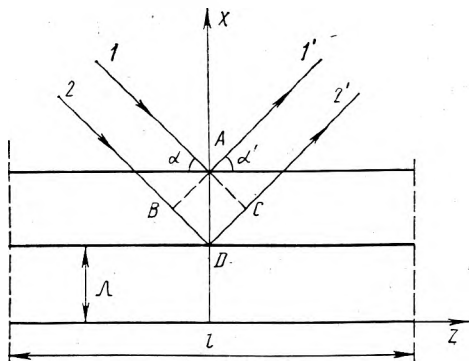


Рис. 1. Рассеяние световых волн на периодической структуре

Световые волны, падающие на вещество, вызывают в нем электрическую поляризацию, которую можно количественно охарактеризовать дипольным моментом единицы объема  $\vec{P} = \frac{\epsilon-1}{4\pi} \cdot \vec{E}$ , где  $\vec{E}$  — электрическое поле падающей световой волны.

Из теории излучения электромагнитных волн следует, что изменение во времени дипольного момента приводит к излучению электромагнитных волн. Вследствие периодичности структуры ультразвукового поля (при возникновении стоячей волны длины  $\Lambda$ ) рассеяние световых волн будет аналогично дифракции на объемной решетке, где  $\alpha + \alpha' = \Theta$  — угол дифракции. Как и в случае дифракции Рентгена, разность хода двух соседних интерферирующих лучей (1 и 2):  $\Delta = BD + DC$ . Как видно из рис. 1,  $\Delta = 2\Lambda \sin \alpha$ ; если учесть, что  $\alpha = \alpha'$ , то  $\Delta = 2\Lambda \sin \frac{\Theta}{2}$ .

Условие максимума интерференционной картины имеет вид  $2\Lambda \sin \frac{\Theta}{2} = m\lambda$  или  $2\Lambda \sin \alpha = m\lambda$ , где  $\lambda$  — длина световой волны.

В случае малых амплитуд ультразвуковых колебаний для амплитуды дифрагировавшего света  $E_d^0$  выражение запишется в виде  $E_d^0 = E_1^0 + E_2^0$ , где

$$E_1^0 = E_{01} \cdot \frac{\sin\left(k_1 \cdot \frac{a}{2}\right)}{k_1 \cdot \frac{a}{2}} \cdot \frac{\sin\left(k_2 \cdot \frac{b}{2}\right)}{k_2 \cdot \frac{b}{2}} \cdot \frac{\sin\left(k_3 \cdot \frac{l}{2}\right)}{k_3 \cdot \frac{l}{2}},$$

$$E_2^0 = E_{02} \cdot \frac{\sin\left(k'_1 \cdot \frac{a}{2}\right)}{k'_1 \cdot \frac{a}{2}} \cdot \frac{\sin\left(k'_2 \cdot \frac{b}{2}\right)}{k'_2 \cdot \frac{b}{2}} \cdot \frac{\sin\left(k'_3 \cdot \frac{l}{2}\right)}{k'_3 \cdot \frac{l}{2}}.$$

Здесь  $l$  — ширина волнового фронта вдоль  $Z$ ,  $a$  — вдоль  $X$ ,  $b$  — вдоль  $Y$ , а

$$k_1 = 2\pi \left[ \frac{\sin \alpha - \sin \alpha'}{\lambda} - \frac{1}{\Lambda} \right], \quad k'_1 = 2\pi \left[ \frac{\sin \alpha - \sin \alpha''}{\lambda} - \frac{1}{\Lambda} \right],$$

$$k_2 = k'_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sin \beta, \quad k_3 = k'_3 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot [\cos \alpha - \cos \alpha'],$$

где  $\beta$  — угол дифракции в плоскости  $YOZ$ ,  $\alpha + \alpha'$  — угол дифракции в направлении, отличном от направления на нулевой максимум. Поля  $E_1^0$  и  $E_2^0$  определяют спектр первого порядка.

Наиболее важными уравнениями, определяющими соотношения интенсивностей в спектре дифрагировавшего света, являются соотношения для  $k_1$  и  $k'_1$ , так как они определяют угловые зависимости в расположении дифракционных максимумов в плоскости наблюдения. Условия максимумов могут быть записаны в виде

$$\frac{\sin \alpha - \sin \alpha'}{\lambda} - \frac{1}{\Lambda} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\sin \alpha - \sin \alpha''}{\lambda} - \frac{1}{\Lambda} = 0.$$

В случае, когда падающие световые лучи параллельны волновым фронтам ( $\alpha = 0$ ), условия максимумов имеют вид (рис. 2). Второе условие максимумов запишется в форме  $\frac{2\pi}{\Lambda} \sin \beta = 0$ , а третье  $\frac{2\pi}{\lambda} (\cos \alpha - \cos \alpha') = 0$ .

Обычно в случае дифракции на ультразвуковых волнах  $\alpha$  и  $\alpha'$  близки к нулю. Тогда условие  $\alpha = -\alpha'$  выражает тот факт, что дифрагировавший луч распространяется в направлении, симметричном падающему лучу относительно плоскости волнового фронта ультразвука (см. рис. 1). Тогда, учитывая это, в равенстве  $\frac{\sin \alpha - \sin \alpha'}{\lambda} - \frac{1}{\Lambda} = 0$  получим Брэгговское условие дифракции первого порядка на объемной решетке с постоянной  $\Lambda$ :  $2\Lambda \sin \alpha' = \lambda$ .

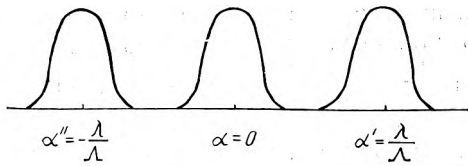


Рис. 2. Распределение интенсивностей по максимумам дифракционной картины

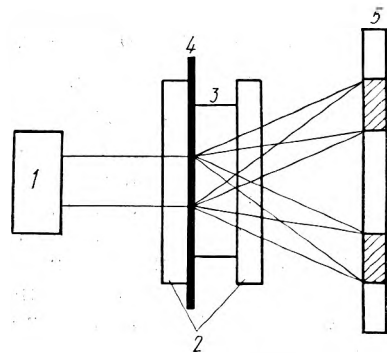


Рис. 3. Оптическая схема экспериментальной установки

В данной работе в качестве объемной решетки для изучения дифракции света берется тонкий слой холестерического жидкого кристалла с периодичностью, равной шагу спирали [1].

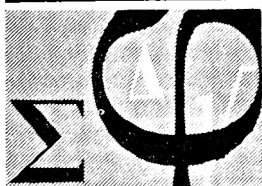
Оптическая схема экспериментальной установки показана на рис. 3. Свет, посылаемый оптическим квантовым генератором (1), падает на ячейку, состоящую из стеклянных пластин (2), на одну из которых нанесен прозрачный нагреватель (4), и холестерического кристалла, помещенного между ними (3). Свет, дифрагировавший на периодической структуре холестерического жидкого кристалла с периодом  $\Lambda = P$  (где  $P$  — шаг спирали холестерика), в виде колец наблюдается на экране (5).

С помощью описанной экспериментальной установки можно определить периодичность изучаемой структуры, зависимость угла дифракции от длины волны (при использовании источника сплошного спектра). Определив предварительно периодичность структуры, по углу дифракции можно вычислить длину волны источника, предлагаемого для изучения.

Изучение подобных периодических структур наряду со стоячими ультразвуковыми волнами в жидкостях существенно расширяют представления студентов о дифракции на периодических структурах и методах их изучения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Де Жен П. Физика жидких кристаллов.— М., 1977.
2. Физический практикум: Электричество и оптика / Под ред. В. И. Ивероной.— М., 1968.
3. Королев Ф. А. Курс общей физики.— М., 1974.
4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики.— М., 1973.



УДК 518.5

ДАНГ ДИНЬ КУАНГ

## ОЦЕНКА СТЕПЕНИ ДОСТОВЕРНОСТИ ГИПОТЕЗ О ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ В БУЛЕВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПРИЗНАКОВ

1. **Постановка задачи.** Предположим, что существует некоторое множество  $M_p$  реальных объектов, причем  $M_p \subset M$ , а множество  $M$  представляет собой булево пространство  $n$  признаков ( $M = (x_1, \dots, x_n) / x_i = \{0, 1\}$ ,  $i = 1, n$ ). Пусть в результате эксперимента удалось обнаружить лишь его подмножество  $M_s$ . Будем считать, что при этом выполняются следующие условия:

а) выборка  $M_s$  из  $M_p$  произведена случайным образом в соответствии с равномерным законом распределения;

б) структура множества  $M_p$  подчинена некоторым закономерностям, притом достаточно сильным, чтобы они могли найти отражение в множестве  $M_s$ ;

в) мощности множеств  $M_s$ ,  $M_p$  и  $M$  существенно различаются ( $m = |M_s| \ll |M_p| \ll |M| = 2^n$ ).

В этом случае оказывается возможным «реконструировать» множество  $M_p$  на основе информации, содержащейся в множестве  $M_s$ . В работах [1, 2] предложен способ такой реконструкции, основанный на гипотезе об имплицативном характере закономерностей, связывающих отдельные группы признаков. В настоящей работе исследуется более частный, но, безусловно, важный случай выявления функциональных связей между признаками.

Представив множества  $M_s$  и  $M_p$  соответственно булевыми матрицами  $V_s$  и  $V_p$  (столбцы которых поставлены в соответствие признакам, а строки — объектам), будем говорить, что между набором признаков  $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l}\}$  и признаком  $x_k$  существует функциональная связь (ранга  $l$ ), если в  $V_p$  нет строк, совпадающих по значению в столбцах  $i_1, i_2, \dots, i_l$  и имеющих различные значения в столбце  $k$  (такое условие назовем условием  $A$ ).

Выполнение условия  $A$  в матрице  $V_s$  может служить основанием для выдвижения гипотезы о существовании соответствующей функциональной связи в матрице  $V_p$ . Однако принимать эту гипотезу разумно лишь в том случае, когда она будет обладать высокой степенью достоверности, т. е. когда будет достаточно мала вероятность  $P(l, m, n)$  того, что условие  $A$  будет выполняться, по крайней мере, для одной группы столбцов матрицы  $V_s$ , если последняя будет выбрана случайным образом из множества  $B$  различных булевых матриц размером  $m$  на  $n$  ( $|B| = 2^{mn}$ ).

Задавшись некоторым пороговым значением  $\varepsilon$ , можно принимать гипотезу о функциональной связи между некоторыми признаками, если соответствующая ей вероятность будет удовлетворять условию  $P(l, m, n) \leq \varepsilon$ .

Непосредственное количественное определение зависимости  $P$  от па-

раметров  $l$ ,  $m$ , и  $n$  оказывается весьма сложным. Поэтому заменим его более простым вычислением величины, которая может служить оценкой сверху для  $P(l, m, n)$ , математического ожидания  $W(l, m, n)$  числа различных гипотез о функциональной связи ранга  $l$ , которые могут быть выдвинуты при рассмотрении случайной матрицы  $V$ , размером  $m$  на  $n$  (см. также [1]). В области малых значений, а именно в этой области и могут приниматься гипотезы интересующего нас типа,  $W$  достаточно хорошо аппроксимирует  $P$ .

Определение величины  $W(l, m, n)$  сводится к задаче перечисления всех способов размещения  $m$  помеченных шаров по  $k$  помеченным ячейкам ( $k=1, 2, \dots, \min(m, 2^l)$ ) (см. [3]):

$$W(l, m, n) = n C_{n-1}^l 2^{-(l+1)m} \sum_{k=1}^{\min(m, 2^l)} C_2^k l^{2k} B(k, m),$$

где

$$B(k, m) = \sum_{\substack{h_1+h_2+\dots+h_k=m \\ h_i \geq 1}} \frac{m!}{h_1! h_2! \dots h_k!}. \quad (1)$$

Отсюда для вероятности  $P(l, m, n)$  получаем следующую оценку:

$$P(l, m, n) \leq n C_{n-1}^l 2^{-(l+1)m} \sum_{k=1}^{\min(m, 2^l)} C_2^k l^{2k} B(k, m). \quad (2)$$

В связи с этой оценкой возникает необходимость вычислить правую часть неравенства (2). Основная трудность вычисления этого выражения заключается в определении величины  $B(k, m)$ .

Во второй части этой работы излагаются: простой алгоритм, позволяющий довольно быстро вычислить оценку (2) при не очень больших значениях параметров  $l, m, n$ ; формула, дающая возможность аппроксимировать правую часть неравенства (2) при больших  $m, n$ .

По указанному алгоритму выполнены численные расчеты на ЭВМ (табл. 1, 2).

Оценка (2) и ее способ вычисления позволяют ответить на следующие вопросы, имеющие важное значение при обнаружении закономерностей в таблицах экспериментальных данных (при указанных условиях).

Как определить граничное значение  $l$ , при котором еще имеет смысл искать функциональные закономерности, если известны значения  $m$  и  $n$ ?

Каков должен быть объем выборки  $m$ , при котором могут приниматься гипотезы о наличии функциональных закономерностей ранга  $l$ ?

**2. Вычисление оценки достоверности гипотез о функциональных закономерностях.** Для суммы  $B(k, m)$ , на первый взгляд, можно предложить алгоритм вычисления, основанный на переборе всех возможных

Таблица 1

Значения вероятности  $p(l, m)$  и математическое ожидание числа функциональных зависимостей в случае  $m=40, n=30$

Значения $p(l, m)$ и $w(l, m, n)$		$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$
$p(l, m)$	Точное	$3,638 \cdot 10^{-12}$	$1,455 \cdot 10^{-11}$	$2,284 \cdot 10^{-10}$	$3,113 \cdot 10^{-8}$	$1,660 \cdot 10^{-5}$
	Приближенное	$3,638 \cdot 10^{-12}$	$1,455 \cdot 10^{-11}$	$2,328 \cdot 10^{-10}$	$5,960 \cdot 10^{-8}$	$3,906 \cdot 10^{-3}$
$w(l, m, n)$	Точное	$3,165 \cdot 10^{-9}$	$1,772 \cdot 10^{-7}$	$2,504 \cdot 10^{-5}$	$2,218 \cdot 10^{-2}$	$5,915 \cdot 10^1$
	Приближенное	$3,165 \cdot 10^{-9}$	$1,772 \cdot 10^{-7}$	$2,552 \cdot 10^{-5}$	$4,247 \cdot 10^{-2}$	$13,916 \cdot 10^3$

Таблица 2

Максимально допустимое значение ранга  $l$   
 выявляемых функциональных закономерностей  
 как функция числа признаков  $n$  и объема выборки  $m$   
 (при  $\varepsilon=0,01$ )

$n$	$m$					
	15	20	25	30	35	40
10	1	2	3	3	4	4
30	0	1	2	2	3	3
50	0	1	1	2	3	3
100	0	0	1	2	2	3

композиций числа  $m$  из  $k$  частей. Объем перебора можно сократить до числа разбиений числа  $m$  на  $k$  частей. Однако с ростом  $m$  число разбиений (тем более число композиций) быстро возрастает, так что вычислить  $B(k, m)$  при сравнительно больших  $k, m$  по этому способу невозможно даже на ЭВМ.

В [4] указано следующее рекуррентное отношение:

$$B(k, m) = \sum_{i=1}^m C_m^i B(k-1, m-i). \quad (3)$$

По этой формуле можно составить программу для вычисления суммы  $B(k, m)$  на ЭВМ. Заметим, что  $B(k, m)=0$ , если  $k>m$ . Поэтому в случае  $k<m$  для определения суммы  $B(k, m)$  по формуле (3) фактически нужно вычислить  $(k-1)(m-k+1)$  промежуточных сумм:

$$B(k-j, m-j), B(k-j, m-j-1), \dots, B(k-j, m-j-(m-k)), \\ j=1, 2, \dots, k-1.$$

На основе формулы (3) легко вывести более компактную формулу:

$$B(k, m) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j C_k^j (k-j)^m. \quad (4)$$

Но для определения правого выражения неравенства (2) нужно вычислить все суммы  $B(k, m)$  при  $k=1, 2, \dots, \min(m, 2^l)$ , поэтому предлагаемый ниже алгоритм, на наш взгляд, представляется более удобным и быстрым алгоритмом для вычисления оценки (2).

**Утверждение 1.**  $B(k, m)$  при  $1 \leq k \leq m$  определяется по следующей рекуррентной схеме:

$$B(1, m) = 1.$$

$$B(j, m) = j^m - \sum_{i=1}^{j-1} b_{ji} B(j-i, m)$$

при  $j=2, 3, \dots, k$ .

Коэффициенты  $b_{ji}$  на  $j$ -ом шаге вычисляются по коэффициентам  $(j-1)$ -го шага:

$$b_{ji} = b_{j-1, i-1} + b_{j-1, i} \text{ при } i=2, 3, \dots, j-2;$$

$$b_{j1} = j;$$

$$b_{jj-1} = b_{j-1, j-2} + 1.$$

**Доказательство.** Очевидно,  $B(1, m) = 1$ . Известна также формула

$$\sum_{\substack{h_1+h_2+\dots+h_k=m \\ h_i \geq 0}} \frac{m!}{h_1! h_2! \dots h_k!} = k^m.$$

С другой стороны, из чисто комбинаторного соображения можно заключить также:

$$\sum_{\substack{h_1+h_2+\dots+h_k=m \\ h_i \geq 0}} \frac{m!}{h_1! h_2! \dots h_k!} = \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i B(k-i, m).$$

Отсюда получим формулу

$$B(k, m) = k^m - \sum_{i=1}^{k-1} C_k^i B(k-i, m) \quad (\text{при } k = 1, 2, \dots, m). \quad (5)$$

Положим  $C_j^i = b_{ji}$  при  $j=2, \dots, k, i=1, \dots, j-1$ . Принимая во внимание формулу  $C_j^i = C_{j-1}^{i-1} + C_{j-1}^i$ , приходим к утверждению 1.

В [4] доказано, что при  $k, m$ , стремящихся к бесконечности таким образом, что величина  $ke^{-m/k}$  остается ограниченной, справедливо предельное соотношение:

$$B(k, m) - k^m \exp(ke^{-m/k}) \rightarrow 0. \quad (6)$$

При  $k, m$ , удовлетворяющих указанному условию, формула (6) позволяет приближенно определить  $B(k, m)$  при больших  $k, m$ .

Формулы (4), (5), все-таки, позволяют вычислить  $B(k, m)$  при небольших  $k$  и  $m$ . Кроме (6), докажем еще одно утверждение, дающее простую и непосредственную аппроксимацию правой части оценки (2).

**Утверждение 2.** При фиксированном  $l$  и  $m \rightarrow \infty$  справедливо следующее предельное соотношение:

$$2^{-(l+1)m} \sum_{k=1}^{\min(m, 2^l)} C_2^k l 2^k B(k, m) - 2^{-m+2^l} \rightarrow 0. \quad (7)$$

**Доказательство.** На основании (4) имеем:

$$\begin{aligned} 2^{-(l+1)m} \sum_{k=1}^{\min(m, 2^l)} C_2^k l 2^k B(k, m) &\sim 2^{-(l+1)m} \sum_{k=1}^{\min(m, 2^l)} C_2^k l 2^k k^m \sim \\ &\sim 2^{-(l+1)m} \sum_{k=1}^{2^l} C_2^k l 2^k k^m \sim 2^{-(l+1)m} 2^{2^l} (2^l)^m \sim 2^{-m+2^l}. \end{aligned}$$

Оцененная величина в утверждении 2 является ничем иным, как вероятностью  $p(l, m)$  появления функциональной закономерности в  $l+1$  выбранных столбцах выборки длины  $m$  (при этом «столбец-значение» этой функциональной зависимости считается уже выбранным).

Применяем утверждение 2 для приближенного вычисления величины  $p(l, m)$  и  $W(l, m, n)$ :

$$(W(l, m, n) = n C_{n-1}^l p(l, m) \approx n C_{n-1}^l 2^{-m+2^l}).$$

В таблицах иллюстрируются результаты вычисления точного значения  $p(l, m)$  и  $W(l, m, n)$  на ЭВМ и приближенного значения  $p(l, m)$  по формуле (7). В табл. 1 указаны некоторые значения  $p(l, m)$  и  $W(l, m, n)$  в случае  $m=40, n=30$ . Из табл. 1 видно, что при данных значениях  $m, n$  нельзя принимать гипотезу о функциональных закономерностях ранга выше трех (при  $\epsilon=0,01$ ).

В табл. 2 указаны максимальные значения ранга выявляемых функциональных закономерностей как функция от  $n$  и  $m$  (при  $\epsilon=0,01$ ). Здесь  $W(l, m, n)$  вычисляется с помощью ЭВМ по алгоритму, указанному в утверждении 1. ( $W(l, m, n)$  определяются точным способом).

Заметим, что нас интересуют только гипотезы о функциональных закономерностях с достаточно высокой степенью достоверности. Оказывается, что этим закономерностям соответствуют малые (по сравнению с



объемом выборки  $m$ ) значения ранга  $l$ . Поэтому утверждение 2 хорошо применимо для практического вычисления оценки (2). Аналогичная табл. 2 таблица, вычисляемая с помощью приближенной формулы (7), не отличается от данной таблицы (при тех же  $m, n$  и  $\varepsilon=0,01$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Закревский А. Д.— Докл. АН БССР, 1981, т. 25, № 3, с. 236.
2. Закревский А. Д.— Кибернетика, 1982, № 1, с. 1.
3. Закревский А. Д., Данг Динь Куанг.— Докл. АН БССР, 1983, т. 27, № 3, с. 225.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложений.— М., 1967, т. 1.

УДК 519.21

В. П. КИРЛИЦА

### ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ДВУСТОРОННИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассмотрим следующую задачу линейного стохастического программирования:

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$P \left\{ \xi_i \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \eta_i \right\} \geq \alpha_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где  $\xi_i, \eta_i, i = \overline{1, m}$  — независимые случайные величины, а остальные элементы, участвующие в (1), (2), — детерминированные величины;  $1/2 < \alpha_i \leq 1, i = \overline{1, m}$ .

В монографии [1] рассмотрена задача (1), (2) для случая, когда в (2) случайные величины  $\xi_i$  отсутствуют. Подробная библиография работ по стохастическому программированию содержится в [1, 2]. Задача (1), (2) является естественным стохастическим аналогом задач обычного линейного программирования с двусторонними ограничениями. В [3] рассмотрена задача (1), (2) для случая, когда случайные величины  $\xi_i, \eta_i$  распределены равномерно. Показано, что в этом случае задача (1), (2) сводится к задаче обычного линейного программирования с двусторонними ограничениями.

В данной работе, которая является развитием [4], рассматривается случай, когда одна из величин  $\xi_i, \eta_i$  распределена нормально, а другая — равномерно. Показано, что и тогда задача (1), (2) сводится к задаче обычного линейного программирования с двусторонними ограничениями.

Рассмотрим, каким образом вероятностные ограничения (2) сводятся к детерминированным. Поскольку ограничения (2) однотипны, но в дальнейшем, для упрощения обозначений, будем рассматривать ограничение:

$$P \left\{ \xi \leq \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq \eta \right\} \geq \alpha, \quad 1/2 < \alpha \leq 1. \quad (3)$$

В [3] показано, что стохастическое ограничение (3) сводится к детерминированному ограничению:

$$f(t) = F_{\xi}(t)[1 - F_{\eta}(t)] \geq \alpha, \quad (4)$$

где  $F_{\xi}(t), F_{\eta}(t)$  — функции распределения случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ , а  $t = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ . Ниже будет показано, что функция  $f(t)$  является унимо-

дальной, т. е. имеет один локальный максимум, который совпадает с глобальным. В этом случае неравенство (4) для  $\alpha \leq f_1$  разрешимо относительно  $t: t_1 \leq t \leq t_2$ . Здесь и в дальнейшем через  $t_1$  и  $t_2$  обозначены корни уравнения  $f(t) = \alpha$ , а через  $f_1$  — максимальное значение функции  $f(t)$ . Итак, если неравенство (4) разрешимо относительно  $t$ , то ограничение (3) сводится к детерминированному ограничению:

$$t_1 \leq \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq t_2. \quad (5)$$

Таким образом, при сведении ограничения (3) к детерминированному ограничению (5) основным моментом является вычисление значений  $f_1$ ,  $t_1$  и  $t_2$ . Опишем процедуру вычисления этих значений.

1. Пусть случайная величина  $\xi$  распределена равномерно на интервале  $[a, b]$ , а случайная величина  $\eta$  распределена нормально,  $\eta \in N(\beta, \sigma^2)$ . Функция  $f(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , в этом случае задается формулой:  $f(t) =$

$$= \frac{t-a}{b-a} \cdot \left[ 1 - \Phi\left(\frac{t-\beta}{\sigma}\right) \right], \text{ где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-s^2/2} ds \text{ — табулированная функция. Возможны следующие случаи: 1) } b \leq \beta, \text{ 2) } a < \beta < b, \text{ 3) } \beta \leq a.$$

1. Рассмотрим сначала первый случай:  $b \leq \beta$ . Покажем, что функция  $f(t)$  — унимодальна. Для  $t \geq b$ ,  $f(t) = 1 - F_\eta(t)$  и для этих значений  $t$  функция  $f(t)$  монотонно убывает. Для  $a \leq t \leq b$  производная  $f'(t)$  функции  $f(t)$  вычисляется по формуле:

$$f'(t) = \frac{1}{b-a} \cdot \left[ 1 - \Phi\left(\frac{t-\beta}{\sigma}\right) \right] - \frac{t-a}{\sigma(b-a)} \cdot \varphi\left(\frac{t-\beta}{\sigma}\right), \quad (6)$$

где функция  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  — табулирована. Из (6) видно, что  $f'(t)$

является разностью между монотонно убывающей функцией  $\frac{1}{b-a} \times \left[ 1 - \Phi\left(\frac{t-\beta}{\sigma}\right) \right]$  и монотонно возрастающей функцией  $\frac{t-a}{\sigma(b-a)} \times \varphi\left(\frac{t-\beta}{\sigma}\right)$  и  $f'(a+0) > 0$ . Это означает, что на интервале  $[a, b]$  производная  $f'(t)$  либо положительна, либо не более одного раза обращается в ноль. Таким образом показано, что  $f(t)$  — унимодальная функция.

Итак, поведение функции  $f(t)$ ,  $t \in [a, b]$  существенным образом зависит от знака  $f'(b-0)$ . Значение

$$f'(b-0) = \frac{1}{b-a} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{b-\beta}{\sigma}\right) \right] - \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{b-\beta}{\sigma}\right)$$

легко можно вычислить, поскольку функции  $\Phi(x)$  и  $\varphi(x)$  табулированы.

1.1. Если  $f'(b-0) \geq 0$ , то на интервале  $[a, b]$  функция  $f(t)$  строго монотонно возрастает, достигая в точке  $t=b$  максимума  $f_1 = f(b) = 1 - \Phi\left(\frac{b-\beta}{\sigma}\right)$ . Сравниваем уровень  $\alpha$  с  $f_1$ . Если  $\alpha > f_1$ , то задача (1),

(2) не имеет решения. Если  $\alpha = f_1$ , то  $t_1 = t_2 = b$ . Если  $\alpha < f_1$ , то корни  $t_1$  и  $t_2$  обязаны принадлежать отрезку  $[\underline{m}, \bar{m}]$ , где  $\underline{m}$  — корень уравнения  $F_\xi(t) = \alpha$ , а  $\bar{m}$  — корень уравнения  $1 - \Phi\left(\frac{t-\beta}{\sigma}\right) = \alpha$ , т. е.  $\underline{m} = a + \alpha(b-a)$ ,

$t_2 = \bar{m} = \beta + \sigma \Phi^{-1}(1-\alpha)$ . Вычислим приближенное значение корня  $t_1$ . Для этого зададим достаточно малый шаг  $h > 0$ , который будет характеризовать точность вычислений. Последовательно вычисляем значения  $f(t) - \alpha$  в точках  $y_k = \underline{m} + kh$ ,  $k = 0, 1, \dots, \left[ \frac{b-\underline{m}}{h} \right]$ , где символ  $[s]$  означает целую часть числа  $s$ . Значение  $y_i$ , для которого  $f(y_i) - \alpha \leq 0$ , а  $f(y_{i+1}) - \alpha > 0$ , принимаем за приближенное значение  $t_1$ , т. е.  $t_1 = y_i$ .

1.2. Рассмотрим теперь случай, когда  $f'(b-0) < 0$ . Здесь функция  $f(t)$  монотонно возрастает, достигая своего максимума, а затем начинает

убывать. Вычисляем значения  $\underline{m}$  и  $\bar{m}$ , которые имеют прежний смысл. Очевидно, если  $\underline{m} \geq \bar{m}$ , то исходная задача не имеет решения. Предположим, что  $\underline{m} < \bar{m}$ . Вычислим значение  $f(b) = 1 - \Phi\left(\frac{b - \beta}{\sigma}\right)$ .

1.2.1. В случае, если  $\alpha > f(b)$ , вычисляем приближенные значения  $t_1$  и  $t_2$  (если они существуют) следующим образом. Последовательно вычисляем значения функции  $f(t) - \alpha$  и ее производной  $f'(t)$  в точках  $y_k = \underline{m} + kh$ ,  $k = 0, 1, \dots, \left[\frac{\bar{m} - \underline{m}}{h}\right]$ . Значение  $t_1$  получаем, используя алгоритм пункта 1.1. Отмечаем точку  $y_s$ , для которой  $f'(y_s) \geq 0$ , а  $f'(y_{s+1}) < 0$ . Полагаем  $f_1 = f(y_s)$ . Сравниваем полученное значение  $f_1$  с уровнем  $\alpha$ . Если  $\alpha > f_1$ , то исходная задача не имеет решения. Если  $\alpha = f_1$ , то  $t_1 = t_2 = y_s$ . Если  $\alpha < f_1$ , то продолжаем вычисление значений функции  $f(t) - \alpha$  в точках  $y_k$ ,  $k \geq s + 1$ . Значения производных  $f'(t)$  в этих точках можно не вычислять. Значение  $y_r$ , для которого  $f(y_r) - \alpha \geq 0$ , а  $f(y_{r+1}) - \alpha < 0$ , полагаем равным  $t_2$ , т. е.  $t_2 = y_r$ .

1.2.2. Осталось рассмотреть случай, когда  $\alpha \leq f(b)$ . Очевидно, что здесь  $t_2 = \bar{m}$ . Значение  $t_1$  вычисляем, следуя алгоритму пункта 1.1.

2. Перейдем к рассмотрению случая, когда  $\alpha < \beta < b$ . Для  $t \geq \beta$ ,  $f(t) < 1/2$ . На интервале  $[a, \beta]$  функция  $f(t)$  является унимодальной. Это подтверждается рассуждениями, аналогичными приведенным в пункте 1.

2.1. Случай, когда  $f(t)$ ,  $t \in [a, \beta]$  строго монотонно возрастает, не представляет интереса, так как  $f(t) < 1/2$  и исходная задача не имеют решения. Этот случай реализуется, когда  $f'(\beta) \geq 0$ , т. е. когда  $(\beta - a)/\sigma \sqrt{2\pi} \leq 1/2$ .

2.2. Пусть  $f'(\beta) < 0$ , т. е.  $(\beta - a)/\sigma \sqrt{2\pi} > 1/2$ . Если  $\underline{m} \geq \bar{m}$ , то задача (1), (2) не имеет решения. Для  $\underline{m} < \bar{m}$  вопрос о разрешимости исходной задачи и о вычислении значений  $t_1$  и  $t_2$  решается как и в пункте 1.2.1.

3. Рассмотрим третий случай:  $\beta \leq a$ . Здесь исходная задача не имеет решения, так как  $f(t) \leq 1/2$ .

II. Пусть теперь случайная величина  $\xi \in N(\beta_1, \sigma_1^2)$ , а величина  $\eta$  распределена равномерно на интервале  $[a_1, b_1]$ . Структура функции  $f(t)$  задается в этом случае формулой:  $f(t) = \Phi\left(\frac{t - \beta_1}{\sigma_1}\right) \cdot \frac{b_1 - t}{b_1 - a_1}$ . Производная функции  $f(t)$  вычисляется по формуле:

$$f'(t) = \frac{b_1 - t}{\sigma_1(b_1 - a_1)} \cdot \varphi\left(\frac{t - \beta_1}{\sigma_1}\right) - \frac{1}{b_1 - a_1} \cdot \Phi\left(\frac{t - \beta_1}{\sigma_1}\right).$$

Значения функций  $f(t)$  и  $f'(t)$  легко вычисляются по таблицам значений функций  $\Phi(x)$  и  $\varphi(x)$ . Здесь также возможны три различных случая: 4)  $\beta_1 \leq a_1$ , 5)  $a_1 < \beta_1 < b_1$ , 6)  $\beta_1 \geq b_1$ .

4. Рассмотрим сначала случай, когда  $\beta_1 \leq a_1$ . Аналогично тому, как было доказано в первой части, можно показать, что функция  $f(t)$  является унимодальной.

4.1. Предположим сначала, что  $f(t)$ ,  $t \in [a_1, b_1]$  строго монотонно убывает. Этот случай реализуется, когда  $f'(a_1 + 0) \leq 0$ . Здесь  $f_1 = f(a_1)$ . Сравниваем значение  $f_1$  с уровнем  $\alpha$ . Если  $\alpha > f_1$ , то исходная задача не имеет решения. Если  $\alpha = f_1$ , то  $t_1 = t_2 = a_1$ . Пусть  $\alpha < f_1$ . Обозначим через  $\underline{m}_1$  корень уравнения  $\Phi\left(\frac{t - \beta_1}{\sigma_1}\right) = \alpha$ , а через  $\bar{m}_1$  — корень уравнения  $\frac{b_1 - t}{b_1 - a_1} = \alpha$ , т. е.  $\underline{m}_1 = \beta_1 + \sigma_1 \Phi^{-1}(\alpha)$ ,  $\bar{m}_1 = b_1 - \alpha(b_1 - a_1)$ . Очевидно, что в случае  $\alpha < f_1$  корень  $t_1 = \underline{m}_1$ , а  $t_2 \in (a_1, \bar{m}_1)$ . Найдем приближенное значение  $t_2$ . Последовательно вычисляем значения  $f(t) - \alpha$  в точках  $y_k = \bar{m}_1 - kh$ ,  $k = 0, 1, \dots, \left[\frac{\bar{m}_1 - a_1}{h}\right]$ . Значение  $y_s$ , для которого  $f(y_s) - \alpha \leq 0$ , а  $f(y_{s+1}) - \alpha > 0$  полагаем равным  $t_2$ , т. е.  $t_2 = y_s$ .

4.2. Пусть  $f'(a_1 + 0) > 0$ . Вычисляем значения  $\underline{m}_1$  и  $\bar{m}_1$ . Если окажется,

что  $\underline{m}_1 \geq \bar{m}_1$ , то задача (1), (2) не имеет решения. Предположим, что  $\underline{m}_1 < \bar{m}_1$ .

4.2.1. Если  $\alpha > f(a_1)$ , то поступаем следующим образом. Вычисляем значения  $f(t) - \alpha$  и ее производной  $f'(t)$  в точках  $y_k = \underline{m}_1 + kh$ ,  $k = 0, 1, \dots, \left[ \frac{\bar{m}_1 - \underline{m}_1}{h} \right]$ . Если найдется значение  $y_s$ , для которого  $f(y_s) - \alpha \leq 0$ , а  $f(y_{s+1}) - \alpha > 0$ , то полагаем  $t_1 = y_s$ . Находим значение  $y_l$ , для которого  $f'(y_l) \geq 0$ , а  $f'(y_{l+1}) < 0$ . Полагаем  $t_1 = f(y_l)$ . Сравниваем значение  $t_1$  с уровнем  $\alpha$ . Если  $\alpha > t_1$ , то исходная задача не имеет решения. Если  $\alpha = t_1$ , то  $t_1 = t_2 = y_l$ . Если  $\alpha < t_1$ , то продолжаем вычисление значений  $f(y_k) - \alpha$  для  $k \geq l$ . Значения производных  $f'(y_k)$ ,  $k \geq l$ , теперь можно не вычислять. Значение  $y_r$ , для которого  $f(y_r) - \alpha \geq 0$ , а  $f(y_{r+1}) - \alpha < 0$ , полагаем равным  $t_2$ , т. е.  $t_2 = y_r$ .

4.2.2. В случае, когда  $\alpha \leq f(a_1)$ ,  $t_1 = \underline{m}_1$ . Значение  $t_2$  находим, следуя пункту 4.1.

5. Рассмотрим случай, когда  $a_1 < \beta_1 < b_1$ . Можно показать, что на интервале  $[\beta_1, b_1]$  функция  $f(t)$  унимодальна.

5.1. Случай, когда  $f(t)$  строго монотонно убывает на  $[\beta_1, b_1]$ , соответствует тому, что  $f'(\beta_1) \leq 0$ . В этом случае задача (1), (2) не имеет решения, так как  $f(t) < 1/2$  для всех  $t$ .

5.2. Пусть  $f'(\beta_1) > 0$ . Вычислим  $\underline{m}_1$  и  $\bar{m}_1$ . Если  $\underline{m}_1 \geq \bar{m}_1$ , то исходная задача не имеет решения. Если  $\underline{m}_1 < \bar{m}_1$ , то вопрос о разрешимости задачи (1), (2) и о вычислении значений  $t_1$  и  $t_2$  решается как и в пункте 4.2.1.

6. В случае, когда  $\beta_1 \geq b_1$ , исходная задача не имеет решения, так как  $f(t) < 1/2$  для всех  $t$ .

7. Рассмотрим иллюстративный пример:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\rightarrow \max, \\ P(\xi_1 \leq x_1 + x_2 \leq \eta_1) &\geq 0,6; \\ P(\xi_2 \leq x_1 - x_2 \leq \eta_2) &\geq 0,7; \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

где  $\xi_1$  и  $\eta_2$  распределены равномерно,  $\xi_1 \in [0, 3]$ ,  $\eta_2 \in [2, 4]$ , а  $\eta_1 \in N(3,5; 1)$ ,  $\xi_2 \in N(1,5; 0,25)$ .

Используя вышеизложенную теорию, можно показать, что стохастические ограничения сводятся к следующим:  $1,9 \leq x_1 + x_2 \leq 3,3$ ;  $1,8 \leq x_1 - x_2 \leq 2,7$ ;  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ . Вычисления проведены с точностью  $h = 0,1$ . Линейная форма  $x_1 + 2x_2$  достигает своего максимального значения при  $x_1^0 = 2,5$ ;  $x_2^0 = 0,7$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. — М., 1974.
2. Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования. — М., 1976.
3. Кирлица В. П. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, мат., физ. и мех., 1979, № 3.
4. Kirilitza V. P., Vazquez R. e Yordi I. — Revista Investigación Operacional, 1982, v. 3, № 3, p. 135.

УДК 519.854.2

В. А. СТРУСЕВИЧ

### ЗАДАЧА ТРЕХ СТАНКОВ: ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СВОДИМОСТИ В ВЫПУКЛОЙ ФОРМЕ

В статье доказывается справедливость одного условия, достаточного для сведения известной в теории расписаний трехстаночной задачи Беллмана — Джонсона к задаче с двумя станками.

Рассматриваемую задачу можно сформулировать следующим обра-

зом. Имеются три станка  $A$ ,  $B$ , и  $C$ , на которых последовательно обрабатываются  $n$  деталей, занумерованных числами из множества  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ . Пусть  $a_i$ ,  $b_i$  и  $c_i$  — времена обработки детали  $i \in N$  на станке  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно и  $P(N)$  — множество всех перестановок  $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$  элементов множества  $N$ . Определим функционал

$$K(\Pi) = \max_{1 < u < v < n} \left( \sum_{i=1}^u a_{\pi_i} + \sum_{i=u}^v b_{\pi_i} + \sum_{i=v}^n c_{\pi_i} \right). \quad (1)$$

Требуется найти такую перестановку  $\Pi_1 \in P(N)$ , что  $K(\Pi_1) \leq K(\Pi)$  для любых  $\Pi \in P(N)$ .

Данная задача является  $NP$ -трудной [1], т. е. по-видимому, неразрешимой при помощи алгоритмов с полиномиально ограниченной трудоемкостью. Начиная с С. М. Джонсона [2], проводились многочисленные исследования специальных классов задачи трех станков, допускающих эффективное решение (см. обзоры [3, 4]). Один из возможных подходов к выявлению таких классов заключается в поиске условий, позволяющих свести трехстаночную задачу к специальной задаче Беллмана — Джонсона с двумя станками. Последняя задача состоит в поиске перестановки из  $P(N)$ , минимизирующей функционал

$$L(\Pi) = \max_{1 < u < n} \left( \sum_{i=1}^u \alpha_{\pi_i} + \sum_{i=u}^n \beta_{\pi_i} \right), \quad (2)$$

где величины  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  трактуются как времена обработки детали  $i \in N$  соответственно на первом и втором станке. Далее везде будем полагать, что  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  ( $i \in N$ ) вычисляются на основании параметров исходной трехстаночной задачи и удовлетворяют соотношению

$$\alpha_i = a_i + b_i, \beta_i = b_i + c_i \quad (i \in N). \quad (3)$$

Будем говорить, что трехстаночная задача сводится к двухстаночной, если некоторая перестановка, минимизирующая функционал (2), где  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  ( $i \in N$ ) удовлетворяют (3), будет минимизировать и функционал (1). Для минимизации (2) в [2] предложен следующий

Алгоритм 1.

1. Детали, для которых  $\alpha_i \leq \beta_i$ , упорядочить по неубыванию значений  $\alpha_i$ .

2. Вслед за ними упорядочить оставшиеся детали по невозрастанию значений  $\beta_i$ . Полученная перестановка оптимальна.

Трудоемкость алгоритма 1 составляет  $O(n \log_2 n)$  элементарных операций.

Если при любой перестановке  $\Pi \in P(N)$  функционал  $K(\Pi)$  допускает представление

$$K(\Pi) = \max_{1 < u < n} \left( \sum_{i=1}^u a_{\pi_i} + b_{\pi_u} + \sum_{i=u}^n c_{\pi_i} \right), \quad (4)$$

то с учетом (3) при всех  $\Pi \in P(N)$  имеет место соотношение

$$L(\Pi) = K(\Pi) + \sum_{i=1}^n b_i, \quad (5)$$

из которого следует, что трехстаночная задача сводится к двухстаночной.

Пусть  $R(N) = \{ \langle i, j \rangle : i \in N, j \in N, i \neq j \}$  — множество всех упорядоченных пар различных элементов из  $N$ . Справедливы следующие утверждения.

**Теорема 1** [2]. Если имеет место условие

$$a_i \geq b_j \quad (\langle i, j \rangle \in R(N)) \quad (6)$$

или

$$c_i \geq b_j \quad (<i, j> \in R(N)), \quad (7)$$

то при всех  $\Pi \in P(N)$  выполняется (4).

**Теорема 2** [5]. Если существует такое  $\tau \in [0, 1]$ , что имеет место условие

$$\tau(a_i - b_j) + (1 - \tau)(c_j - b_i) \geq 0 \quad (<i, j> \in R(N)), \quad (8)$$

то при всех  $\Pi \in P(N)$  выполняется (4).

Таким образом, каждое из условий (6)–(8) является достаточным для сведения трехстаночной задачи к двухстаночной. Обобщения этих условий на случай произвольного числа станков получены в [6].

В обзоре [7] со ссылкой на неопубликованную работу Ф. Бурнса и Дж. Рукера приводится следующая

**Теорема 3.** Если существует такое  $\tau \in [0, 1]$ , что имеет место условие

$$\tau a_i + (1 - \tau)c_i \geq b_j \quad (<i, j> \in R(N)), \quad (9)$$

то трехстаночная задача сводится к двухстаночной.

Насколько известно автору, доказательство этого факта до сих пор не опубликовано. Ниже приводится доказательство теоремы 3.

Нетрудно видеть, что в случае выполнения условия (9) при некотором  $\tau \in [0, 1]$  детали можно разбить на два класса. Деталь  $i \in N$  будем называть  $R$ -деталью, если для всех  $j (<i, j> \in R(N))$  выполняются неравенства  $a_i \leq c_i$  и  $b_j \leq c_i$ , и  $Q$ -деталью, если для всех  $j (<i, j> \in R(N))$  справедливы неравенства  $a_i \geq c_i$  и  $b_j \leq a_i$ . Пусть  $P_1(N) \subset P(N)$  — множество всех таких перестановок деталей, в которых  $R$ -детали предшествуют  $Q$ -деталю.

Имеет место

**Лемма 1.** Если существует такое  $\tau \in [0, 1]$ , что выполняется условие (9), при всех  $\Pi \in P_1(N)$  справедливо соотношение (4).

**Доказательство.** Предположим, что существует перестановка  $\Pi \in P_1(N)$ , для которой

$$K(\Pi) = \sum_{i=1}^u a_{\pi_i} + \sum_{i=u}^v b_{\pi_i} + \sum_{i=v}^n c_{\pi_i} \quad (1 \leq u < v \leq n). \quad (10)$$

Тогда деталь  $\pi_u$  должна быть  $R$ -деталью, а деталь  $\pi_v$  —  $Q$ -деталью, ибо в противном случае функционал  $K(\Pi)$  удовлетворял бы (4) в силу теоремы 1. Из (10) вытекают неравенства

$$\sum_{i=u}^{v-1} b_{\pi_i} > \sum_{i=u+1}^v a_{\pi_i} \quad (11), \quad \sum_{i=u+1}^v b_{\pi_i} > \sum_{i=u}^{v-1} c_{\pi_i}. \quad (12)$$

С другой стороны, из (9) можно заключить, что имеют место неравенства:

$$\tau \left( \sum_{i=u+1}^v a_{\pi_i} - \sum_{i=u}^{v-1} b_{\pi_i} \right) + (1 - \tau) \left( \sum_{i=u+1}^v c_{\pi_i} - \sum_{i=u}^{v-1} b_{\pi_i} \right) \geq 0, \quad (13)$$

$$\tau \left( \sum_{i=u}^{v-1} a_{\pi_i} - \sum_{i=u+1}^v b_{\pi_i} \right) + (1 - \tau) \left( \sum_{i=u}^{v-1} c_{\pi_i} - \sum_{i=u+1}^v c_{\pi_i} \right) \geq 0, \quad (14)$$

где  $\tau \in [0, 1]$ . Сравнивая (11) и (13), а также (12) и (14), убеждаемся, что выполняются неравенства

$$\sum_{i=u+1}^v c_{\pi_i} > \sum_{i=u}^{v-1} b_{\pi_i}, \quad (15) \quad \sum_{i=u}^{v-1} a_{\pi_i} > \sum_{i=u+1}^v b_{\pi_i}. \quad (16)$$

Складывая (11) и (16), а также (12) и (15), после простых преобразований получим соотношение  $a_{\pi_u} - c_{\pi_u} > a_{\pi_v} - c_{\pi_v}$ , которое противоречит тому, что деталь  $\pi_u$  является  $R$ -деталью. Лемма доказана.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится

**Лемма 2** [8]. Пусть  $\Pi \in P(N)$  — перестановка, минимизирующая функционал (2). Если для этой перестановки выполняется условие (5), то она будет минимизировать функционал (1).

Пусть перестановка  $\Pi \in P_1(N)$  получена следующим образом: сначала упорядочены  $R$ -детали по неубыванию значений  $a_i + b_i$ , а затем  $Q$ -детали по невозрастанию значений  $b_i + c_i$ . Как и для всякой перестановки из  $P_1(N)$ , для  $\Pi$  выполняется соотношение (4), а значит, и (5). С другой стороны, учитывая (3), можно заключить, что  $\Pi$  будет той перестановкой, которую генерирует алгоритм 1, т. е.  $\Pi$  минимизирует функционал (2). Тогда из леммы 2 следует, что  $\Pi$  — оптимальное решение исходной задачи трех станков. Теорема 3 доказана.

Отметим, что условия (8) и (9) представляют собой выпуклые линейные комбинации условий (6) и (7), причем при  $\tau = 1$  (8) и (9) совпадают с (6), а при  $\tau = 0$  — с (7). Проверку выполнения условий (8) и (9) можно осуществить за  $O(n^2)$  операций.

Вопрос о возможности обобщения условия (9) на случай произвольного числа станков заслуживает специального рассмотрения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Garey M. R., Johnson D. S., Sethi R.— Math. Oper. Res., 1976, v. 1, N 2, p. 117.
2. Джонсон С. М.— В кн.: Календарное планирование.— М., 1966, с. 33.
3. Szwarc W.— Oper. Res., 1977, v. 25, N 1, p. 70.
4. Nabeshima I.— Дэнки цусин дайгаку гакухо, Repts Univ. Electro-Communs, 1977, v. 28, N 1, p. 35.
5. Глебов Н. И.— Управляемые системы, 1978, вып. 17, с. 46.
6. Струсов В. А.— Докл. АН БССР, 1981, т. 25, № 6, с. 518.
7. Graham R. L., Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G.— Ann. Discr. Math., 1979, v. 5, p. 287.
8. Szwarc W.— Nav. Res. Log. Quart., 1974, v. 21, N 1, p. 145.

УДК 519.24

Н. Н. ТРУШ

### СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНОГО СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА И ИХ СВОЙСТВА

Исследованию оценок основных характеристик дискретного стационарного случайного процесса посвящена обширная литература (см., например, работы [1—6]). В то же время много прикладных задач в радиофизике, геофизике, статистических задач турбулентности жидкостей и газа требуют развития подобных вопросов в непрерывном случае. Некоторые аспекты исследования оценок характеристик непрерывного стационарного случайного процесса с помощью ковариационной функции можно найти в работах [3, 5].

В настоящей статье, используя спектральный подход, изучаем статистические свойства оценок математического ожидания  $m$  и ковариационной функции  $R(\tau)$ ,  $-\infty < \tau < \infty$ , построенным по наблюдениям  $x(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , за непрерывным стационарным случайным процессом  $x(t)$ .

Следуя работам [3, 5], пусть

$$\hat{m}_T = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1)$$

оценка математического ожидания  $m$ , а статистика

$$\hat{R}_T(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - m][x(t+\tau) - m] dt, \quad (2)$$

$\tau \in [0, T]$ , — оценка ковариационной функции  $R(\tau)$  процесса  $x(t)$ . Так как  $M\hat{m}_T = m$ , то  $\hat{m}_T$  является несмещенной оценкой математического ожидания. Найдем дисперсию  $\hat{m}_T$ .

**Теорема 1.** Для оценки  $\hat{m}_T$ , задаваемой равенством (1), справедливо соотношение:

$$T \cdot D\hat{m}_T = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \psi_T(\lambda) d\lambda, \quad (3)$$

где  $f(\lambda)$ ,  $-\infty < \lambda < \infty$ , — спектральная плотность процесса  $x(t)$ , а

$$\psi_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \Delta_T^2(\lambda), \quad \Delta_T(\lambda) = \frac{2}{\lambda} \sin \frac{T\lambda}{2}. \quad (4)$$

**Доказательство.** По определению  $D\hat{m}_T = M(\hat{m}_T - M\hat{m}_T)^2 =$   
 $= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T R(t_2 - t_1) dt_1 dt_2.$

Используя соотношение

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{i\lambda\tau} d\lambda, \quad (5)$$

получим  $D\hat{m}_T = \frac{1}{T^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \left| \int_0^T e^{i\lambda t} dt \right|^2 d\lambda$ ; Так как  $\left| \int_0^T e^{i\lambda t} dt \right|^2 = \Delta_T^2(\lambda)$ , то имеем требуемое.

Прежде чем рассматривать асимптотические свойства дисперсии оценки математического ожидания, исследуем свойства функции  $\psi_T(\lambda)$ .

**Лемма.** Для любого действительного  $a > 0$ , справедливы соотношения

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \psi_T(\lambda) d\lambda = 1, \quad (6)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_a^{\infty} \psi_T(\lambda) d\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{-a} \psi_T(\lambda) d\lambda = 0, \quad (7)$$

где функция  $\psi_T(\lambda)$  задается равенством (4).

**Доказательство.** Докажем вначале соотношение (6). Легко видеть, что  $\int_{-a}^a \psi_T(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi T} \int_{-a}^a \int_0^T \int_0^T e^{i\lambda(t_1 - t_2)} dt_1 dt_2 d\lambda$ . Делая замену переменных

$$t_1 - t_2 = t, \quad t_2 = t_2, \quad \text{получаем} \quad \int_{-a}^a \psi_T(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi T} \int_{-a}^a \int_{-T}^T (T - |t|) \cos \lambda t dt d\lambda.$$

$$\text{Меняя порядок интегрирования, имеем:} \quad \int_{-a}^a \psi_T(\lambda) d\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^T \frac{\sin at}{t} dt -$$

$$- \frac{2(1 - \cos aT)}{\pi T}. \quad \text{Отсюда, учитывая, что при } a > 0 \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\sin aT}{t} dt = \frac{\pi}{2},$$

получаем (6).

Докажем соотношение (7). Так как  $\int_0^{\infty} \psi_T(\lambda) d\lambda \leq \frac{1}{2\pi T} \int_a^{\infty} \frac{4}{\lambda^2} d\lambda = \frac{2}{\pi T \cdot a}$ , то при  $T \rightarrow \infty$  получаем требуемое. Лемма доказана. Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_T(\lambda) d\lambda = 1. \quad (8)$$



**Теорема 2.** Если спектральная плотность  $f(\lambda)$  непрерывна в точке  $\lambda=0$  и ограничена на  $(-\delta, \delta)$  для некоторого  $\delta>0$ , то

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot \widehat{Dm}_T = 2\pi \cdot f(0). \quad (9)$$

**Доказательство.** Так как функция  $f(\lambda)$  непрерывна в точке  $\lambda=0$ , то для заданного  $\varepsilon>0$  существует  $\delta>0$ , что, как только  $|\lambda| \leq \delta$ , то  $|f(\lambda) - f(0)| \leq \varepsilon$ . Следовательно, используя соотношения (3), (8), получаем:

$$\begin{aligned} \left| \frac{T}{2\pi} \widehat{Dm}_T - f(0) \right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda) - f(0)] \psi_T(\lambda) d\lambda \right| \leq \int_{-\infty}^{-\delta} |f(\lambda) - f(0)| \psi_T(\lambda) d\lambda + \\ &+ \int_{-\delta}^{\delta} |f(\lambda) - f(0)| \psi_T(\lambda) d\lambda + \int_{\delta}^{\infty} |f(\lambda) - f(0)| \psi_T(\lambda) d\lambda \leq \frac{2}{\pi T \cdot \delta} \int_{-\infty}^{-\delta} |f(\lambda) - \\ &- f(0)| d\lambda + \varepsilon \cdot \int_{-\delta}^{\delta} \psi_T(\lambda) d\lambda + \frac{2}{\pi T \cdot \delta} \int_{\delta}^{\infty} |f(\lambda) - f(0)| d\lambda. \quad (10) \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda < \infty$ , первое и третье слагаемые в правой части (10) стремятся к нулю при  $T \rightarrow \infty$ , а второе слагаемое можно сделать сколь угодно малым за счет выбора  $\varepsilon$ . Теорема доказана.

Следовательно, статистика  $\widehat{m}_T$  является несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания.

Рассмотрим  $\widehat{R}_T(\tau)$ . Легко показать, что  $\widehat{R}_T(\tau)$  является несмещенной оценкой ковариационной функции  $R(\tau)$ . Найдем дисперсию оценки  $\widehat{R}_T(\tau)$ . В дальнейшем в этой статье будем предполагать, что  $m=0$ .

Смешанным моментом  $n$ -го порядка называется функция  $m_n(t_1, \dots, t_n) = Mx(t_1) \dots x(t_n)$ , где  $-\infty < t_j < \infty, j=1, n$ . Заметим, что так как процесс  $x(t)$  стационарный, то  $m_n(t_1, \dots, t_n) = m_n(t_1+t, \dots, t_n+t)$  (11) для любого  $t \in (-\infty, \infty)$  и любых  $t_j, j=1, n$ . Смешанные семинварианты  $n$ -го порядка  $c_n(t_1, \dots, t_n)$  определим как коэффициенты формального разложения в ряд характеристических функций  $\ln H(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , где  $H(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = M \exp \left\{ i \sum_{j=1}^n \alpha_j x(t_j) \right\}$ , а  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  — действительный вспомогательный вектор. Так же как и для смешанных моментов,

$$c_n(t_1, \dots, t_n) = c_n(t_1+t, \dots, t_n+t) \quad (12)$$

для любых  $t, t_j \in (-\infty, \infty), j=1, n$ . При  $n=2, m_2(t_1, t_2) = c_2(t_1, t_2)$ , а учитывая (11), (12),  $m_2(\tau, 0) = c_2(\tau, 0) = R(\tau)$ . Между смешанными моментами и семинвариантами существует связь, которая в случае  $n=4$ , используемом в дальнейшем, выражается равенством:

$$\begin{aligned} m_4(t_1, t_2, t_3, t_4) &= c_4(t_1, t_2, t_3, t_4) + c_2(t_1, t_2) \times \\ &\times c_2(t_3, t_4) + c_2(t_1, t_3) c_2(t_2, t_4) + c_2(t_1, t_4) c_2(t_2, t_3). \quad (13) \end{aligned}$$

**Теорема 3.** Для любых  $t, \tau \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} (T-t)(T-\tau) \operatorname{cov} \{ \widehat{R}_T(t), \widehat{R}_T(\tau) \} &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_{T-t}(\lambda - \nu) \Delta_{T-\tau}(\lambda - \nu) \left[ e^{\frac{i(\lambda+\nu)(\tau-t)}{2}} + e^{\frac{-i(\lambda+\nu)(\tau+t)}{2}} \right] \times \\ &\times f(\lambda) f(\nu) d\lambda d\nu + \int_0^{T-t} \int_0^{T-\tau} c_4(t, t_2-t_1, t_2-t_1+\tau) dt_1 dt_2. \quad (14) \end{aligned}$$

Доказательство. Имеем:

$$(T-t)(T-\tau) \operatorname{cov} \{\widehat{R}_T(t), \widehat{R}_T(\tau)\} = (T-t)(T-\tau) [M\widehat{R}_T(t)\widehat{R}_T(\tau) - \\ - M\widehat{R}_T(t)M\widehat{R}_T(\tau)] = \int_0^{T-t} \int_0^{T-\tau} [m_4(t_1, t_1+t, t_2, t_2+\tau) - \\ - m_2(t_1, t_1+t) m_2(t_2, t_2+\tau)] dt_1 dt_2.$$

Используя соотношение (13) и стационарность процесса  $x(t)$ , получаем:

$$(T-t)(T-\tau) \operatorname{cov} \{\widehat{R}_T(t), \widehat{R}_T(\tau)\} = \int_0^{T-t} \int_0^{T-\tau} c_4(t, t_2-t_1, t_2-t_1+\tau) dt_1 dt_2 + \\ + \int_0^{T-t} \int_0^{T-\tau} [R(t_2-t_1)R(t_2-t_1+\tau-t) + R(t_2-t_1+\tau) \times \\ \times R(t_2-t_1-t)] dt_1 dt_2 = B_1 + B_2.$$

Учитывая равенство (5), имеем

$$B_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{T-t} \int_0^{T-\tau} e^{i(t_1-t_2)(\lambda-\nu)} [e^{i(\tau-t)\nu} + e^{-i(\nu+\tau)t}] f(\lambda) f(\nu) dt_1 dt_2 d\lambda d\nu.$$

Отсюда, применяя элементарное равенство

$$\int_0^T e^{i\lambda t} dt = \Delta_T(\lambda) e^{\frac{iT\lambda}{2}},$$

получаем

$$B_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_{T-t}(\lambda-\nu) \Delta_{T-\tau}(\lambda-\nu) [e^{\frac{i(\lambda+\nu)(\tau-t)}{2}} + \\ + e^{\frac{-i(\lambda+\nu)(\tau+t)}{2}}] f(\lambda) f(\nu) d\lambda d\nu. \text{ Теорема доказана.}$$

Из теоремы 3 вытекает следующий результат.

**Теорема 4.** Для любого  $t \in [0, T]$

$$(T-t)^2 D\widehat{R}_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_{T-t}^2(\lambda-\nu) [1 + e^{-i(\lambda+\nu)t}] f(\lambda) f(\nu) d\lambda d\nu + \\ + \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} c_4(t, t_2-t_1, t_2-t_1+t) dt_1 dt_2.$$

Рассмотрим асимптотические свойства моментов второго порядка оценки  $\widehat{R}_T(\tau)$ .

**Теорема 5.** Если  $f(\lambda)$  непрерывна,  $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda) d\lambda < \infty$ , и

$$\frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-t} \int_0^{T-\tau} c_4(t, t_2-t_1, t_2-t_1+\tau) dt_1 dt_2 < \infty, \quad -\infty < t < \infty, \text{ то}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (T-t) \operatorname{cov} \{\widehat{R}_T(t), \widehat{R}_T(\tau)\} = \\ = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \cos \nu t \cdot \cos \nu \tau \cdot f^2(\nu) d\nu + \int_{-\infty}^{\infty} c_4(t, -p, \tau-p) dp.$$

Доказательство. Из равенства (14) нетрудно получить, что

$$(T-t) \operatorname{cov} \{ \widehat{R}_T(t), \widehat{R}_T(\tau) \} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T-\tau} \Delta_{T-t}(\lambda-v) \Delta_{T-\tau}(\lambda-v) \times \\ \times \cos \frac{\lambda+v}{2} \tau \cdot \cos \frac{\lambda+v}{2} t f(\lambda) f(v) d\lambda dv + \\ + \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-t} \int_0^{T-\tau} c_4(t, t_2-t_1, t_2-t_1+\tau) dt_1 dt_2 = B_1 + B_2.$$

Делая замену переменных  $t_1 - t_2 = p$ ,  $t_2 = t$ , получаем, что  $B_2 =$   
 $= \int_{-\infty}^{\infty} c_4(t, -p, \tau - p) dp.$

Рассмотрим  $B_1$ . Сделаем замену переменных  $\lambda = \mu + v$ ,  $v = v$ , тогда

$$B_1 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T-\tau} \Delta_{T-t}(\mu) \Delta_{T-\tau}(\mu) \cos \left( v + \frac{1}{2} \mu \right) \tau \cos \left( v + \frac{1}{2} \mu \right) t \times \\ \times f(v + \mu) f(v) d\mu dv.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$m(\mu) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left( v + \frac{1}{2} \mu \right) \tau \cdot \cos \left( v + \frac{1}{2} \mu \right) t \cdot f(v + \mu) f(v) dv,$$

тогда

$$B_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T-\tau} \Delta_{T-t}(\mu) \Delta_{T-\tau}(\mu) \cdot m(\mu) d\mu = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T-\tau} \Delta_{T-\tau}^2(\mu) \cos \frac{\mu(\tau-t)}{2} \cdot m(\mu) d\mu + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T-\tau} \Delta_{\tau-t}(\mu) \Delta_{T-\tau}(\mu) \cos \frac{\mu(T-\tau)}{2} \cdot m(\mu) d\mu = K_1 + K_2.$$

Используя соотношение (9), получаем, что  $K_1 \rightarrow 2\pi \cdot m(0)$  при  $T \rightarrow \infty$ .

$$|K_2| \leq \max_{-\infty < \mu < \infty} |m(\mu)| \left[ \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{T-\tau} |\Delta_{\tau-t}(\mu) \Delta_{T-\tau}(\mu)| d\mu + \right. \\ \left. + 2 \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{(T-\tau) \left( \frac{\mu}{2} \right)^2} d\mu \right] \leq 2 \max_{-\infty < \mu < \infty} |m(\mu)| |\tau - t| \cdot \delta + \\ + \frac{8}{(T-\tau)\delta} \max_{-\infty < \mu < \infty} |m(\mu)|$$

для любого  $\delta > 0$ . В правой части последнего неравенства первое слагаемое можно сделать как угодно малым за счет выбора  $\delta$ , а второе слагаемое стремится к нулю при  $T \rightarrow \infty$  и фиксированном  $\delta$ . Отсюда и вытекает доказательство теоремы.

Из теоремы 5 нетрудно получить следующий результат.

**Теорема 6.** Если  $f(\lambda)$  непрерывна,  $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda) d\lambda < \infty$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} c_4(t, -p, t-p) dp < \infty$ , то справедливо соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (T-t) \widehat{DR}_T(t) = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2 tv \cdot f^2(v) dv + \int_{-\infty}^{\infty} c_4(t, -p, t-p) dp.$$

Из доказанных теорем вытекает, что  $\widehat{R}_T(\tau)$  является несмещенной и состоятельной оценкой ковариационной функции.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов.— М., 1976.
2. Бенткус Р.— Литовский матем. сб., 1972, т. 12, № 1, с. 55.
3. Виленкин С. Я. Статистическая обработка результатов исследования случайных функций.— М., 1979.
4. Журбенко И. Г., Труш Н. Н.— Литовский матем. сб., 1979, т. 19, № 1, с. 65.
5. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций.— М., 1968.
6. Parzen E.— Ann. Math. Statist., 1963, v. 28, p. 329.

УДК 517.948.3

В. В. МИТЮШЕВ

### О ЛИНЕЙНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассматривается функциональное уравнение

$$\varphi(z) = G(z)\varphi(sz) + g(z), \quad |z| < 1. \quad (1)$$

Известные функции  $G(z)$ ,  $g(z)$  и искомая функция  $\varphi(z)$  аналитичны в единичном круге,  $|G(0)| \neq 1$ ,  $s = e^{2\pi i\theta}$ , где  $\theta$  — иррациональное число. Представим функции  $\varphi(z)$ ,  $G(z)$ ,  $g(z)$  в виде рядов Тейлора в окрестности нуля  $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ ,  $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k z^k$ ,  $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k$ . Подставляя эти ряды в уравнение (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $z$ , получим простой алгоритм вычисления коэффициентов  $\alpha_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\alpha_k = \gamma_0 s^k \alpha_k + \gamma_1 s^{k-1} \alpha_{k-1} + \dots + \gamma_k \alpha_0 + g_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Вопрос состоит в том, будет ли полученный ряд сходиться при  $|z| < 1$ . В работах [1, 2] доказывалась сходимость ряда при следующих ограничениях на известные функции:

а)  $|\gamma_0| > 2$ ,  $|\gamma_k| \leq \frac{(1-\delta)^k}{(1+k)^2}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;  $|g_k| \leq (1-\delta)^k$ ,  $k = 0, 1, \dots$   
 $0 < \delta < 1$ .

б)  $G(t) = At + B$ ,  $|A| < 2^{-\delta}$ ,  $|B| > 2$ ,  $|g_0| \leq 1$ ,  $|g_k| \leq \frac{2^{-k} - |A|}{k^\delta}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;  $\delta > \frac{1}{2}$ .

в)  $\min_{n>0} |s^n - G(0)| > \frac{1-\delta}{\delta}$ ,  $0 < \delta < 1$ .

**Л е м м а.** Пусть непостоянная аналитическая в области  $D$  функция  $f(z)$  принимает в  $D$  значения, по модулю равные единице. Тогда множество всех  $t \in D$ , таких что  $|f(t)| = 1$  образует кривые, каждая из которых разделяет область  $D$  на две связанные компоненты.

Доказательство легко вывести из принципа максимума.

Пусть  $l_1$  — такая кривая, что  $|G(t)| = 1$ ,  $t \in l_1$ ;  $|G(z)| < 1$ ,  $z \in D_{l_1}$ ;  $|G(z)| > 1$ ,  $z \in G_{l_1}$ , где  $D_{l_1}$  — область, ограниченная кривой  $l_1$  и содержащая точку  $z=0$ ,  $G_{l_1}$  — дополнение множества  $D_{l_1} \cup l_1$  до единичного круга. Пусть  $r_1 = \min_{t \in l_1} |t|$ ,  $R_1 = \max_{t \in l_1} |t|$ . В случае, когда контур  $l_1$  имеет другой вид, уравнение (1) будет решаться аналогично.

Применяя к уравнению (1) в круге  $|z| \leq r_1$  принцип сжатых отображений, получим, что уравнение (1) имеет единственное решение, аналитическое, по крайней мере, в круге  $|z| < r_1$ . Записывая равенство (1) в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{G(s^{-1}z)} \varphi(s^{-1}z) - \frac{g(s^{-1}z)}{G(s^{-1}z)}$$

в кольце  $R_1 < |z| < 1$ , аналогично получаем существование решения в этом кольце.

Пусть кривая  $l_1$  не является окружностью. Тогда существует такое натуральное  $n$ , что для кривой  $l_2$ , образованной точками  $t \in C$ , такими что  $|G(t)G(st)\dots G(s^n t)| = 1$ , выполнены неравенства  $r_2 > r_1$ ,  $R_2 < R_1$ . Здесь  $r_2 = \min_{t \in l_2} |t|$ ,  $R_2 = \max_{t \in l_2} |t|$ . Применяя принцип сжатых отображений к уравнению

$$\varphi(z) = G(z)G(sz)\dots G(s^n z)\varphi(s^{n+1}z) + G(z)G(sz)\dots G(s^{n-1}z)g(s^n z) + \\ + G(z)G(sz)\dots G(s^{n-2}z)g(s^{n-1}z) + \dots + G(z)g(zs) + g(z) \quad (3)$$

при  $|z| < r_2$ ,  $R_2 < |z| < 1$ , получим существование решения уравнения (3). Решения уравнений (1) и (3) существуют в областях  $|z| < r_1$  и  $R_1 < |z| < 1$  и единственны. Уравнение (3) — следствие уравнения (1). Значит, уравнения (1) и (3) эквивалентны. Таким образом, решение уравнения (1) существует, по крайней мере, в областях  $|z| < r_2$ ,  $R_2 < |z| < 1$ . По уравнению (3) строим числа  $r_3$  и  $R_3$ , аналогичные  $r_1$ ,  $r_2$ ;  $R_1$ . Продолжая этот процесс неограниченно, получаем последовательности  $\{r_k\}$ ,  $\{R_k\}$ . Последовательность  $\{r_k\}$  ( $\{R_k\}$ ) возрастающая (убывающая) ограничена сверху (снизу), поэтому она имеет предел. Пусть  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = r$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = R$ .

Обозначим через  $l = \{z \in C, r \leq |z| \leq R\}$ . Если на  $k$ -ом шаге получим окружность, то  $l = \{z \in C, r = |z| = R\}$ .

**Теорема 1. 1.** Функциональное уравнение (1) имеет решение, по крайней мере, при  $|z| < r$ ,  $R < |z| < 1$ .

2. Если множество  $l$  не имеет общих точек с единичным кругом, то уравнение (1) имеет единственное решение при  $|z| < 1$ , определяемое формулами (2).

Ограничения а) и б) работ [1, 2] являются частными случаями второго пункта теоремы.

Пример.  $\varphi(z) = e^{z - \frac{1}{2}} \varphi(sz) + g(z)$ ,  $|z| < 1$ . Уравнение кривых  $l_k$  имеет вид  $|e^{t - \frac{1}{2}} e^{st - \frac{1}{2}} \dots e^{s^k t - \frac{1}{2}}| = 1$  или  $\operatorname{Re} t(1 + s + s^2 + \dots + s^k) = \frac{k}{2}$ . Так как  $|t| \cdot |1 + s + s^2 + \dots + s^k| > \frac{k}{2}$  или  $|t| > \frac{k}{2} \left| \frac{1-s}{1-s^k} \right|$ , то для достаточно больших  $k$   $|t| > 1$ , то есть  $r > 1$  и применим второй пункт теоремы.

Критерий аналитического продолжения решения через множество  $l$  не известен. Установлено лишь, что возможны оба случая. Рассмотрим частный случай уравнения (1), когда до конца выясняется вопрос аналитического продолжения через множество  $l$ .

Пусть  $G(z) = \lambda z^n G_1(z)$ , где  $G_1(0) = 1$ , а также  $G_1(z) \neq 0$  в единичном круге. В работах [2, 3] рассматривались равносильные задачи

$$\chi(z) = G_1(z)\chi(sz), \quad |z| < 1, \quad (4)$$

$$\chi_1(z) = X_1(sz) + \ln G_1(z), \quad |z| < 1 \quad (\chi_1(z) = \ln \chi(z))$$

при некоторых ограничениях на функцию  $G_1(z)$  и число  $s$ . Например, в работе [2] имеется следующий результат.

**Теорема.** Пусть для коэффициентов  $r_k$  разложения в ряд Тейлора функции  $\ln G_1(z)$  выполняется неравенство

$$|r_k| < \frac{c}{k^{1+\delta}}, \quad c > 0, \quad \delta > 0$$

и для любого  $\varepsilon$  из отрезка  $(0, \delta)$   $\left| \arg s - \frac{m}{n} \right| > \frac{k_0}{n^{2+\varepsilon}}$  ( $k_0$  — некоторая постоянная) при любых целых  $m$  и  $n$ . Тогда задача (4) имеет решение вида

$$\chi(z) = \exp \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k z^k}{1-s^k} \right].$$

Будем предполагать, что ограничения, указанные в работе [2] или [3], выполнены, т. е. функцию  $G_1(z)$  можно представить в виде  $G_1(z) = \frac{\chi(z)}{\chi(sz)}$ , причем  $\chi(z) \neq 0$  в единичном круге. Тогда уравнение (1) равносильно уравнению

$$\psi(z) = \lambda z^n \psi(sz) + h(z), \quad |z| < 1, \quad (5)$$

где  $\psi(z) := \frac{\varphi(z)}{\chi(z)}$ ,  $h(z) = \frac{g(z)}{\chi(z)}$ . Займемся исследованием уравнения (5).

Пусть  $n=0$ , тогда множество  $l$  представляет собой единичную окружность только при  $|\lambda|=1$ . Значит, по теореме 1 получаем, что задача (5) при  $n=0$  разрешима. Пусть  $n>0$ . Случай  $n<0$  исследуется аналогично.

При  $n>0$  множество  $l$  является окружностью радиуса  $r=R=|\lambda|^{-\frac{1}{n}}$  с центром в нуле. Если  $r \geq 1$  или  $|\lambda| \leq 1$ , то по теореме 1 уравнение (5) разрешимо. Рассмотрим случай, когда  $|\lambda| > 1$ .

Из формулы (2) следует, что коэффициенты  $\beta_k$ ,  $k=0, 1, \dots$  ряда Тейлора функции  $\psi(z)$  вычисляются по соотношениям:  $\beta_k = \lambda s^{k-n} \beta_{k-n} + h_k$ ,

$k \geq n$ ,  $\beta_k = h_k$ ,  $k < n$ , где  $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k$ . Отсюда

$$\beta_{k_q} = \lambda^{\frac{k_q - q}{n}} s^{k_q - n + k_q - 2n + \dots + q} h_q + \lambda^{\frac{k_q - q}{n} - 1} s^{k_q - n + k_q - 2n + \dots + q + n} h_{q+n} + \dots + \lambda s^q h_{k_q - n},$$

где  $k_q$  — все натуральные числа, дающие остаток  $q$  при делении на  $n$ ,  $q=0, 1, \dots, n-1$ . Переписываем последнее равенство в виде

$$\beta_{k_q} = \lambda^{\frac{k_q - q}{n}} s^{k_q - n + k_q - 2n + \dots + q} \tilde{h}_{k_q}(\lambda), \quad \text{где } \tilde{h}_{k_q}(\lambda) := h_q + h_{q+n} \frac{1}{\lambda s^q} + \dots + h_{k_q} \frac{1}{\lambda^{\frac{k_q - q}{n}} s^{k_q - n + k_q - 2n + \dots + q}}, \quad q=0, 1, \dots, n-1.$$

Если  $\overline{\lim}_{k_q \rightarrow \infty} |\tilde{h}_{k_q}(\lambda)| \neq 0$  хотя бы для одного  $q$ , то  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |\beta_k| \geq |\lambda|^{-\frac{1}{n}}$ .

Отсюда следует, что радиус сходимости ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k$  меньше  $|\lambda|^{-\frac{1}{n}}$ .

Так как  $|\lambda| > 1$ , то в этом случае и уравнение (5) и исходная задача (1) не имеют решений.

Обозначим через  $H_q(\omega) := \lim_{k_q \rightarrow \infty} h_{k_q}(\omega)$ ,  $q=0, 1, \dots, n-1$ . Пусть  $\rho_q$  —

радиусы сходимости рядов Тейлора функций  $H_q\left(\frac{1}{\omega}\right)$  в окрестности нуля.

Тогда  $\min_q(\rho_q)$  совпадает с радиусом сходимости ряда Тейлора функции

$h(z)$ . Поэтому для разрешимости задачи (5) необходимо, чтобы функция  $h(z)$  аналитически продолжалась до окружности  $|t| = |\lambda|^{-\frac{1}{n}}$  и вы-

полнялись равенства  $H_q(\lambda^{-\frac{1}{n}}) = 0$ ,  $q=0, 1, \dots, n-1$ . Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (5), но более сложно проверяемое практически, имеет вид

$$\overline{\lim}_{k_q \rightarrow \infty} \sqrt[k_q]{|\tilde{h}_{k_q}(\lambda)|} < |\lambda|^{-\frac{1}{n}}, \quad q=0, 1, \dots, n-1.$$

Это следует из соотношений:

$$1 > \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|\beta_k|} = \max_q \overline{\lim}_{k_q \rightarrow \infty} \sqrt[k_q]{|\lambda|^{-\frac{k_q - q}{n}} |\tilde{h}_{k_q}(\lambda)|} = |\lambda|^{-\frac{1}{n}} \max_q \overline{\lim}_{k_q \rightarrow \infty} \sqrt[k_q]{|\tilde{h}_{k_q}(\lambda)|}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович В. С., Арсени В. Ф. Математический анализ и его приложения.— Ростов, 1981, с. 3.
2. Арсени В. Ф., Евсеев Е. Г. Об одной граничной задаче со сдвигом.— Тбилиси, 1979.
3. Арнольд В. И.— Изв. АН СССР, 1961, т. 25, № 1, с. 21.

УДК 517.925.31

Р. А. ПРОХОРОВА, В. Г. КОМПЕЛЬ

### ПОКАЗАТЕЛИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Наряду с линейной системой

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (1)$$

где  $A(t)$  — непрерывная ограниченная ( $\|A(t)\| \leq M$ ) при  $t \geq 0$  матрица, рассмотрим квазилинейную систему

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad (2)$$

где непрерывное  $m$ -возмущение  $f(t, y)$  удовлетворяет условию

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq N \max(\|y_1\|^{m-1}, \|y_2\|^{m-1}) \|y_1 - y_2\|, \\ \|y\| < H, t \geq 0, m > 1. \quad (3)$$

Пусть показатели  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$  системы (1) отрицательны. В случае постоянной матрицы  $A(t) \equiv A$  А. А. Шестаковым в [1, с. 267] изучена структура множества  $\Sigma$  показателей нетривиальных решений системы (2), выходящих в момент  $t=0$  из любой достаточно малой окрестности начала координат  $y=0$ . Для правильной системы (1) при дополнительных предположениях на показатели системы (1) и  $m$ -возмущение  $f(t, y)$  аналогичный [1] результат получен в [2]. В работе [3] построены оценки решений системы (2) — (3). Цель настоящей работы — изучить структуру множества  $\Sigma$  в общем случае системы (1).

Пусть  $X(t) = (x_{ij}(t))$  — нормальная упорядоченная фундаментальная система решений системы (1), показатели столбцов которой  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$  соответственно кратности  $n_1, n_2, \dots, n_p, n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$ . Положим  $\Omega = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ . Пусть  $\delta_i$  — показатель  $i$ -й строки матрицы  $X^{-1}(t) = (\bar{x}_{ij}(t))$ , тогда коэффициент неправильности Д. М. Гробмана  $\sigma_\Gamma$  [4] вычисляется по формуле  $\sigma_\Gamma = \max_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i + \delta_i\}$ . Обозначим  $\chi[y] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|y(t)\|$ .

**Лемма 1.** Если выполнено условие

$$(m-1)\alpha_n + \sigma_\Gamma < 0, \quad (4)$$

то  $\Sigma \subseteq \Omega$ .

**Доказательство.** По теореме Д. М. Гробмана [4] при выполнении условия (4) существует достаточно малая окрестность начала координат  $\|y\| < h, h < H$ , что все решения  $y = y(t)$  системы (2), выходящие в момент  $t=0$  из этой окрестности ( $\|y(0)\| < h$ ), неограниченно продолжимы вправо и удовлетворяют условию  $\chi[y(t)] \leq \alpha_n$ .

Пусть  $y = y_0(t), \|y_0(0)\| < h$ , любое нетривиальное решение системы (2). На основании принципа линейного включения [5]  $y = y_0(t)$  является решением некоторой линейной системы

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \|Q(t)\| \leq N \|y_0(t)\|^{m-1}, t \geq 0. \quad (5)$$

Так как  $\chi[y_0(t)] \leq \alpha_n$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  справедлива оценка

$$\|y_0(t)\| \leq D_\varepsilon e^{(\alpha_n + \varepsilon)t}, t \geq 0. \quad (6)$$

Обозначим  $(m-1)\alpha_n + \sigma_\Gamma = -\gamma$ ,  $\gamma > 0$ , и пусть  $\varepsilon > 0$  столь мало, что  $-\varepsilon_1 = \varepsilon(m-1) - \gamma < 0$ .

В силу неравенства (6) норма матрицы возмущения  $Q(t)$  удовлетворяет оценке

$$\|Q(t)\| \leq ND_\varepsilon^{m-1} e^{(m-1)(\alpha_n + \varepsilon)t} \equiv N_\varepsilon e^{-(\sigma_\Gamma + \varepsilon_1)t}, \quad t \geq 0.$$

Применяя теорему Богданова — Гробмана [4, 6], получаем, что показатели систем (1) и (5) совпадают, и, следовательно,  $\chi[y_0(t)] \in \Omega$ . Лемма доказана.

*Следствие.* Если система (1) правильна, то  $\Sigma = \Omega$ , причем в любой достаточно малой окрестности начала координат многообразие начальных данных  $y(0)$  тех решений  $y = y(t)$ , для которых выполнено неравенство  $\chi[y] \leq \lambda_l$ ,  $l = 1, \dots, p$ , имеет размерность  $n_1 + n_2 + \dots + n_l$ .

Доказательство следствия вытекает из доказанной леммы и теоремы А. А. Шестакова [1, с. 267] и применения свойства обобщенной приводимости правильной системы.

При доказательстве теоремы будет использоваться следующая очевидно доказываемая

**Лемма 2.** Пусть дана система

$$\alpha_{j1}x_1 + \dots + \alpha_{jn}x_n + \varphi_j(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad j = 1, \dots, p, \quad p \leq n, \quad (7)$$

и пусть выполнены следующие условия:

- 1) функции  $\varphi_j$  вместе с  $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$  определены и непрерывны в некоторой окрестности нуля  $\|x\| < h$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, p$ ;
- 2)  $|\varphi_j(x_1, \dots, x_n)| \leq K\|x\|^m$ ,  $m > 1$ ,  $\|x\| < h$ ,  $j = 1, \dots, p$ ;
- 3) один из миноров  $p$ -го порядка матрицы коэффициентов  $(\alpha_{ij})$  отличен от нуля.

Тогда в любой достаточно малой окрестности нуля множество решений системы (7) образует многообразие размерности  $(n-p)$ .

**Теорема.** Если  $m \geq 2$  и выполнено условие (4), то  $\Sigma = \Omega$ , причем в любой достаточно малой окрестности начала координат многообразие начальных условий  $y(0) = \text{colon}(y_1(0), \dots, y_n(0))$  тех решений  $y = y(t)$ , для которых выполнено неравенство  $\chi[y] \leq \lambda_l$ ,  $l = 1, \dots, p$ , имеет размерность  $n_1 + n_2 + \dots + n_l$ .

**Доказательство.** Пусть  $y = y(t) = \text{colon}(y_1(t), \dots, y_n(t))$  — любое нетривиальное решение системы (2). Тогда по интегральной формуле Коши справедливо представление

$$y(t) = X(t)X^{-1}(0)y(0) + \int_0^t X(t)X^{-1}(\tau)f[\tau, y(\tau)]d\tau$$

или

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^n x_{ij}(t)c_j + \sum_{j=1}^n x_{ij}(t) \int_0^t \sum_{k=1}^n \tilde{x}_{jk}(\tau) f_k[\tau, y(\tau)]d\tau, \quad (8)$$

где  $\text{colon}(c_1, \dots, c_n) = X^{-1}(0)y(0)$ ,  $X^{-1}(0) = (a_{ij})$ ,  $c_j = a_{j1}y_1(0) + \dots + a_{jn}y_n(0)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Обозначим  $s_{jh}(t) = \tilde{x}_{jk}(t)f_h[t, y(t)]$ . Тогда (8) можно переписать в виде (см. [6])

$$\begin{aligned} y_i(t) = & \sum_{j=1}^{n_1 + \dots + n_{p-1}} x_{ij}(t) \left[ c_j + \sum_{k=1}^n \int_0^t s_{jk}(\tau) d\tau \right] - \\ & - \sum_{j=n_1 + \dots + n_{p-1} + 1}^n x_{ij}(t) \sum_{k=1}^n \int_t^\infty s_{jk}(\tau) d\tau + \sum_{j=n_1 + \dots + n_{p-1} + 1}^n x_{ij}(t) \left[ c_j + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^n \int_0^t s_{jk}(\tau) d\tau \right] \equiv S_1(t) + S_2(t) + S_3(t). \end{aligned} \quad (9)$$



Несобственные интегралы в представлении (9) сходятся, так как подынтегральная функция имеет отрицательный показатель. Действительно,

$$\chi [s_{ij}(t)] \leq \chi [N | \tilde{x}_{jk}(t) | \|y(t)\|^m] \leq \delta_j + m\alpha_n = \delta_j + \alpha_j + (m-1)\alpha_n \leq \sigma_\Gamma + (m-1)\alpha_n < 0, \quad j = n_1 + \dots + n_{p-1} + 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, n.$$

Из последнего неравенства имеем

$$\chi [x_{ij}(t) \int_t^\infty s_{jk}(\tau) d\tau] \leq \alpha_j + \delta_j + \chi [\|y(t)\|^m] \leq \alpha_j + \delta_j + (m-1)\alpha_n + \chi[y] \leq \leq \sigma_\Gamma + (m-1)\alpha_n + \chi[y] < \chi[y]$$

и, следовательно,  $\chi[S_2(t)] < \chi[y]$ .

Аналогично убеждаемся, что  $\chi[S_1(t)] \leq \max\{\lambda_{p-1}, \chi[y] - \gamma_1\}$ , где  $\gamma_1$  — некоторое положительное число.

Отсюда в силу леммы 1 и свойства несжимаемости нормальной фундаментальной системы решений следует, что показатель любого решения  $y = y(t)$  зависит от показателя функции  $S_3(t)$  следующим образом:

1) Если начальные данные  $y(0)$  таковы, что хотя бы для одного  $j \in \{n_1 + \dots + n_{p-1} + 1, \dots, n\}$  выполняется неравенство

$$c_j + \sum_{k=1}^n \int_0^\infty s_{jk}(\tau) d\tau \neq 0, \quad \text{то } \chi[y(t)] = \lambda_p.$$

2) Если же справедливы равенства

$$c_j + \sum_{k=1}^n \int_0^\infty s_{jk}(\tau) d\tau = 0, \quad (10)$$

то  $\chi[y(t)] \leq \lambda_{p-1}$ .

Покажем, что в любой достаточно малой окрестности начала координат существует  $(n - n_p)$  — мерное многообразие  $D_1$  начальных данных  $y(0)$ , что выполняются равенства (10).

Систему (10) можно переписать в виде

$$a_{j1}y_1(0) + \dots + a_{jn}y_n(0) + \varphi_j[y_1(0), \dots, y_n(0)] = 0, \quad j = n_1 + \dots + n_{p-1} + 1, \dots, n, \quad (11)$$

где  $\varphi_j[y_1(0), \dots, y_n(0)] = \sum_{k=1}^n \int_0^\infty \tilde{x}_{jk}(\tau) f_k[\tau, y(\tau)] d\tau$ .

Для системы (11) выполняются условия леммы 2. В самом деле, в силу неравенства  $\|y(t)\| \leq M_\varepsilon \|y(0)\| \exp\{\lambda_p + \varepsilon\}t$ ,  $\|y(0)\| < h$ , имеем

$$\left| \int_0^\infty s_{jk}(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^\infty |\tilde{x}_{jk}(\tau)| M_\varepsilon^m N \|y(0)\|^m \exp\{(m\lambda_p + m\varepsilon)\tau\} d\tau \equiv K_{jk} \|y(0)\|^m, \quad j = n_1 + \dots + n_{p-1} + 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, n, \text{ и, следовательно, справедлива оценка } |\varphi_j[y_1(0), \dots, y_n(0)]| \leq K \|y(0)\|^m, \quad j = n_1 + \dots + n_{p-1} + 1, \dots, n.$$

Кроме того, так как  $\det X^{-1}(0) \neq 0$ , то хотя бы один из миноров  $n_p$ -го порядка матрицы коэффициентов линейной части системы (11) отличен от нуля.

Тогда по лемме 2 в любой достаточно малой окрестности нуля  $\|y\| < h_1$  множество решений системы (11) образует  $n - n_p = n_1 + \dots + n_{p-1}$  — мерное многообразие  $D_1$ , т. е. существует  $n_1 + \dots + n_{p-1}$  — мерное многообразие  $D_1$  начальных данных  $(y_1(0), \dots, y_n(0))$ , что для решений  $y = y(t)$ , выходящих в момент времени  $t=0$  из этого многообразия, справедлива оценка  $\chi[y(t)] \leq \lambda_{p-1}$ ; в противном случае  $(y(0) \notin D_1, \|y(0)\| < h_1)$ ,  $\chi[y(t)] = \lambda_p$ .

Рассмотрим теперь решение системы (2)  $y = y(t)$ ,  $y(0) \in D_1$ . Для них справедливо представление

$$\begin{aligned}
y_i(t) = & \sum_{j=1}^{n_1+\dots+n_{p-2}} x_{ij}(t) \left[ c_j + \sum_{k=1}^n \int_0^t s_{jk}(\tau) d\tau \right] - \\
& - \sum_{j=n_1+\dots+n_{p-2}+1}^n x_{ij}(t) \sum_{k=1}^n \int_0^t s_{jk}(\tau) d\tau + \sum_{j=n_1+\dots+n_{p-2}+1}^{n_1+\dots+n_{p-1}} x_{ij}(t) \left[ c_j + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^n \int_0^t s_{jk}(\tau) d\tau \right] \equiv \tilde{S}_1(t) + \tilde{S}_2(t) + \tilde{S}_3(t). \quad (12)
\end{aligned}$$

Аналогично, как и выше, убеждаемся, что несобственные интегралы в представлении (12) сходятся и справедливы оценки  $\chi[\tilde{S}_2(t)] < \chi[y(t)]$ ,  $\chi[\tilde{S}_1(t)] = \max \{ \lambda_{p-2}, \chi[y] - \gamma_2 \}$ ,  $\gamma_2 > 0$ , и, следовательно, характеристический показатель  $\chi[y(t)]$  решения  $y = y(t)$ ,  $y(0) \in D_1$ , зависит от показателя функции  $\tilde{S}_3(t)$  следующим образом:

1) Если начальные данные  $y(0)$  таковы, что хотя бы при одном  $j \in \{n_1 + \dots + n_{p-2} + 1, \dots, n_1 + \dots + n_{p-2}\}$  выполняется неравенство  $c_j + \sum_{k=1}^n \int_0^\infty s_{jk}(\tau) d\tau \neq 0$ , то  $\chi[y(t)] = \lambda_{p-1}$ .

2) Если же справедливы равенства

$$c_j + \sum_{k=1}^n \int_0^\infty s_{jk}(\tau) d\tau = 0, \quad j = n_1 + \dots + n_{p-2} + 1, \dots, n, \quad (13)$$

то  $\chi[y(t)] \leq \lambda_{p-2}$ .

Покажем, что в любой достаточно малой окрестности начала координат  $\|y\| < h_1$  множество решений системы (13) образует  $n_1 + \dots + n_{p-2}$ -мерное многообразие  $D_2 \subset D_1$ .

Действительно, система (13) имеет вид

$$a_{j1}y_1(0) + \dots + a_{jn}y_n(0) + \varphi_j[y_1(0), \dots, y_n(0)] = 0, \quad j = n_1 + \dots + n_{p-2} + 1, \dots, n, \quad (14)$$

где  $|\varphi_j(y_1(0), \dots, y_n(0))| \leq K \|y(0)\|^m$ ,  $\|y(0)\| < h_1$ ,  $y(0) \in D_1$ ,  $m \geq 2$ , так как из представления (12) имеем при  $m \geq 2$  оценку  $\|y(t)\| \leq D_\varepsilon \|y(0)\| \exp \{ (\lambda_{p-1} + \varepsilon)t \}$ ,  $y(0) \in D_1$ ,  $m \geq 2$ . Кроме того, так как  $\det X^{-1}(0) \neq 0$ , то хотя бы один из миноров  $(n_{p-1} + n_p)$ -го порядка, окаймляющий отличный от нуля минор  $n_p$ -го порядка, не равен нулю.

Тогда в силу леммы 2 существует  $n_1 + \dots + n_{p-2}$ -мерное многообразие  $D_2 \subset D_1$ , что для показателя решения  $y = y(t)$ ,  $y(0) \in D_2$ , справедливо неравенство  $\chi[y(t)] \leq \lambda_{p-2}$ . В противном случае ( $y(0) \in D_1$ ,  $y(0) \notin D_2$ ),  $\chi[y(t)] = \lambda_{p-1}$ .

Проведя последовательно  $p$  раз аналогичные построения, закончим доказательство теоремы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Немецкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений.— М.— Л., 1949.
2. Игнатъева Г. К. О характеристических показателях систем с  $m$ -возмущениями.— Рукопись деп. в ВИНТИ, № 1763-79. Деп. от 17.05.79.
3. Fodor János.— Szemelyenyek, az Elte TTK, Analizis II. Tanszék tudományos munkáiból, 1979, № 11.
4. Гробман Д. М.— Мат. сб., 1952, т. 30, № 1.
5. Былов Б. Ф., Гробман Д. М.— УМН, 1962, т. 17, № 3.
6. Богданов Ю. С.— Мат. сб., 1957, т. 41, № 4.

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ЧАСТИЧНО НАБЛЮДАЕМЫМ СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССОМ

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим следующую задачу оптимального управления частично наблюдаемым случайным процессом  $\{\theta_t, \xi_t, 0 \leq t \leq T\}$  ( $\theta_t$  — ненаблюдаемая,  $\xi_t$  — наблюдаемая компонента), заданной с помощью системы стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d\theta_t = (F(t)\theta_t + G(t)u_t)dt + \Phi(t)d\omega_{1t}, \quad (1)$$

$$d\xi_t = \Theta_t^* \otimes D(t) \otimes \Theta_t dt + \sigma(t)d\omega_{2t}, \quad (2)$$

$\theta$  — гауссовский вектор,  $M\{\theta_0\} = \mu_0$ ,  $\text{cov}(\theta_0, \theta_0) = \gamma_0$ ,  $\xi_0 = 0$ , где  $u_t$  — управление;  $\theta_t$  — ненаблюдаемый  $n$ -мерный случайный процесс;  $\xi_t$  — наблюдаемый  $m$ -мерный случайный процесс  $\omega_{1t}, \omega_{2t}$   $n, m$ -мерные независимые винеровские процессы. Через  $D(t)$  обозначена

$$D(t) = \begin{bmatrix} D_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & D_m(t) \end{bmatrix}.$$

\* — символ транспонирования. Матрицы  $F(t), G(t), \Phi(t), D_i(t), i=1, m, \sigma(t)$  имеют следующие размерности соответственно  $(n \times n), (n \times r), (n \times n), (n \times n), (m \times m)$ .

$$\Theta_t^* \otimes D(t) \otimes \Theta_t \triangleq (\Theta_t^* D_1(t) \Theta_t, \dots, \Theta_t^* D_m(t) \Theta_t)^*.$$

При этих предположениях решение системы уравнений (1), (2) существует и единственно [1].

Требуется выбрать управление  $u_t$  как функционал от  $\xi_t^t = \{\xi_\tau, 0 \leq \tau \leq t\}$  так, чтобы было минимально математическое ожидание следующего выражения:

$$\frac{1}{2} \int_0^T (\Theta_t^* A(t) \Theta_t + u_t^* B(t) u_t) dt, \quad (3)$$

где матрицы  $A(t)$  и  $B(t)$  — симметрические, причем  $A(t)$  — неотрицательно определенная,  $B(t)$  — положительно определенная.

Сформулированная задача стохастического оптимального управления относится к классу задач управления по неполным данным, так как предполагается, что наблюдается только часть компонент вектора состояния  $(\theta_t, \xi_t)$ . Особенностью задачи (1), (2), (3) является то, что уравнение (2) является нелинейным относительно ненаблюдаемых компонент  $\theta_t$ , причем нелинейная зависимость квадратичная, т. е. такая, которая не имеет однозначной обратной. Подобная ситуация типична для теории широко распространенных в технике экстремальных систем [2].

Наиболее полно изучены задачи управления в случае, когда уравнения (1), (2) линейны относительно  $\theta_t$  и  $u_t$ . Для таких систем справедлива «теорема разделения» [3], согласно которой задачи управления и фильтрации можно рассматривать в некотором смысле независимо. Оптимальное управление является здесь линейной функцией от наилучшей в среднеквадратическом смысле оценки  $\mu_t$  процесса  $\theta_t$ .

При исследовании нелинейных систем методом динамического программирования можно получить уравнение Гамильтона — Якоби — Беллмана для определения оптимального закона управления и минимального значения функционала (3). Основной трудностью на этом пути является то, что функция Беллмана удовлетворяет нелинейному функциональному уравнению и содержит бесконечное число переменных, называемых достаточными координатами. Для того чтобы получить кон-

кретный результат, необходимо делать упрощение в процессе решения задачи.

В статье применяется метод «apparent linearization», рассмотренный в [4] при исследовании детерминированных систем, описываемый обыкновенными дифференциальными уравнениями. В результате получается уравнение Гамильтона — Якоби — Беллмана, которое решается аналитически.

**2. Линеаризация задачи (1), (2), (3).** Пусть  $\theta_t$  — какая-либо, не обязательно оптимальная, оценка вектора  $\theta_t$  по наблюдениям  $\xi_t^t$ . Наряду с системой уравнений (1), (2) рассмотрим следующую «линеаризованную»:

$$d\tilde{\theta}_t = (F(t)\tilde{\theta}_t + G(t)u_t) dt + \Phi(t)d\omega_{1t} \quad (1')$$

$$d\tilde{\xi}_t = \tilde{\theta}_t^* \otimes D(t) \otimes \tilde{\theta}_t dt + \sigma(t) d\omega_{2t}. \quad (2')$$

Рассмотрим задачу оптимального управления системой (1'), (2'), (3'). Для решения этой задачи применим метод достаточных координат [5]. Пусть  $p^u(t, \tilde{\theta} | \tilde{\xi}_0^t)$  — апостериорная плотность вероятностей значений процесса  $\tilde{\theta}_t$  в момент времени  $t$  при условии, что известна реализация  $\tilde{\xi}_0^t$  и фиксировано управление  $u_t$ .

**Теорема 1.** Апостериорная плотность вероятностей  $p^u(t, \tilde{\theta} | \tilde{\xi}_0^t)$  является нормальной с математическим ожиданием  $\mu_t^u$  и матрицей вторых центральных моментов  $\Gamma^u(t)$ , удовлетворяющими следующим уравнениям:

$$d\mu_t^u = (F(t)\mu_t^u + G(t)u_t) dt + \Gamma^u(t) \tilde{\theta}_t^* \otimes D(t) \otimes Q_2^{-1} (d\tilde{\xi}_t - \tilde{\theta}_t^* \otimes D(t) \otimes \mu_t dt), \quad (4)$$

$$\dot{\Gamma}^u = F(t)\Gamma + \Gamma F^*(t) + Q_1(t) - \Gamma^u K(\tilde{\theta}_t^*) \Gamma^u, \quad \mu_0^u = \mu_0, \quad \Gamma^u(0) = \gamma_0, \quad (5)$$

$$K(\tilde{\theta}_t^*) = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_t^* D_1(t) Q_2 D_1^*(t) \tilde{\theta}_t & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{\theta}_t^* D_m Q_2 D_m^* \tilde{\theta}_t \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \Phi \Phi^*, \quad Q_2 = \sigma \sigma^*.$$

**Доказательство.** Очевидно, что  $\tilde{\theta}_t$  является  $F_t^{\tilde{\xi}}$ -измеримой функцией, где  $F_t^{\tilde{\xi}} = \sigma\{\omega : \tilde{\xi}_s, s \leq t\}$   $\sigma$  — алгебра, порожденная случайными величинами  $\tilde{\xi}_s, s \leq t$ . (1'), (2') линейны относительно  $\tilde{\theta}_t$  с коэффициентами, являющимися  $F_t^{\tilde{\xi}}$  измеримыми функциями. В [6] показано, что случайный процесс  $(\tilde{\theta}_t, \tilde{\xi}_t)$  является условно-гауссовским с параметрами, удовлетворяющими уравнениям (4), (5).

Таким образом, установлено, что достаточными координатами в задаче (1), (2), (3) являются  $\mu_t, \Gamma(t)$ . Обозначим через

$$I(\mu, \Gamma, t) = \min_u M \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T (\tilde{\theta}_t^* A(t) \tilde{\theta}_t + u_t^* B(t) u_t) dt \mid \mu_t = \mu, \Gamma(t) = \Gamma \right\}.$$

Заметим, что уравнения (4), (5) образуют фильтр Калмана — Бьюси [7].

**Теорема 2.** Оптимальное управление  $u^0(t, \mu(t), \Gamma(t))$  и соответствующее значение функционала  $I(\mu, \Gamma, t)$  можно определить из решения следующего уравнения (Гамильтона — Якоби — Беллмана):

$$-\frac{\partial I}{\partial t} = \min_u \left\{ \frac{\partial I}{\partial \mu} (F(t)\mu + G(t)u) + \text{tr} \left[ \left( \frac{\partial I}{\partial \Gamma} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial \mu^2} \right) \Gamma \cdot K(\tilde{\theta}_t^*) \cdot \Gamma \right] + \frac{1}{2} (\mu^* A \mu + u^* B u + \text{tr} \Gamma A) \right\}, \quad I(\mu, \Gamma, T) = 0. \quad (6)$$

Доказательство. Вывод уравнения (6) проводится стандартным методом динамического программирования (см., например, [3]).

Заметим, что  $\Gamma^u(t)$  зависит от  $u$  неявно, только через  $\xi_0^t$ . Сделаем следующее упрощение: пусть  $\Gamma^u(t) \equiv \Gamma(t)$ , т. е. имеется только одна достаточная координата  $\mu_t$  для нахождения оптимального управления. В этом случае уравнение Гамильтона — Якоби — Беллмана примет следующий вид:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \min_u \left\{ \frac{\partial I}{\partial \mu} (F(t)\mu + G(t)u) + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \frac{\partial^2 I}{\partial \mu^2} \Gamma \cdot K(\hat{\theta}_t^*) \cdot \Gamma \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\mu^* A \mu + u^* B u + \text{tr} \Gamma A) \right\}, I(\mu, T) = 0. \quad (7)$$

Приравнявая к нулю производную по  $u$  правой части последнего уравнения, получаем выражение для оптимального управления. Исключая в правой части (7) управление  $u$ , получаем нелинейное уравнение в частных производных параболического типа для вычисления функций  $I(\mu, t)$ . Решение этого уравнения можно искать в виде ряда по степеням  $\mu$  с коэффициентами, зависящими от  $t$ :  $I(\mu, t) = s_0(t) + s_1^*(t)\mu + \frac{1}{2}\mu^* S(t)\mu + \dots$

Подставляя такой ряд в уравнение и группируя члены при одинаковых степенях  $\mu$ , можно записать уравнения для вычисления этих неизвестных коэффициентов. При этом оказывается, что уравнения для коэффициентов при степенях  $\mu$ , начиная с третьей, однородны и имеют нулевые граничные условия, т. е. эти коэффициенты равны нулю. Коэффициенты при первых трех степенях  $\mu$  удовлетворяют следующим уравнениям соответственно:

$$-\dot{s}_0 = \frac{1}{2} s_1^* B^{-1}(t)G(t)s_1 + \frac{1}{2} \text{tr} (S\Gamma \cdot K(\theta_t^*) \cdot \Gamma) + \frac{1}{2} \text{tr} \Gamma A, s_0(T) = 0, \\ -\dot{s}_1 = F^*(t)s_1, s_1(T) = 0, \quad (8) \\ -\dot{S} = F^*(t)S + SF(t) + A(t) - SG(t)B^{-1}(t)G^*(t)S, S(T) = 0.$$

Оптимальное управление имеет вид

$$u^0(t) = -B^{-1}(t)G^*(t)S(t)\mu_t, \quad (9)$$

где  $\mu_t$  удовлетворяет уравнению (4) при  $u_t = u^0(t)$ ;  $S(t)$  — является решением матричного уравнения Рикатти (8).

**3. Приближенное решение задачи (1), (2), (3).** В соответствии (2')  $\hat{\theta}_t$  — произвольная оценка процесса  $\theta_t$  по наблюдениям  $\xi_0^t$ . В качестве  $\theta_t$  можно взять оценку  $\mu_t$ , удовлетворяющую уравнению (4). Таким образом, для вычисления оценки  $\mu_t$  получается система уравнений:

$$d\mu_t = (F(t)\mu_t + G(t)u_t^0)dt + \Gamma(t)\mu_t^* \otimes D(t) \otimes Q_2^{-1}(t) (d\xi_t - \mu_t^* \otimes D(t) \otimes \mu(t)dt), \\ \dot{\Gamma} = F^*(t)\Gamma + \Gamma F(t) + Q_1(t) - \Gamma(t) \cdot K(\mu_t^*) \cdot \Gamma(t). \quad (10)$$

В этом случае закон управления (9), где  $\mu_t$  определяется уравнением (10), будет, вообще говоря, не оптимальным, но близким к оптимальному.

**4. Численный пример.** Количественный анализ закона управления (9), где  $\mu_t$  определяется уравнением (10), проводился методом статистического моделирования по 6 реализациям при

$$F(t) = \begin{pmatrix} -0,56 & 0 \\ 0 & -0,56 \end{pmatrix}, T = 5, D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ A(t) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, m = 1, \sigma = \sqrt{50}, \mu_0 = \gamma_0 = 1.$$

Номер реализации	Значения функционала (3)		$\frac{\Delta\Phi}{\Phi_0}$
	$\Phi_0$	$\Phi_1$	
1	2,982	3,001	0,006
2	2,997	3,001	0,001
3	1,901	2,052	0,080
4	1,959	2,074	0,058
5	3,026	3,031	0,002
6	3,188	3,211	0,007

Построенный закон управления сравнивался с оптимальным в задаче (1), (3), т. е. в случае, когда вектор  $\theta_t$  полностью наблюдается. Обозначим через  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$  значения функционала (3) при оптимальном управлении в задаче (1), (3) и при управлении (9) в задаче (1), (2), (3) соответственно. Положим  $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_0$ . Результаты моделирования приведены в таблице, из которой видно, что применение управления (9) в задаче (1), (2), (3) является достаточно эффективным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения.— Киев, 1968.
2. Медведь Г. А., Тарасенко В. П. Вероятностные методы исследования экстремальных систем.— М., 1967.
3. Вонэм В. М.— Математика, 1973, т. 17, № 4, с. 5.
4. Werni A., Cook C.— Automatica, 1975, v. 11, № 1, p. 75.
5. Парзев Ю. И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации.— М., 1976.
6. Липцер В. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов.— М., 1974.
7. Kalman R. E., Busy R. S.— Trans. ASME J. of Basic Engineering, 1961, v. 83, № 1, p. 123.
8. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления.— М., 1972.

УДК 517.968.23

А. П. ШИЛИН

### ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ, СВОДЯЩИЕСЯ К ЗАДАЧАМ ГИЛЬБЕРТА

Всякая  $H$ -непрерывная функция  $F(x)$ ,  $-\infty < x < +\infty$ ,  $F(\pm\infty) = 0$ , может быть единственным образом представлена в виде

$$F(x) = (I^+F)(x) - (IRF)(x), \quad (1)$$

где  $(I^+F)(x) = i \operatorname{Im} F(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} F(\tau) d\tau}{\tau - x}$  есть предельное значение функции, аналитической в верхней полуплоскости, причем  $(I^+F)(\pm\infty) = 0$ , а  $(IRF)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} F(\tau) d\tau}{\tau - x} - \operatorname{Re} F(x)$  — вещественнозначная функция, причем  $(IRF)(\pm\infty) = 0$ .

Рассмотрим уравнение

$$f(t) + (Lf)(t) = g(t), \quad -\infty < t < +\infty, \quad (2)$$

где  $(Lf)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} k_1(t-\tau) f(\tau) d\tau - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 k_1(t+\tau) \overline{f(\tau)} d\tau + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 k_2(t-\tau) f(\tau) d\tau + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 k_2(t+\tau) \overline{f(\tau)} d\tau$ , а все функции, в том

числе искомая  $f(t)$ , принадлежат классу  $\{0\}$  [1]. Преобразуя уравнение (2) по Фурье, получаем

$$F(x) + K_1(x)[F^+(x) + \overline{F^-(x)}] - K_2(x)[F^-(x) + \overline{F^+(x)}] = G(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (3)$$

Здесь и ниже преобразование Фурье от функции обозначается соответствующей заглавной буквой,  $F^\pm(x) = \pm \frac{1}{2} F(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\tau) d\tau}{\tau - x}$ .

Легко вычислить, что  $F^+(x) + \overline{F^-(x)} = (I^+F)(x)$ ,  $F^-(x) + \overline{F^+(x)} = (IRF)(x)$ , поэтому, представив функцию  $F(x)$  в виде (1), соотношение (3) можно привести к виду

$$(I^+F)(x) = \frac{1 + K_2(x)}{1 + K_1(x)} (IRF)(x) + \frac{G(x)}{1 + K_1(x)}, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (4)$$

Соотношение (4) есть задача Гильберта для верхней полуплоскости. Предполагая, что  $1 + K_j(x) \neq 0$ ,  $j=1, 2$ , задачу (4) можно решить в явном виде [2, с. 284], затем по формуле (1) найти функцию  $F(x)$  и, выполнив обратное преобразование Фурье, найти решение уравнения (2). Это решение мы не будем приводить, а приведем решение более сложного уравнения:

$$(Lf)(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 k_2(t - \tau) d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} k_3(\tau - s) f(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 k_2(t + \tau) d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{k_3(\tau - s)} \overline{f(s)} ds = g(t), \quad -\infty < t < +\infty. \quad (5)$$

Обозначая

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} k_3(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (6)$$

и преобразуя уравнение (5) по Фурье, приходим к задаче Гильберта

$$(I^+F)(x) = \frac{K_2(x)}{K_1(x)} (IR\Phi)(x) + \frac{G(x)}{K_1(x)}, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (7)$$

Будем предполагать для простоты, что  $K_j(x) = (x+i)^{-n} S_j(x)$ ,  $j=1, 2$ , причем функции  $S_j(x)$   $H$ -непрерывны на вещественной оси и не обращаются в нуль. Будем предполагать также, что функция  $G(x)$  имеет на бесконечности нуль порядка не ниже  $n+1$ . Решая задачу (7), находим

$$(I^+F)(x) = X_1^+(x) \left[ (I^+\Psi_1)(x) + \frac{P_{2\kappa_1-1}(x)}{(x^2+1)^{\kappa_1}} \right], \quad (8)$$

$$(IR\Phi)(x) = X_1^R(x) \left[ (IR\Psi_1)(x) + \frac{P_{2\kappa_1-1}(x)}{(x^2+1)^{\kappa_1}} \right],$$

где  $X_1^+(x) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\kappa_1} \exp[(I^+\Gamma_1)(x)]$ ,  $X_1^R(x) = \exp[(IR\Gamma_1)(x)]$ ,  $\Gamma_1(x) = \ln \left[ \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-\kappa_1} \frac{K_2(x)}{K_1(x)} \right]$ ,  $\Psi_1(x) = \frac{G(x)}{K_1(x)X_1^+(x)}$ ,  $\kappa_1 = \frac{1}{2\pi} \left[ \arg \frac{K_2(x)}{K_1(x)} \right]_{-\infty}^{+\infty}$ ,  $P_{2\kappa_1-1}(x)$  — многочлен степени  $2\kappa_1-1$  с произвольными вещественными коэффициентами,  $P_{2\kappa_1-1}(x) \equiv 0$  при  $\kappa_1 \leq 0$ . При  $\kappa_1 < 0$  для разрешимости задачи (7) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} \frac{G(x)}{K_1(x)X_1^+(x)} \frac{dx}{(x^2+1)^k} = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} \frac{G(x)}{K_1(x)X_1^R(x)} \frac{xdx}{(x^2+1)^k} = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, -\kappa_1.$$

Преобразуя (6) по Фурье, получаем:  $\Phi(x) = [1 + K_3(x)]F(x)$ , или  $(I^+\Phi)(x) - (IR\Phi)(x) = [1 + K_3(x)][(I^+F)(x) - (IRF)(x)]$ , откуда получаем еще одну задачу Гильберта

$$(I^+\Phi)(x) = -[1 + K_3(x)](IRF)(x) + H(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} H(x) &= (IR\Phi)(x) + [1 + K_3(x)](I^+\Phi)(x) = \\ &= \frac{X_1^R(x) + [1 + K_3(x)]X_1^+(x)}{(x^2 + 1)^{\kappa_1}} P_{2\kappa_1-1}(x) + \\ &+ X_1^R(x)(IR\Psi_1)(x) + [1 + K_3(x)]X_1^+(x)(I^+\Psi_1)(x). \end{aligned}$$

Предполагая, что  $1 + K_3(x) \neq 0$ , из задачи (9) найдем

$$(IRF)(x) = X_2^R(x) \left[ (IR\Psi_2)(x) + \frac{Q_{2\kappa_2-1}(x)}{(x^2 + 1)^{\kappa_2}} \right], \quad (10)$$

где  $X_2^R(x) = \exp[(IR\Gamma_2)(x)]$ ,  $\Gamma_2(x) = \ln \left[ \left( \frac{x-i}{x+i} \right)^{-\kappa_2} (-1 - K_3(x)) \right]$ ,  $\Psi_2(x) = \frac{H(x)}{X_2^+(x)}$ ,  $X_2^+(x) = \left( \frac{x-i}{x+i} \right)^{\kappa_2} \exp[(I^+\Gamma_2)(x)]$ ,  $\kappa_2 = \frac{1}{2\pi} [\arg(1 + K_3(x))]_{-\infty}^{+\infty}$ ,

$Q_{2\kappa_2-1}(x)$  — многочлен степени  $2\kappa_2 - 1$  с произвольными вещественными коэффициентами,  $Q_{2\kappa_2-1}(x) \equiv 0$  при  $\kappa_2 \leq 0$ . При  $\kappa_2 < 0$  для разрешимости задачи (9) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} \frac{H(x)}{X_2^+(x)} \frac{dx}{(x^2 + 1)^k} = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} \frac{H(x)1}{X_2^+(x)} \frac{xdx}{(x^2 + 1)^k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\kappa_2.$$

При  $\kappa_1 > 0$  эти условия будут представлять собой систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{l=1}^{2\kappa_1} a_{kl} c_l = a_k, \quad \sum_{l=1}^{2\kappa_1} b_{kl} c_l = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, -\kappa_2, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} a_{kl} &= b_{k, l-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} \frac{X_1^R(x) + [1 + K_3(x)]X_1^+(x)}{X_2^+(x)} \frac{x^{l-1} dx}{(x^2 + 1)^{\kappa_1 + k}}, \\ a_k &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} \frac{X_1^R(x)(IR\Psi_1)(x) + [1 + K_3(x)]X_1^+(x)(I^+\Psi_1)(x)}{X_2^+(x)} \frac{dx}{(x^2 + 1)^k}, \\ b_k &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} \frac{X_1^R(x)(IR\Psi_1)(x) + [1 + K_3(x)]X_1^+(x)(I^+\Psi_1)(x)}{X_2^+(x)} \frac{xdx}{(x^2 + 1)^k}. \end{aligned}$$

Обозначим  $r$  ранг этой системы. Положим  $r=0$ , если неравенства  $\kappa_1 > 0$ ,  $\kappa_2 < 0$  одновременно не выполняются.

**Теорема.** Для разрешимости уравнения (5) необходима и достаточна разрешимость задач Гильберта (7) и (9). Решение уравнения (5) находится по формуле

$$f(t) = \frac{1}{1 - 2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [(I^+F)(x) - (IRF)(x)] e^{-ixt} dx, \quad -\infty < t < +\infty,$$

где выражения для  $(I^+F)(x)$  и  $(IRF)(x)$  даются формулами (8) и (10).

При  $\kappa_1 > 0$ ,  $\kappa_2 < 0$  коэффициенты многочлена  $P_{2\kappa_1-1}(x) = \sum_{l=1}^{2\kappa_1} c_l x^{l-1}$ , входящего в выражение для  $(I^+F)(x)$ , должны являться общим решением системы (11). Число произвольных вещественных постоянных, входящих в решение уравнения (5), равно  $\max\{0, 2\kappa_1\} + \max\{0, 2\kappa_2\} - r$ .



Укажем в заключение на работу Ю. И. Черского [3], в которой одно интегральное уравнение типа свертки также решается сведением его к задачам Гильберта. Конструкция уравнения (5) близка к другим работам Ю. И. Черского [4, 5].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки.— М., 1978.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М., 1977.
3. Черский Ю. И.— Сообщения АН ГССР, 1982, т. 106, № 3, с. 481.
4. Черский Ю. И.— Докл. АН СССР, 1979, т. 248, № 4, с. 802.
5. Черский Ю. И.— Украинский матем. ж., 1981, т. 33, № 6, с. 793.

УДК 519.1

А. А. КОВАЛЕВ, В. В. МАЛЫШКО

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТРУДОЕМКОСТИ АЛГОРИТМОВ УСТАНОВЛЕНИЯ ИЗОМОРФИЗМА ОРГРАФОВ

Целью данной статьи является практическое сравнение средней трудоемкости двух известных алгоритмов установления изоморфизма орграфов [1, 2] и нового алгоритма, разработанного на основе аппарата дуговых графов [3] и техники Холкрофта [4]. Результаты экспериментов показывают, что выбор инвариантов, определяемых на основе дуговых графов, позволяет уменьшить перебор и обеспечивает предлагаемому алгоритму приемлемую среднюю трудоемкость по сравнению с рассматриваемыми методами [1, 2]. Исследования предусматривали единую политику при реализации алгоритмов (структуры данных, приемы программирования) и проводились как для случайных орграфов, так и для орграфов, полученных из сильно регулярных графов заменой каждого ребра на пару разнонаправленных дуг. Последний класс часто используется при исследовании алгоритмов тестирования изоморфизма графов. Подробные сведения о состоянии проблемы изоморфизма графов можно найти в обзорах [5, 6].

1. Применение метода дуговых графов для распознавания изоморфизма орграфов. Пусть дан помеченный орграф  $D(V, A)$  без петель и параллельных дуг, и для него уже построен дуговой граф  $D^{(k-1)}(V^{(k-1)}, A^{(k-1)})$  порядка  $k-1$  ( $k \geq 1$ ). При  $k=1$  орграф  $D^{(0)}(V^{(0)}, A^{(0)})$  совпадает с орграфом  $D(V, A)$ . Пусть  $A^{(k-1)} \subset A^{(k-1)}$  — подмножество дуг, принадлежащих контурам длины  $k$ . Тогда дуговой граф  $D^{(k)}(V^{(k)}, A^{(k)})$  определяется следующим образом. Множество вершин  $V^{(k)}$  совпадает с  $A^{(k-1)} \setminus \bar{A}^{(k-1)}$ ; множество дуг  $A^{(k)}$  состоит из таких и только таких пар  $(v_i^{(k)}, v_j^{(k)})$ , которым в  $D^{(k-1)}(V^{(k-1)}, A^{(k-1)})$  соответствует путь длины 2, причем  $V_i^{(k)}$  определяется начальной дугой этого пути [3].

Метод дуговых графов позволяет реализовать систематическое перечисление путей с заданными свойствами в исходных орграфах. На основе получаемой системы инвариантов выполняется построение начального разбиения множество вершин исследуемых орграфов. Особенность предлагаемого подхода заключается в сознательном увеличении затрат времени работы ЭВМ на построение более точного начального разбиения с тем, чтобы сократить затраты на выполнение перебора, реализуемого на основе поиска с возвращением. В результате возможно получение общего выигрыша по времени, что подтверждается проведенными экспериментами.

Обозначим в орграфе  $D(V, A)$  через  $P_i, C_i$  элементарный путь и контур длины  $i$  соответственно, через  $T_i$  простой путь длины  $i$ . Пара букв в скобках рядом с обозначением пути будет конкретизировать начальную и конечную вершины пути, если это необходимо. Множество путей в орграфе  $D(V, A)$  будем обозначать заглавными рукописными буквами, например  $P_i(v, u), T_i(v, u)$ .

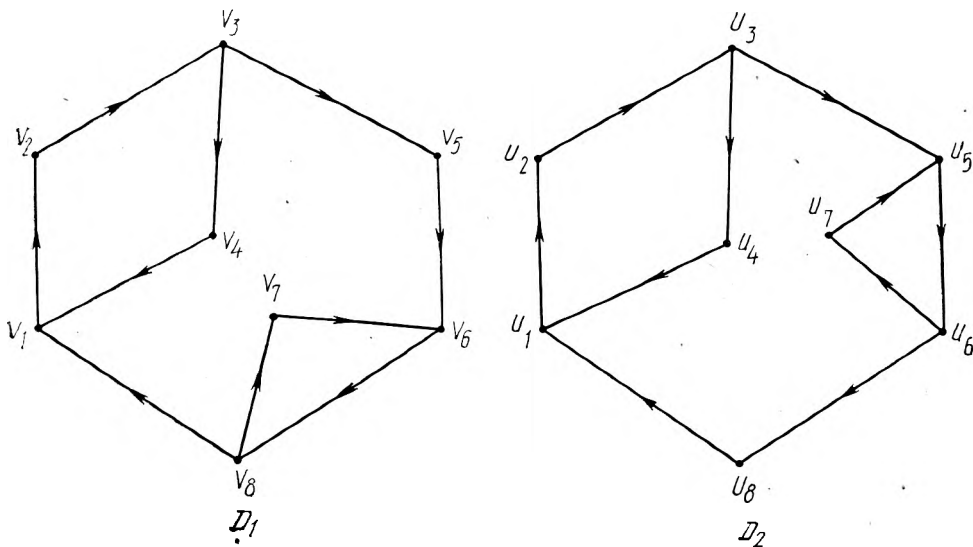


Рис. 1

Множество элементарных путей фиксированной длины неоднозначно определяет структуру исследуемого орграфа.

**Утверждение 1.** Орграф  $D(V, A)$  не определяется однозначно множеством его элементарных путей длины  $k \geq 0$ , если он содержит, по крайней мере, один из следующих частичных подграфов: 1) частичный подграф, образованный элементарными контурами  $C_{r_1}, C_{r_2}, C_{r_3}$  такими, что  $C_{r_1} \cap C_{r_2} = \emptyset$ ,  $C_{r_1} \cap C_{r_3} = P_s$ ,  $C_{r_2} \cap C_{r_3} = P_t$ ,  $C_{r_3} \setminus (C_{r_1} \cup C_{r_2}) = P_m \cup P_l$ , где  $s, t \neq 0$ ,  $s \neq t$ ,  $r_1 \neq r_2$ ; 2) частичный подграф, образованный элементарным путем  $P_{s+t+t}$  и элементарным контуром  $C_r$  такими, что  $P_{s+t+t} \cap C_r = P_l$ , где  $s, t \neq 0$ ,  $s \neq t$ .

Доказательство проводится конструктивно на основе метода построения последовательности дуговых графов для указанных частичных подграфов.

Предлагаемый алгоритм использует более сильный инвариант — множество простых путей фиксированной длины орграфа  $D$ , которое может быть найдено с помощью последовательности дуговых графов, построенной для реберного орграфа  $H = L(D)$  [7]. Простые пути, определяемые на основе последовательности дуговых графов  $H^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , несут информацию о местах крепления элементарных контуров исходного орграфа  $D$ , в то время как в обычной последовательности дуговых графов  $D^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , такая информация терялась. Вместе с тем используемая в предлагаемом алгоритме система инвариантов не является полной.

**Утверждение 2.** Орграф  $D(V, A)$  не определяется однозначно множеством его простых путей длины  $k \geq 0$ , если он содержит частичный подграф, образованный элементарными контурами  $C_{r_1}, C_{r_2}, C_{r_3}$  такими, что  $C_{r_1} \cap C_{r_2} = \emptyset$ ,  $C_{r_1} \cap C_{r_3} = P_s$ ,  $C_{r_2} \cap C_{r_3} = P_l$ ,  $C_{r_3} \setminus (C_{r_1} \cup C_{r_2}) = P_m \cup P_t$ , где  $s, l \neq 0$ ,  $r_1 \neq r_2$ ,  $r_1 - s = r_2 - l$ .

**Доказательство.** Орграфы  $D_1$  и  $D_2$  (рис. 1) содержат частичные подграфы, описанные в утверждении 2, и не являются изоморфными. Однако при построении последовательности дуговых графов для  $L(D_1)$  и  $L(D_2)$  получаем совпадающие значения выбранного инварианта для любого  $k$ , что и доказывает утверждение.

2. Описание алгоритма. Пусть заданы два орграфа  $D_1(V_1, A_1)$  и  $D_2(V_2, A_2)$ , проверяемые на изоморфизм. Пусть  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ,  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ,  $|V_1| = |V_2| = n$ ,  $|A_1| = |A_2| = m$ . Рассмотрим сумму данных орграфов  $D(V, A) = D_1(V_1, A_1) + D_2(V_2, A_2)$ , где  $V = V_1 \cup V_2$ ,  $A = A_1 \cup A_2$ . Проблема определения изоморфизма орграфов  $D_1$  и  $D_2$  сводится теперь к проблеме

построения разбиения множества вершин орграфа  $D = D_1 + D_2$  на орбиты его группы автоморфизмов [5].

Пусть  $N$  — множество натуральных чисел. Определим функцию  $f_k: V \rightarrow V \times N$  следующим образом: для  $v \in V$   $f_k(v) = \{(u, r) \mid u \in V, \exists T_k(v, u) \in T_k(v, u), |T_k(v, u)| = r\}$ . Будем считать, что множество пар  $(u, r)$  упорядочено по вторым элементам. Функция  $f_k$  может быть построена на основе дугового графа  $H^{(k-1)}$ . Действительно, между множеством вершин дугового графа  $H^{(k-1)}$  и множеством простых путей длины  $k$  орграфа  $D$  существует взаимно однозначное соответствие [8]. Дополнительно для построения  $f_k$  будем присваивать любой вершине орграфа  $H^{(k)}$  составной номер  $vu$ , где  $v$  — начальная,  $u$  — конечная вершины соответствующего простого пути орграфа  $D$ . Обозначим через  $F_k(v)$ ,  $S_k(v)$  множество первых элементов и строку вторых элементов упорядоченных пар значений функции  $f_k(v)$  соответственно. Множество строк  $S_k(V)$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$  однозначно определяет разбиение  $\pi = \{B^1, B^2, \dots, B^l\}$  множества вершин  $V$  на непересекающиеся непустые подмножества (блоки) такие, что вершины  $x, y \in B^j$ , где  $j \in \{1, 2, \dots, l\}$ , тогда и только тогда, когда  $S_k(x) = S_k(y)$ . Напомним, что блок  $B^i = V_1^i \cup V_2^i$ , где  $V_1^i \subset V_1$ ,  $V_2^i \subset V_2$ . Ясно, что при  $|V_1^i| \neq |V_2^i|$  для некоторого  $i \in \{1, 2, \dots, l\}$  исходные орграфы  $D_1$  и  $D_2$  неизоморфны. В процессе построения последовательности дуговых графов  $H^{(k)}$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) для орграфа  $H=L(D)$  можно получить, вообще говоря,  $m$  различных разбиений  $\pi$ . В качестве начального разбиения  $\pi_0$  будет использоваться разбиение с максимальным числом блоков. Улучшением разбиения  $\pi_0$  будем называть нахождение разбиения  $\pi_* = \{B_*^1, B_*^2, \dots, B_*^q\}$  множества  $V$  со свойствами: а)  $\pi_*$  — подразбиение разбиения  $\pi_0$  (т. е. каждое множество  $B_*^i$  является подмножеством некоторого множества  $B_0^j$ ); б) для  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, q\}$  и  $\forall u, v \in B_*^i$  выполняется условие  $|F_k(u) \cap B_*^j| = |F_k(v) \cap B_*^j|$ ; в) разбиение  $\pi_*$  является минимальным по числу блоков среди разбиений, удовлетворяющих условиям а), б).

Обозначим процедуру построения начального разбиения  $\pi_0$  и функции  $F_k$  через  $ARCGRAPH(D)$  и процедуру улучшения некоторого разбиения  $\pi$  через  $REPART(\pi)$ . Тогда разработанный алгоритм установления изоморфизма орграфов можно представить следующим образом.

```

begin
рекурсивная процедура BASKTR( $\pi, i, (v, u)$ );
begin
комментарий  $\{B^1, B^2, \dots, B^l\}$  — текущее разбиение;
 $\pi \leftarrow \{B^1, B^2, \dots, B^i \setminus \{v, u\}, \dots, B^l, \{v, u\}\}$ ;
выполнить REPART( $\pi$ );
если  $\exists$  блок  $B^j = V_1^j \cup V_2^j$  такой, что  $|V_1^j| \neq |V_2^j|$  или  $|V_1^j| \cdot |V_2^j| = 0$ , то
вернуться на предыдущий уровень рекурсии;
если не  $\exists$  блока  $B^j = V_1^j \cup V_2^j$  такого, что  $|V_1^j| = |V_2^j| \geq 2$ , то «оргра-
фы изоморфны», останов;
пусть  $B^k = V_1^k \cup V_2^k$  такой блок, что  $|V_1^k| = |V_2^k| \geq 2$ , и  $x \in V_1^k$ ;
для каждой  $y \in V_2^k$  выполнить BASKTR( $\pi, k, (x, y)$ );
end
 $V = V_1 \cup V_2$ ;
 $A = A_1 \cup A_2$ ;
выполнить ARCGRAPH( $D(V, A)$ );
выполнить BASKTR( $\pi_0, 1, \emptyset$ );
«графы неизоморфны»;
end

```

3. Особенности реализации алгоритма и анализ результатов. Сложность процедуры улучшения разбиения  $O(n \cdot \log n)$ , где  $n = |V|$  [4]. Для использования данной процедуры в разработанном алгоритме необходимо на начальном этапе построить функцию  $F_k$ , для чего используется по-

Временные характеристики исследуемых алгоритмов

n	Кол-во тестов	Среднее время работы алгоритмов, с			Среднее число ветвей дерева поиска алгоритмов		
		I	II	III	I	II	III
5	15	0,34	0,22	3,27	1	1	1
10	15	1,96	0,68	8,68	1	1	1
15	15	8,04	2,08	19,62	1	1	1
20	15	15,28	4,74	37,16	1	1	2
25	15	27,64	9,48	62,21	1	1	3
30	15	38,9	19,12	90,08	1	2	3
35	15	59,02	33,54	125,29	1	2	5
40	15	72,43	53,4	160,93	1	3	6
45	15	93,84	76,54	225,71	1	4	8
50	15	119,07	112,62	287,73	1	4	10
55	15	149,97	164,04	359,07	1	6	14
60	15	183,14	221,06	442,52	1	8	18
65	15	226,08	287,52	561,18	1	10	23
25	6	34,86	17,34	89,16	2	9	12
26	9	36,78	21,97	98,24	2	7	9

последовательность дуговых графов  $H^{(k)}$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) для орграфа  $H = L(D)$ . В [8] доказано, что для построения данной последовательности необходимо произвести  $O(d^2 \cdot |T|)$  действий, где  $T$  — множество простых путей орграфа  $D$ ,  $d = \max_{v_i \in V} \{d^+(v_i), d^-(v_i)\}$  и  $d^+(v_i), d^-(v_i)$  — полустепени

захода и исхода вершины  $v_i$  соответственно. После построения начального разбиения (процедура *ARCGRAPH*) требуется дополнительный перебор, реализуемый рекурсивной процедурой поиска с возвращением (*BACKTR*). Алгоритм [9] использует аналогичную схему реализации процедуры *BACKTR*, однако на начальном этапе используется тривиальное разбиение ( $|\pi_0| = 1$ ), последовательное улучшение которого производится только на основе отношения смежности (т. е. путей длины 1). Использование более мощной системы инвариантов — множества простых путей фиксированной длины — приводит к уменьшению числа ветвей дерева поиска, т. е. к уменьшению числа вызовов процедуры поиска с возвращением, что подтверждается приводимыми ниже результатами проведенных экспериментов.

Предлагаемый алгоритм и алгоритмы [1, 2] (обозначим их условно цифрами I, II, III соответственно) были реализованы на языке ПЛ/1, счет производился на ЭВМ ЕС-1022.

В таблице приводятся результаты экспериментов, проведенных на случайной выборке орграфов с числом дуг  $m = \left\lceil \frac{n^2 - n}{2} \right\rceil$ . Последние две строки соответствуют результатам, полученным на симметричных сильно регулярных орграфах.

На рис. 2 изображено изменение среднего времени работы алгоритмов I, II, III. Результаты свидетельствуют: 1) число ветвей дерева поиска предлагаемого алгоритма I является наименьшим по сравнению с II и III; 2) при  $n \geq 52$  средние временные характеристики предпочтительнее у алгоритма I на случайной выборке орграфов произвольной структуры; 3) на симметричных сильно регулярных орграфах с 25 и 26 вершинами временные характеристики алгоритмов I и II сравнимы и предпочтительнее, чем у алгоритма III.

Отметим, что временные характеристики предлагаемого алгоритма на

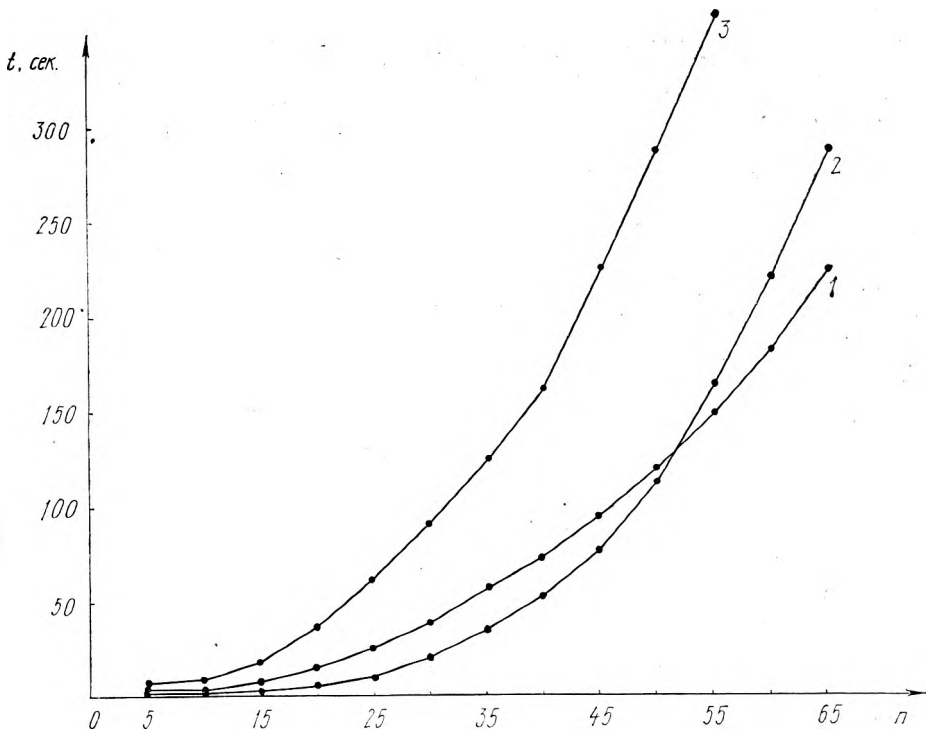


Рис. 2. Зависимости средних временных характеристик алгоритмов I, II, III (кривые 1, 2, 3 соответственно) от размерности задачи

случайных орграфах и симметричных сильно регулярных орграфах незначительно отличаются друг от друга. По-видимому, класс симметричных сильно регулярных орграфов не является плохим входом для разработанного алгоритма. Открытым остается вопрос поиска других таких классов орграфов. В терминах функций  $f_k(V)$ , где  $k=1, 2, \dots, t$ , можно дать лишь их предварительную характеристику, нуждающуюся в дальнейшей конкретизации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Deo N., Davis J. M., Lord R. E.—BIT, 1977, v. 17, p. 16.
2. Schmidt D. C., Druffel L. E.—JACM, 1976, v. 23, p. 433.
3. Лепешинский Н. А., Малышко В. В.—Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, 1976, № 1, с. 5.
4. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов.— М., 1979.
5. Read R. C., Corneil D. G.—J. Graph Theory, 1977, v. 1, p. 339.
6. Зсмляченко В. Н., Корнеев Н. М., Тышкевич Р. И.—Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-т АН СССР, 1982, № 118, с. 83.
7. Харари Ф. Теория графов.— М., 1973.
8. Малышко В. В.—Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, 1976, № 5, с. 118.
9. Kubo N., Shirakawa I., Ozaki H.—Proceedings of 1979 ISCAS, 1979, p. 641.

УДК 519.4

В. М. ШИРЯЕВ

### ПОЛУРЕШЕТКИ С ПОЛУДИСТРИБУТИВНЫМИ РЕШЕТКАМИ ПОДПОЛУРЕШЕТОК

В данной работе исследуются некоторые структурные свойства полурешеток (коммутативных полугрупп идемпотентов). Рассматриваются полурешетки с  $\vee$ -полудистрибутивными и  $\wedge$ -полудистрибутивными решетками подполурешеток.

Решетка  $(L, \wedge, \vee)$  называется  $\vee$ -полудистрибутивной [1], если для нее выполняется условие Йонссона  $(SD_{\vee})$  [2]:  $a \vee b = a \vee c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = a \vee b$ . Двойственно определяется  $\wedge$ -полудистрибутивность решетки. Хотя условия полудистрибутивности и уступают в популярности дистрибутивности и модулярности, тем не менее изучение полудистрибутивных решеток представляет интерес, так как условию  $(SD_{\vee})$  или  $(SD_{\wedge})$  подчиняются многие естественные классы решеток, например, подрешеток свободных решеток [3], переводимых решеток [4] . . . , решеток подквазиоморфизмов квазиоморфизмов универсальных алгебр [5, 1] и пр. Особая роль принадлежит условию  $(SD_{\wedge})$  при изучении полурешеток, так как решетка конгруэнций любой полурешетки  $\wedge$ -полудистрибутивна [6, 7].

Из описания полугрупп с дистрибутивными и модулярными решетками подполугрупп, полученного Л. Н. Шевриным [8—10] и М. Эго [11, 12], следует, что среди полурешеток только цепи (линейно-упорядоченные множества) обладают дистрибутивными (или модулярными) решетками подполурешеток. В данной работе показано (теорема 2), что это утверждение остается верным, если требование дистрибутивности заменить на требование  $\wedge$ -полудистрибутивности. Теорема 1 характеризует полурешетки с  $\vee$ -полудистрибутивными решетками подполурешеток. В качестве следствия установлена  $\vee$ -полудистрибутивность решетки подполурешеток полурешетки с условием максимальности.

Придерживаемся терминологии и обозначений теории решеток [2] . . . и теории полугрупп [13] . . .  $N$  означает множество натуральных чисел  $\{1, 2, 3, \dots\}$ . Далее пусть  $(S, \cdot)$  — полурешетка. Если  $a, b \in S$ , то  $a \parallel b$  означает, что  $a$  и  $b$  несравнимы. Если  $A \subset S$ , то  $\langle A \rangle$  — подполурешетка, порожденная множеством  $A$  или  $\emptyset$ , если  $A$  — пустое множество. Через  $\Sigma(S)$  обозначается множество всех подполурешеток полурешетки  $S$ . Вместе с пустым подмножеством оно образует решетку (по включению) с операциями  $\wedge$  и  $\vee$ :

$$\begin{aligned} A \wedge B &= A \cap B. \\ A \vee B &= \langle A \cup B \rangle. \end{aligned}$$

Эта решетка обозначается через  $\Sigma'(S)$  и называется решеткой подполурешеток полурешетки  $S$ .

Подцепь  $B$  полурешетки  $S$  назовем специальной, если выполняются следующие условия:

- 1)  $B$  упорядочена по типу  $\omega$ , т. е.  $B = \{b_k\}_{k \in N}$  и  $b_j \leq b_k \Leftrightarrow j \leq k$ .
- 2) существует подполурешетка  $A$  полурешетки  $S$ , не пересекающаяся с  $B$  и такая, что

$$\forall k \in N \exists a \in A (ab_{k+1} = b_k). \quad (1)$$

**Теорема 1.** Для того чтобы решетка  $\Sigma'(S)$  подполурешеток полурешетки  $S$  была  $\vee$ -полудистрибутивной, необходимо и достаточно, чтобы  $S$  не содержала специальных подцепей.

**Доказательство.** *Необходимость.* Пусть для  $B$  и  $A$  выполняются условия 1) и 2). Положим  $B_1 = \{b_{2k-1}\}_{k \in N}$ ,  $B_2 = \{b_{2k}\}_{k \in N}$ . Ясно, что  $B_1, B_2 \in \Sigma'(S)$ . Докажем, что

$$A \vee B_1 = A \vee B_2. \quad (2)$$

В самом деле, согласно (1), для каждого  $k \in N$  существует  $a \in A$  такой, что  $b_{2k-1} = ab_{2k} \in A \vee B_2$ . Поэтому  $B_1 \subset A \vee B_2$  и  $A \vee B_1 \subset A \vee B_2$ . Аналогично,  $A \vee B_2 \subset A \vee B_1$ . (2) доказано. Однако  $A \vee (B_1 \cap B_2) = A \vee \emptyset = A \neq A \vee B_1$ , поэтому условие  $(SD_{\vee})$  не выполняется для  $\Sigma'(S)$ .

*Достаточность.* Пусть  $S$  — полурешетка, не содержащая специальных подцепей. Предположим, что  $A, B, C \in \Sigma'(S)$  и

$$A \vee B = A \vee C. \quad (3)$$

Докажем, что

$$A \vee (B \wedge C) = A \vee B. \quad (4)$$

Можно считать, что  $A, B, C \in \Sigma(S)$ . Достаточно показать, что

$$B \subset A \vee (B \cap C). \quad (5)$$

Пусть  $b_1 \in B$  и предположим, что

$$b_1 \notin A \vee (B \cap C). \quad (6)$$

Из (3) следует, что для некоторых  $a_1 \in A, b_2 \in C$  имеем  $b_1 = a_1 b_2$ . Но тогда ввиду (6)  $b_1 \in (B \setminus C) \setminus A, b_2 \in (C \setminus B) \setminus A$  и  $b_1 < b_2$ . Далее по индукции строим множества  $A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}, B_{k+1} = \{b_1, b_2, \dots, b_{k+1}\}$ , удовлетворяющие условиям:

а) для всякого  $j \leq k+1$

$$b_j \in C \setminus B, \text{ если } j \text{ четное,}$$

$$b_j \in B \setminus C, \text{ если } j \text{ нечетное;}$$

$$\text{б) } A_k \subset A;$$

$$\text{в) } b_j = a_j b_{j+1}, j = 1, 2, \dots, k;$$

$$\text{г) } A \cap B_{k+1} = \emptyset;$$

$$\text{д) } b_1 < b_2 < \dots < b_{k+1}.$$

Из сказанного выше следует, что для  $A_1 = \{a_1\}, B_2 = \{b_1, b_2\}$  эти условия выполняются. Пусть теперь множества  $A_k$  и  $B_{k+1}$  построены. Тогда из а) имеем в случае четного  $k$ :

$$b_{k+1} \in B \setminus C. \quad (7)$$

Так как  $b_{k+1} \in A \vee B = A \vee C$ , существуют  $a_{k+1} \in A$  и  $b_{k+2} \in C$ , такие, что

$$b_{k+1} = a_{k+1} b_{k+2}. \quad (8)$$

Если бы  $b_{k+2} \in B$ , то из условия в) для  $A_k$  и  $B_{k+1}$  имели бы:  $b_1 = a_1 b_2 = \dots = a_1 a_2 \dots a_k b_{k+1} = a_1 a_2 \dots a_{k+1} b_{k+2} \in A \vee (B \cap C)$ , что противоречит (6). Следовательно,  $b_{k+2} \in C \setminus B$ , так что условие а) для  $B_{k+2}$  выполняется. Далее, из (8) получаем в), а также  $b_{k+1} < b_{k+2}$ , поэтому д) также выполняется для  $B_{k+2}$ . Проверим г). Пусть  $j \leq k+2$  и  $b_j \in A$ . Если  $j = 1$ , то это противоречит (6), а для  $j > 1$  имеем:  $b_1 = a_1 b_2 = \dots = a_1 \dots a_{j-1} b_j \in A$ , что противоречит снова (6). Итак, условия а) — д) выполняются для  $A_{k+1}$  и  $B_{k+2}$ . Положим  $A' = \langle a_1, a_2, \dots \rangle, B' = \{b_1, b_2, \dots\}$ . Докажем, что  $B'$  есть специальная подцепь полурешетки  $S$ , что приведет к противоречию с предположением относительно  $S$ .

Ввиду д)  $B'$  есть подцепь  $S$ , упорядоченная по типу  $\omega$ . Так как  $A' \subset A$ , из г) ввиду  $B' = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{k+1}$  имеем  $A' \cap B' = \emptyset$ . Условие (1) выполняется ввиду в). Итак,  $B'$  — специальная подцепь. Противоречие показывает, что верно (5), а это и требовалось. Теорема доказана.

*Следствие 1.* Полурешетка с условием обрыва возрастающих цепей имеет  $\vee$ -полудистрибутивную решетку подполурешеток.

*Следствие 2.* Конечная полурешетка имеет  $\vee$ -полудистрибутивную решетку подполурешеток.

*З а м е ч а н и е 1.* Следствие 2 можно получить из теории двойственности между полурешетками и компактными нульмерными топологическими полурешетками, развитой в [14]. Именно, из предложения 1.4.1 упомянутой работы следует, что функтор двойственности  $\underline{S} \rightarrow \underline{Z}$  индуцирует антиизоморфизм между решеткой конгруэнций полурешетки  $S$  (с единицей) и решеткой  $L(\widehat{S})$  замкнутых подполурешеток (с единицей) дуальной компактной нульмерной полурешетки  $\widehat{S}$ . Согласно [6 и 7], первая решетка  $\vee$ -полудистрибутивна, поэтому решетка  $L(\widehat{S})$   $\vee$ -полудистрибутивна. Если предположить, что  $\widehat{S}$  получена из произвольной конечной полурешетки  $T$  внешним присоединением единицы, то отсюда получаем, что  $\Sigma'(T)$   $\vee$ -полудистрибутивна.

*Следствие 3.* Пусть  $S$  — полурешетка ширины 2. Решетка  $\Sigma'(S)$   $\vee$ -полудистрибутивна тогда и только тогда, когда для каждой компоненты разложения  $S$  в ординальную сумму ординально неразложимых подполурешеток цепь разложимых элементов не содержит возрастающих подцепей.

Это следствие легко получить из теоремы 1 и описания полурешеток ширины 2, данного в [15].

**Теорема 2.** Решетка  $\Sigma'(S)$  подполурешеток полурешетки  $S \wedge$ -полудистрибутивна тогда и только тогда, когда  $S$  есть цепь.

**Доказательство.** Если  $S$  — цепь, то  $\Sigma'(S)$  дистрибутивна и потому  $\wedge$ -полудистрибутивна. Обратное, предположим, что  $\Sigma'(S) \wedge$ -полудистрибутивна. Пусть  $a, b \in S$  и  $a \parallel b$ . Тогда  $ab < a, ab < b$  и так как  $\{a\}, \{b\}, \{ab\} \in \Sigma'(S)$ , из  $\{ab\} \cap \{a\} = \{ab\} \cap \{b\} = \emptyset$  должно следовать, что  $\{ab\} \cap \langle a, b \rangle = \emptyset$ , однако  $ab \in \langle a, b \rangle$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Игошин В. И.— В сб.: Упорядоченные множества и решетки. Саратов, 1978, вып. 5, с. 44.
2. Гретцер Г. Общая теория решеток.— М., 1982.
3. Jonsson B.— Can. J. Math., 1961, v. 13, p. 256.
4. Grätzer G., Platt C. R.— Can. J. Math., 1980, v. 32, p. 145.
5. Горбунов В. А.— Алгебра и логика, 1976, т. 15, № 4, с. 436.
6. Papert D.— J. London Math. Soc., 1964, v. 39, № 4, p. 723.
7. Varlet J.— Bull. Soc. roy. sci. Liege, 1965, v. 34, № 5—6, p. 231.
8. Шеврин Л. Н.— Докл. АН СССР, 1961, т. 138, № 1, с. 73.
9. Шеврин Л. Н.— Сиб. матем. ж., 1962, т. 111, № 3, с. 446.
10. Шеврин Л. Н.— Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 2, с. 292.
11. Ego M.— C. r. Acad. Sci., 1961, v. 252, № 17, p. 2490.
12. Ego M.— C. r. Acad. Sci., 1962, v. 254, № 10, p. 1723.
13. Petrich M. Lectures in semigroups.— Akademie — Verlag — Berlin, 1977, S. 168.
14. Hofmann K. H., Mislove M., Stralka A. The Pontryagin Duality of Compact O-Dimensional Semilattices and its Applications.— Berlin — Heidelberg — New York, 1974, p. 122.
15. Sirjajev V. M.— Semigroup Forum, 1976, № 13, p. 149.

УДК 517.544

Т. Н. ЖОРОВИНА

### ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА РИМАНА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ТОРЕ

Пусть  $M = M^0 \cup \partial M$  — любая из следующих фигур в плоскости комплексного переменного  $z$ : прямоугольник, ромб, правильный шестиугольник (здесь  $M^0$  — множество внутренних точек рассматриваемых многоугольников,  $\partial M$  — граница);  $L$  — линия симметрии  $M$ . Обозначим через  $A$  множество вершин фигуры  $M$ , и пусть  $\alpha(t)$  — гомеоморфизм пространства  $\partial M \setminus A$  на себя, сопоставляющий в прямоугольнике и шестиугольнике каждой точке  $t \in \partial M \setminus A$  ближайшую к ней точку  $\alpha(t)$ , лежащую на противоположной (параллельной) стороне  $M$ , а для ромба с вершинами в точках  $0, P, +iK, P-iK, 2P$  под  $\alpha(t)$  будем понимать следующую функцию:

$$\alpha(t) = \begin{cases} t + (P \pm iK), & t \in ] 0, P \pm iK[, \\ t - (P \pm iK), & t \in ] P \pm iK, 2P[. \end{cases}$$

Рассмотрим краевую задачу:

$$\varphi^+(x) = a\varphi^-(x) + b\overline{\varphi^-(x)} + c, \quad x \in L, \quad (1)$$

$$\varphi[\alpha(t)] = \varphi(t), \quad t \in \Sigma_1 \subset \partial M, \quad (2)$$

где  $\partial M = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ ,  $\alpha(\Sigma_1) = \Sigma_2$ .

Требуется найти все аналитические, ограниченные на  $M$  функции  $\varphi(z)$ , удовлетворяющие условию (2) на  $\partial M$ ,  $H$ -непрерывно продолжимые на  $L$ , где должно выполняться краевое условие (1). Из условия (2) следует, что задача (1)—(2) на  $M$  равносильна краевой задаче (1) на  $M$  в классе двоякопериодических функций (примитивные периоды обозначим через  $T_1$  и  $T_2$ ) или, что то же самое, задаче (1) на торе  $M_1$ , который получается после «склеивания» противоположных (параллельных) сторон фигуры  $M$ . Контур  $L$  предполагаем таким, что его образ на торе  $M_1$ -замкнутая кривая.



Для удобства будем считать, что многоугольник  $\mathbf{M}$  расположен в плоскости так, что линия симметрии  $L$  лежит на оси абсцисс, а отображение симметрии  $p: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$  имеет вид  $p(z) = \bar{z}$ .

Применяя метод симметрии, сведем задачу (1) — (2) к задаче Римана для двух пар функций на торе [2]:

$$F^+(x) = GF^-(x) + C, \quad x \in L, \quad (3)$$

где

$$F(z) = \begin{bmatrix} F_1(z) \\ F_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(z) \\ \overline{\varphi(z)} \end{bmatrix}, \quad G = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} |a|^2 - |b|^2 & b \\ -\bar{b} & 1 \end{bmatrix}.$$

Из вида вектор-функции  $F(z)$  следует, что она должна удовлетворять условию симметрии  $\overline{F(\bar{z})} = JF(z)$ , где  $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

Задача (3) решается приведением матрицы  $G$  к жордановой нормальной форме. Для этого вводится новая неизвестная функция  $\Phi(z) = \begin{bmatrix} \Phi_1(z) \\ \Phi_2(z) \end{bmatrix}$  по правилу  $F(z) = S\Phi(z)$ , где  $S$  — некоторая невырожденная матрица. Подставляя  $F(z) = S\Phi(z)$  в (3), получим:

$$\Phi^+(x) = [S^{-1}GS]\Phi^-(x) + S^{-1}C, \quad x \in L. \quad (4)$$

Матрица  $S$  выбирается таким образом, чтобы матрица задачи (4) была жордановой, т. е. чтобы выполнялось равенство

$$S^{-1}GS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ q & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  — корни характеристического полинома матрицы  $G$ ,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 + |a|^2 - |b|^2 \pm \sqrt{(1 + |a|^2 - |b|^2)^2 - 4|a|^2}}{2a},$$

а число  $q$  равно нулю, если  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , и равно единице при  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Элементы матрицы  $S$  находятся из (5). Обозначим  $S^{-1}C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ .

Рассмотрим сначала случай, когда  $\lambda_1 \neq \lambda_2, q = 0$ . Тогда задача (4) равносильна паре скалярных задач Римана на торе:

$$\Phi_1^+(x) = \lambda_1 \Phi_1^-(x) + c_1, \quad x \in L, \quad (6)$$

$$\Phi_2^+(x) = \lambda_2 \Phi_2^-(x) + c_2, \quad x \in L. \quad (7)$$

Из теоремы 1 [1] следует, что число  $l_1(l_2)$  решений однородной задачи (6) — (7) для функций совпадает с числом  $l'_1(l'_2)$  решений союзной однородной краевой задачи для дифференциалов. В нашей задаче реализуется особый случай, и для числа  $l_1(l_2)$  известна точная оценка:  $0 \leq l_1 \leq 1$  ( $0 \leq l_2 \leq 1$ ).

Выберем канонические сечения  $a_1$  и  $b_1$ , причем в качестве  $a_1$  возьмем кривую  $L$ . Далее, пусть  $Q = \int_{a_1} d\tau$ , тогда комплексно-нормированный базис пространства абелевых дифференциалов I рода на  $\mathbf{M}_1: du(\tau) = \frac{d\tau}{Q}$ .  $A$ - и  $B$ -периоды равны:

$$A = \int_{a_1} du(\tau) = 1, \quad B = \int_{b_1} du(\tau) = \frac{1}{Q} \int_{b_1} d\tau.$$

Нормированный базис пространства абелевых интегралов I рода:

$$u(\tau) = \int_{z_0}^{\tau} du(t) = \begin{cases} \frac{\tau - z_0}{Q}, & \text{Im } \tau > 0, \\ \frac{\tau - z_0}{Q} + B, & \text{Im } \tau < 0, \end{cases}$$

где  $z_0$  — фиксированная точка,  $\text{Im } z_0 > 0$ , а штрих перед интегралом означает, что путь интегрирования не пересекает канонических сечений. Разрывный аналог ядра Коши на  $\mathbf{M}_1$  возьмем в виде:

$$d\omega_z \bar{z}(\tau) = [\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau - \bar{z})]d\tau - \frac{d\tau}{Q} \int_L [\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau - \bar{z})]d\tau, \quad (8)$$

где  $\bar{z}$  — фиксированная точка,  $\bar{z} \neq z_0$ ;  $\zeta(z)$  — дзета-функция Вейерштрасса,  $\zeta(z) = \zeta(z|T_1, T_2)$ . Для (8) выполняется условие комплексной нормированности  $\int_{a_1} d\omega_z \bar{z}(\tau) = 0$ , кроме того  $d\omega_z \bar{z}(\tau) = 0$ .

В силу выбора канонических сечений и свойства комплексной нормированности дифференциала (8) общее решение задачи (6) — (7) будем искать в виде [1]:

$$\Phi_{0j}(z) = \varphi_j(z) \exp \left\{ - \int_{z_0}^{z_j} d\omega_z \bar{z}(\tau) + 2\pi i m_j u(z) \right\}, \quad (9)$$

где эллиптическая функция  $\varphi_j(z)$  находится из условия  $(I) | (\Phi_{0j})$  ( $(I)$  — единичный дивизор), а точки  $z_j$  и целые числа  $m_j, n_j$  — из проблемы обращения Якоби:

$$u(z_j) = \frac{\ln \lambda_j}{2\pi i} + n_j + m_j B \quad (j = 1, 2) \quad (10)$$

(ветвь логарифма выбирается так, что  $0 \leq \arg \lambda_j < 2\pi$ ).

Обозначим через  $\chi_j(z)$  экспоненту, стоящую в правой части (9). Учитывая особенности  $\chi_j(z)$ , мы должны подчинить функцию  $\varphi_j(z)$  условию  $\Delta_j^{-1} | (\varphi_j)$ ,  $\Delta_j = z_0 z_j^{-1}$ , но так как не существует двоякопериодической функции степени 1, то  $\varphi_j(z) \equiv 0$  либо  $\varphi_j(z) = \text{const}$  (при  $z_j = z_0$ ),  $j = 1, 2$ . Выясним условия, при которых  $\varphi_j(z) \not\equiv 0$  ( $z_j = z_0$ ). Из (10) следует, что  $z_j = z_0$ , если уравнение

$$\frac{\ln \lambda_j}{2\pi i} + n_j + m_j B = 0 \quad (j = 1, 2)$$

разрешимо в целых числах  $m_j$  и  $n_j$ . Последнее имеет место, если

$$\frac{\ln |\lambda_j|}{2\pi \operatorname{Im} B} \in \mathbf{Z}, \quad \frac{\arg \lambda_j}{2\pi} + \frac{\ln |\lambda_j|}{2\pi} \cdot \frac{\operatorname{Re} B}{\operatorname{Im} B} \in \mathbf{Z}. \quad (11)$$

Рассмотрим возможные варианты для  $\lambda_j$  и  $z_j$  ( $j = 1, 2$ ).

1)  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 \neq 1$ . Этот случай имеет место, когда  $1 + |a|^2 - |b|^2 = 2 \operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a < 0$ , причем тогда  $\lambda_2 = \frac{a}{\bar{a}}$ .

Условия (11) выполняются для  $\lambda_1$  и не выполняются для  $\lambda_2$ , следовательно, однородная задача (6) — (7) имеет решение вида:  $\Phi_{01}(z) = k, \Phi_{02}(z) = 0$  ( $k$  — произвольная постоянная).

Неоднородная задача (6) — (7) разрешима лишь при  $c_1 = 0$  и любом  $c_2 \neq 0$ , и для нахождения ее решения достаточно знать частное решение задачи (7). Последняя безусловно разрешима (так как  $l_2 = \bar{l}_2 = 0$ ), и ее частное решение строится в виде [1]:

$$\tilde{\Phi}_2(z) = \frac{c_2 \cdot \chi_2(z)}{2\pi i} \int_L \frac{A_2(\tau, z)}{\chi_2^+(\tau)} d\tau,$$

где  $A_2(\tau, z)d\tau$  — мероморфный аналог ядра Коши, по переменной  $z$  кратный дивизору  $\tau^{-1} \Delta_2^{-1}$ , а по переменной  $\tau$  — дивизору  $z^{-1} \Delta_2$ . Этим условиям удовлетворяет выражение

$$A_2(\tau, z)d\tau = [\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau - z_2) - \zeta(z_0 - z) + \zeta(z_0 - z_2)]d\tau.$$

2)  $\lambda_1 \neq 1, \lambda_2 = 1$  ( $1 + |a|^2 - |b|^2 = 2 \operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a > 0$ ).

Этот случай аналогичен рассмотренному выше.

3)  $\lambda_1 \neq 1, \lambda_2 \neq 1$ . Нетрудно доказать следующее

**Утверждение.** Пусть  $\lambda_1 \neq 1, \lambda_2 \neq 1$ . Если одно из чисел  $\lambda_1, \lambda_2$  удовлетворяет условиям (11), то и другое тоже удовлетворяет условиям (11) (причем это возможно при  $a \in \mathbf{R}$  и  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ ).

Учитывая сказанное, рассмотрим следующие случаи.

а) Пусть  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  такие, что для них выполняются условия (11). Тогда  $\varphi_j(z) = k_j$ , а общее решение однородной задачи (6) — (7) имеет вид:

$$\Phi_{0j}(z) = k_j \exp \{2\pi i m_j u(z)\}, \quad j = 1, 2,$$

где  $m_j = \frac{\ln |\lambda_j|}{2\pi \cdot \text{Im } B}$ , причем  $m_2 = -m_1$ ;  $k_1, k_2$  — произвольные постоянные. Для разрешимости неоднородной задачи (6)—(7) необходимо и достаточно выполнение условий разрешимости из [1]:

$$\int_L c_j d\Psi_j^+(\tau) = 0, \quad (12)$$

где  $d\Psi_j^+(\tau)$  — предельное значение слева на  $L$  общего решения союзной однородной задачи для дифференциалов:

$$d\Psi_j(z) = d_j \exp\{-u(z)2\pi i m_j\} dz \quad (13)$$

( $d_j$  — произвольные постоянные). Легко проверяется, что условия (12) выполняются, и тогда частное решение неоднородной задачи (6)—(7) строится в виде [1]:

$$\tilde{\Phi}_j(z) = \frac{r_j \frac{dz}{Q} - \frac{c_j}{2\pi i} \int_L d\omega_{\tau z}(z) d\Psi_j^+(\tau)}{d\Psi_j(z)} \quad (r_j = \text{const}). \quad (14)$$

б) пусть условия (11) не выполняются для  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Тогда однородные задачи (6) и (7) имеют только тривиальные решения, а неоднородные безусловно разрешимы, и их решения имеют вид

$$\tilde{\Phi}_j(z) = \frac{c_j \chi_j(z)}{2\pi i} \int_L \frac{A_j(\tau, z)}{\chi_j^+(\tau)} d\tau, \quad (15)$$

где  $A_j(\tau, z) d\tau = [\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau - z_j) - \zeta(z_0 - z) + \zeta(z_0 - z_j)] d\tau$ ,  $j = 1, 2$ .

Аналогичным образом исследуется случай  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $q = 1$  ( $(1 + |a|^2 - |b|^2)^2 - 4|a|^2 = 0$ , что возможно, если  $|a| + |b| = 1$  либо  $|a| - |b| = \pm 1$ ). Возвращаясь к задаче (1)—(2) и учитывая условие симметрии, в однородном случае будем иметь следующий результат.

**Теорема 1.** Если  $1 + |a|^2 - |b|^2 = 2 \text{Re } a$ , то общее решение однородной задачи (1)—(2) есть константа. Если  $a \in \mathbb{R}$ ,  $1 + a^2 - |b|^2 \neq 2a$  и  $\lambda_1$  удовлетворяет условиям (11), то однородная задача (1)—(2) имеет два линейно независимых решения. В остальных случаях однородная задача (1)—(2) имеет только тривиальное решение.

Решение однородной задачи (1)—(2) в случае, когда  $a \in \mathbb{R}$ ,  $1 + a^2 - |b|^2 \neq 2a$  и  $\lambda_1$  удовлетворяет условиям (11), имеет вид

$$\varphi^\pm(z) = \alpha \varphi_1^\pm(z) + \beta \varphi_2^\pm(z), \quad (16)$$

$$\varphi_1^+(z) = (a\lambda - 1) \exp\{zT\} - \frac{b}{\lambda} \exp\{-zT\},$$

где

$$\varphi_2^+(z) = i[(a\lambda - 1) \exp\{zT\} + \frac{b}{\lambda} \exp\{-zT\}],$$

$$\varphi_1^-(z) = \frac{a\lambda - 1}{\lambda} \exp\{zT\} - b \exp\{-zT\},$$

$$\varphi_2^-(z) = i \left[ \frac{a\lambda - 1}{\lambda} \exp\{zT\} + b \exp\{-zT\} \right],$$

$\alpha, \beta$  — произвольные вещественные постоянные,  $T = \frac{i \ln |\lambda_1|}{Q \cdot \text{Im } B}$ ,  $\lambda = \lambda_1$ .

Для неоднородной задачи (1)—(2) справедлива

**Теорема 2.** Если  $1 + |a|^2 - |b|^2 = 2 \text{Re } a$ , то для разрешимости неоднородной задачи (1)—(2) необходимо и достаточно выполнение равенства

$$2\bar{a}\bar{b}c = \bar{c}(|a|^2 + |b|^2 - 1 + 2i \text{Im } a).$$

В остальных случаях неоднородная задача (1)—(2) безусловно разрешима.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Зверович Э. И.—Успехи матем. наук, 1971, т. 26, № 1, с. 113.
- Жоровина Т. Н.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2, с. 59.

# Краткие сообщения

УДК 7.926.7

О. А. КАСТРИЦА

## О ПОСТРОЕНИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ МАТРИЧНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть  $A$  — матрица  $n \times n$  с элементами  $a_{ij} \in C$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  и  $g(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$  — ее минимальный многочлен. Рассмотрим аналитическую функцию  $f$ , для которой определены значения  $f(\lambda_i)$ ,  $f'(\lambda_i)$ ,  $\dots$ ,  $f^{(m_i-1)}(\lambda_i)$ ,  $i=1, \dots, s$ , называемые значениями функции  $f$  на спектре матрицы  $A$ . Матрица  $f(A)$  определяется [1, с. 104], [2, с. 158], [3, с. 678] как значение при  $\lambda = A$  некоторого многочлена  $r: \lambda \rightarrow r(\lambda)$ , принимающего на спектре матрицы  $A$  те же значения, что и  $f$ , т. е.  $f(A) = r(A)$ . Нахождение коэффициентов многочлена  $r$  требует в общем случае значительных вычислительных затрат. В частности, если все корни минимального многочлена простые, то  $r(\lambda)$  — интерполяционный многочлен Лагранжа, т. е.  $r(A) = \sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \frac{A - \lambda_i E}{\lambda_k - \lambda_i} f(\lambda_k)$ , [1, с. 108].

Для получения интерполяционных формул в иных случаях используем представление  $f(A)$  в виде [1, с. 111]

$$f(A) = \sum_{k=1}^s \sum_{j=0}^{m_k-1} f^{(j)}(\lambda_k) Z_{kj}, \quad (1)$$

где  $Z_{kj}$  — компоненты матрицы  $A$ . Матрицы  $Z_{kj}$  определяются только матрицей  $A$  и не зависят от функции  $f$ . Это позволяет определить  $Z_{kj}$ ,  $k=1, \dots, s$ ,  $j=0, \dots, (m_k-1)$ , используя набор вспомогательных функций специального вида, значение которых на матрице  $A$  может быть легко вычислено непосредственно.

Будем считать, что  $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_s$ . Полагая в (1)  $f(\lambda)$  последовательно равным  $(\lambda - \lambda_1)^p$ ,  $p=0, 1, \dots, (m_1-1)$ , получим систему, которую после преобразования можно представить в виде

$$(A - \lambda_1 E)^p = p! Z_{1p} + \sum_{j=0}^p \frac{p!}{j!} \sum_{\substack{k \geq 2 \\ m_k > p+1-j}} (\lambda_k - \lambda_1)^j Z_{k(p-j)},$$

$$p = 0, 1, \dots, (m_1 - 1). \quad (2)$$

Выразим из (2) компоненты  $Z_{1j}$ ,  $j=0, \dots, (m_1-1)$  и подставим в (1). После группировки коэффициентов при  $Z_{kj}$ ,  $k \neq 1$ ,  $j=0, \dots, (m_k-1)$ , получим

$$f(A) = \sum_{j=0}^{m_1-1} \frac{f^{(j)}(\lambda_1)}{j!} (A - \lambda_1 E)^j + \sum_{k=2}^s \sum_{j=0}^{m_k-1} \left[ f^{(j)}(\lambda_k) - \sum_{i=0}^{m_1-j-1} \frac{f^{(j+i)}(\lambda_1)}{i!} (\lambda_k - \lambda_1)^i \right] Z_{kj}. \quad (3)$$

Если  $m_2 = \dots = m_s = 0$ , то из (3) получаем интерполяционную формулу

$$f(A) = \sum_{j=0}^{m_1-1} \frac{f^{(j)}(\lambda_1)}{j!} (A - \lambda_1 E)^j. \quad (4)$$

Обозначим

$$\varphi(\lambda) = f(\lambda) - \sum_{j=0}^{m_1-1} \frac{f^{(j)}(\lambda_1)}{j!} (\lambda - \lambda_1)^j. \quad (5)$$

Тогда формула (3) запишется в виде

$$\varphi(A) = \sum_{k=2}^s \sum_{j=0}^{m_k-1} \varphi^{(j)}(\lambda_k) Z_{kj}. \quad (6)$$

Формула (6) справедлива для любой функции  $\varphi$ , задаваемой выражением (5), где  $f$  — произвольная функция, аналитическая в области, содержащей  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ .

Пусть  $\varphi_k(\lambda) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ ,  $k = 2, \dots, s$ . Для нахождения компонент  $Z_{kj}$ ,  $k \neq 1$ ,  $j = 0, \dots, (m_k - 1)$ , используем вспомогательные функции  $\varphi_{kl}(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)^l \cdot \varphi_k(\lambda)$ ,  $k = 2, \dots, s$ ,  $l = 0, \dots, (m_k - 1)$ . Поскольку  $\varphi_{kl}^{(j)}(\lambda_1) = 0$ ,  $j = 0, \dots, (m_1 - 1)$ , то, подставляя в (5)  $\varphi_{kl}(\lambda)$  вместо  $f(\lambda)$ , получим  $\varphi(\lambda) = \varphi_{kl}(\lambda)$ . Это означает, что функции  $\varphi_{kl}(\lambda)$  можно подставлять в (6) вместо  $\varphi(\lambda)$ . При этом приходим к системе, позволяющей определить все компоненты  $Z_{kj}$ ,  $k \neq 1$ . Заметим, что  $\varphi_{kl}^{(j)}(\lambda_i) = 0$ ,  $i \neq k$ ,  $j = 0, \dots, (m_i - 1)$ . Поэтому, фиксируя  $k$  и подставляя в (6) вспомогательные функции  $\varphi_{kl}(\lambda)$ ,  $l = 0, \dots, (m_k - 1)$ , получим систему, содержащую только неизвестные  $Z_{kj}$ ,  $j = 0, \dots, (m_k - 1)$ . В то же время  $\varphi_{kl}^{(j)}(\lambda_k) = 0$ , если  $j < l$  и

$$\varphi_{kl}^{(j)}(\lambda_k) = \frac{j!}{(j-l)!} \varphi_k^{(j-l)}(\lambda_k), \quad l \leq j \leq (m_k - 1). \quad (7)$$

Учитывая (7), получаем систему

$$(A - \lambda_k E)^l \varphi_k(A) = \sum_{j=l}^{m_k-1} \frac{j!}{(j-l)!} \varphi_k^{(j-l)}(\lambda_k) Z_{kj}, \quad l = 0, 1, \dots, (m_k - 1). \quad (8)$$

Итак, для группы компонент, соответствующих собственному значению  $\lambda_k$  матрицы  $A$ ,  $k \geq 2$ , получаем треугольную систему, из которой  $Z_{kj}$ ,  $j = 0, \dots, (m_k - 1)$ , легко определяются. Прделав это для  $k = 2, 3, \dots, s$ , можно найти все компоненты матрицы  $A$ . Это позволяет строить формулы для  $f(A)$ .

**Пример.** Пусть  $g(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^5 (\lambda - \lambda_2)^2 (\lambda - \lambda_3)$ . Тогда  $\varphi(\lambda) = f(\lambda) - \sum_{j=0}^4 \frac{f^{(j)}(\lambda_1)}{j!} (\lambda - \lambda_1)^j$ ;  $\varphi_2(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^5 (\lambda - \lambda_3)$ ;  $\varphi_3(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^5 (\lambda - \lambda_2)^2$ .

Из системы (8) находим:

$$Z_{21} = \frac{\varphi_2(A) (A - \lambda_2 E)}{\varphi_2(\lambda_2)}; \quad Z_{20} = \frac{\varphi_2(A)}{\varphi_2(\lambda_2)} \left[ E - \frac{\varphi_2'(\lambda_2)}{\varphi_2(\lambda_2)} (A - \lambda_2 E) \right];$$

$$Z_{30} = \frac{\varphi_3(A)}{\varphi_3(\lambda_3)}.$$

Поэтому

$$f(A) = \sum_{j=0}^4 \frac{f^{(j)}(\lambda_1)}{j!} (A - \lambda_1 E)^j + \left\{ \varphi(\lambda_2) \frac{\varphi_2(A)}{\varphi_2(\lambda_2)} \left[ E - \frac{\varphi_2'(\lambda_2)}{\varphi_2(\lambda_2)} (A - \lambda_2 E) \right] + \right.$$

$$\left. + \varphi'(\lambda_2) \frac{\varphi_2(A)}{\varphi_2(\lambda_2)} (A - \lambda_2 E) \right\} + \varphi(\lambda_3) \frac{\varphi_3(A)}{\varphi_3(\lambda_3)}.$$

Если  $m_k, k = 2, \dots, s$ , невелики, то формула (3) позволяет строить сравнительно простые интерполяционные формулы для  $f(A)$ . Вычисление матричных функций по указанному способу может быть осуществлено на ЭВМ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М., 1967.
2. Ланкастер П. Теория матриц.— М., 1978.
3. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем.— М., 1970.

УДК 62-506 : 519.272

Г. А. ХАЦКЕВИЧ

### ОБ АДАПТИВНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ МНОГОМЕРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим линейную стационарную стохастическую систему с дискретным временем:

$$x_{k+1} = Ax_k + \omega_k, \quad y_k = Cx_k + v_k, \quad (1)$$

где  $y_k \in R^m$ ,  $k = \overline{1, N}$  — наблюдения за поведением системы (1);  $x_k \in R^n$  — фазовые состояния системы (1);  $\omega_k, v_k$  и  $x_0$  — независимые гауссовы случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и известными ковариациями вида:  $M\{\omega_k \omega_j^T\} = W \delta_{kj}$ ,  $M\{v_k v_j^T\} = V \delta_{kj}$ ,  $M\{x_0 x_0^T\} = P_0$ ,  $\delta_{kj}$  — символ Кронекера,  $T$  — оператор транспонирования.

Задача состоит в нахождении неизвестных матричных параметров  $A$  и  $C$  системы (1) по выходным данным  $y_1, \dots, y_N$ .

Для однозначной разрешимости задачи идентификации параметров  $A, C$ , следуя [1], представим матрицы  $A$  и  $C$  в инвариантной канонической форме  $A_0 = TAT^{-1}$ ,  $C_0 = CT^{-1}$ , где  $T$  — матрица наблюдаемости, используемая в качестве преобразования  $x'_k = Tx_k$ , т. е.  $T^T = (c_1 | A^T c_1 | \dots | A^{p_1-1} c_1 | \dots | c_m | \dots | A^{p_m-1} c_m)$ . Здесь  $c_i$  —  $i$ -я строка матрицы  $C$ ,  $p_i$   $i = \overline{1, m}$  есть наименьшее неотрицательное целое такое, что  $c_i^T A^{p_i}$  линейно зависит от векторов, предшествующих данному в матрице  $T$ . Заметим, что  $p_i$ , называемые показателями наблюдаемости [2], удовлетворяют

условию  $\sum_{i=1}^m p_i = m$  [2] и считаются априорно заданными.

В дальнейшем условимся производить нахождение оценок на компактном подмножестве параметрического пространства  $R_c$ , таком, что 1)  $A$  — устойчивая матрица; 2)  $(A, C)$  — наблюдаемая пара. Учитывая гауссовое распределение переменных  $x_k$  в системе (1), оценим состояния системы с помощью стационарного фильтра Калмана — Бьюси  $\hat{x}_{k+1/k} = A_0 \hat{x}_{k/k-1} + B_0 v_k$ , где  $v_k = y_k C_0 \hat{x}_{k/k-1}$  — процесс обновлений — последовательность гауссовых случайных величин с нулевыми средними и ковариационной матрицей  $(C_0 P C_0^T + V) \delta_{kj}$ ;  $B_0 = TB$ , где  $B$  — коэффициент усиления стационарного фильтра Калмана — Бьюси.

После описанных преобразований система (1) приобретает вид:

$$\hat{x}_{k+1/k} = A_0 \hat{x}_{k/k-1} + B_0 v_k, \quad y_k = C_0 \hat{x}_{k/k-1} + v_k. \quad (2)$$

Величины  $v_k$  и  $\hat{x}_{k+1/k}$  являются ненаблюдаемыми, а измерению доступны только выходные переменные  $y_1, \dots, y_N$ .

Матрицы  $A_0$  и  $C_0$  имеют вид:

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mm} \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad A_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & I_{p_i-1} \\ \beta_{i10} & \dots & \beta_{ii p_i-1} \end{pmatrix}_{p_i \times p_i},$$

$$A_{ij} = \left( \frac{0}{\beta_{ij0} \dots \beta_{ijp_i-1}} \right)_{p_i \times p_j}, \quad (3)$$

$$C_0 = \|c_{0i}^T\|_{i=\overline{1, m}}, \quad c_{0i}^T = \begin{cases} (0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0), & p_i > 0, \\ (\beta_{i10} \dots \beta_{i1p_i-1} \beta_{i20} \dots \beta_{i-1p_i-1} \ 0 \dots 0), & p_i = 0. \end{cases}$$

Следовательно, задача оценивания параметров  $A_0$  и  $C_0$  свелась к оцениванию величин  $\beta_{ijh}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Адаптивный алгоритм идентификации неизвестных элементов  $\beta_{ijh}$ ,  $i = \overline{1, n}$  основан на взаимных корреляциях наблюдений  $r_{ij}(\sigma)$ :  $R(\sigma) = M\{y_{k+\sigma}y_k^T\} = \|r_{ij}(\sigma)$ ,  $\sigma > 0$ ,  $i, j = \overline{1, m}$ . Однако элементы матрицы  $R(\sigma)$  неизвестны, поэтому заменим  $r_{ij}(\sigma)$  его оценкой  $\hat{r}_{ij}(\sigma)$ , тогда  $\hat{R}(\sigma) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-\sigma} y_{k+\sigma}y_k^T = \|\hat{r}_{ij}(\sigma)$ ,  $\sigma > 0$ ,  $i, j = \overline{1, m}$ . Из устойчивости  $A$  и результатов в [1] следует сильная состоятельность оценок  $\hat{r}_{ij}(\sigma)$ .

В силу системы (2) можно получить зависимость между элементами матрицы корреляций:

$$\hat{r}_{ij}(k+p_i) = \sum_{l=1}^i \sum_{q=0}^{p_l-1} \beta_{ilq} \hat{r}_{ij}(k+q) = \varphi_{ij}^T(k) \beta_i, \quad (4)$$

где  $\varphi_{ij}^T(k) = (\hat{r}_{1j}(k) \dots \hat{r}_{ij}(k+p_i-1))$ ,  $\beta_i^T = (\beta_{i10} \dots \beta_{ip_i-1})$  — векторы размерности  $1 \times (p_1 + p_2 + \dots + p_i)$ .

Учитывая блочную структуру матрицы  $A_0$  и достаточно большое число наблюдений  $y_k$ , применим аналог рекуррентного алгоритма из [3], основанный на выходных данных (4):

$$\hat{\beta}_i(k+p_i) = \hat{\beta}_i(k+p_i-1) + \gamma(k+p_i) [\hat{r}_{ij}(k+p_i) - \varphi_{ij}^T(k) \hat{\beta}_i(k+p_i-1)],$$

$$\gamma(k+p_i) = \frac{D(k+p_i-1) \varphi_{ij}(k)}{\varphi_{ij}^T(k) D(k+p_i-1) \varphi_{ij}(k)}, \quad (5)$$

$$D(k+p_i) = D(k+p_i-1) - \frac{D(k+p_i-1) \varphi_{ij}(k) \varphi_{ij}^T(k) D^T(k+p_i-1)}{\varphi_{ij}^T(k) D(k+p_i-1) \varphi_{ij}(k)},$$

$$\hat{\beta}_i(p_i) = 0; \quad D(p_i) = I, \quad k = 1, \quad \sum_{j=1}^i p_j, \quad i = \overline{1, m}.$$

Из [3] следует, что алгоритм (5) является оптимальным в среднеквадратическом смысле в классе наблюдений (4) и более простым, чем алгоритм из [4]. Особенностью его является тот факт, что оценивание производится при числе наблюдений, не превосходящем число неизвестных параметров.

Заметим, что в силу достаточно большого числа наблюдений  $y_k$  и свойства сильной состоятельности оценок  $\hat{r}_{ij}(k)$  мы полагаем, что наблюдения  $\hat{r}_{ij}(k+q)$ ,  $q = 0, \dots, k+p_i$  (4) производятся без ошибок.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Tse E., Weñnert H. L. — IEEE, Trans. on Aut. Contr., 1975, v. 20, № 5, p. 603.
2. Саридис Дж. Самоорганизующие стохастические системы управления. — М., 1980.
3. Медведев Г. А. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.; 1981, № 3, с. 46.
4. Хацкевич Г. А. Адаптивная идентификация параметров стохастических дискретных систем. — Рукопись деп. в ВИНТИ, № 1367-80. Деп. от 09.04.80.



# Наши юбиляры

## ЕВГЕНИЙ АЛЕКСЕЕВИЧ ИВАНОВ (К 60-летию со дня рождения)



Исполнилось шестьдесят лет со дня рождения члена-корреспондента АН БССР, доктора физико-математических наук, профессора Евгения Алексеевича Иванова.

Педагогическую деятельность Е. А. Иванов начал учителем средней школы в 1946 г. после демобилизации из рядов Советской Армии. В 1956 г. он окончил с отличием физмат БГУ имени В. И. Ленина. Первые научные работы, посвященные теоремам сложения для эллиптических и сферондальных волновых функций, Е. А. Иванов выполнил будучи аспирантом кафедры дифференциальных уравнений БГУ имени В. И. Ленина. В 1961 г. Е. А. Иванов защитил кандидатскую диссертацию на тему «Дифракция на эллиптических цилиндрах и сфероидах».

Весьма плодотворным в научной деятельности Е. А. Иванова был период с 1962 по 1970 г., когда он работал в лаборатории математической физики ИМ и ВТ АН БССР вначале старшим научным сотрудником, а с 1965 г. заведующим лабораторией. Круп-

ный вклад внесен Е. А. Ивановым в развитие точных методов решения задач математической теории дифракции электромагнитных волн на сложных препятствиях. Им опубликовано около 50 научных работ, написана монография «Дифракция электромагнитных волн на двух телах» и защищена докторская диссертация на тему «Дифракция электромагнитных волн на некоторых сложных препятствиях». Эти труды получили признание в нашей стране и за рубежом. Они явились основополагающими работами прикладного направления математической физики в Белоруссии.

Наибольшего расцвета научно-педагогическая и организаторская деятельность Е. А. Иванова достигла в БГУ имени В. И. Ленина, куда он перешел работать в 1970 г. Профессор Е. А. Иванов — один из организаторов факультета прикладной математики, основатель кафедры уравнений математической физики. Внедрение средств современной вычислительной техники для решения прикладных задач было постоянной заботой Е. А. Иванова. Он является одним из авторов двухтомника «Таблицы сферондальных волновых функций и их первых производных», его перу принадлежит более 100 печатных научных работ; под его руководством защищено 11 кандидатских диссертаций.

В 1977 г. Е. А. Иванов как крупный специалист и организатор науки был избран членом-корреспондентом АН БССР.

Е. А. Иванов активно участвовал в общественно-научной жизни: в течение ряда лет был членом научно-методического Совета Минвуза СССР по прикладной математике, членом секции по физико-математическим наукам Комитета по Государственным премиям БССР в области науки и техники, председателем двух и членом четырех специализированных советов по присуждению ученой степени кандидата наук, руководителем городского семинара по математической теории дифракции, заместителем главного редактора и членом редакционной коллегии всесоюзного журнала «Дифференциальные уравнения», членом редколлегии «Вестника БГУ имени В. И. Ленина».

Высокие деловые качества, профессиональное мастерство, доброжелательность, отзывчивость и простота, мужество и жизненный оптимизм снискали Е. А. Иванову глубокое уважение товарищей по работе и учеников.

Заслуги Е. А. Иванова отмечены правительственными наградами — восьмью медалями СССР и двумя Почетными грамотами Верховного Совета БССР.

Поздравляя Евгения Алексеевича с юбилеем, от души желаем ему доброго здоровья и дальнейших творческих успехов.



## ГЕННАДИЙ АЛЕКСЕЕВИЧ МЕДВЕДЕВ (К 50-летию со дня рождения)

Исполняется 50 лет со дня рождения заведующего кафедрой теории вероятностей и математической статистики БГУ имени В. И. Ленина, доктора физико-математических наук, профессора Геннадия Алексеевича Медведева.

Геннадий Алексеевич Медведев родился в г. Уссурийске Приморского края в семье военнослужащего.

Начало научной деятельности Г. А. Медведева связано с Томским ордена Трудового Красного Знамени государственным университетом имени В. В. Куйбышева. В 1961 г. Геннадий Алексеевич успешно защитил кандидатскую, а в 1967 г. докторскую диссертации; в 1968 г. был утвержден в ученое звание профессора.

Для Г. А. Медведева характерна исключительная широта научных интересов, умение находить центральные вопросы возникающих проблем и исчерпывающее их решение.

Профессором Г. А. Медведевым получены важные результаты по ряду проблем теории вероятностей, математической статистики и кибернетики: оптимизация замкнутых сетей массового обслуживания; стохастическая аппроксимация коррелированных последовательностей; исследование эффективности алгоритмов случайного поиска при автоматической оптимизации; анализ дискретных самонастраивающихся систем, описываемых цепями Маркова.

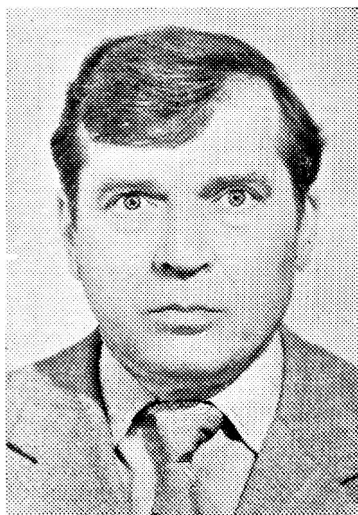
Результаты исследований Г. А. Медведева, получившие всеобщее признание, опубликованы более чем в 100 статьях, двух монографиях: «Вероятностные методы анализа экстремальных систем», «Теория и применение случайного поиска» и внедрены более чем в 20 хозяйственных научно-исследовательских работах, выполненных по важнейшей тематике.

Плодотворна и педагогическая деятельность профессора Г. А. Медведева. Он умеет находить способных к математическому творчеству молодых людей и пробуждать их интерес к самостоятельным исследованиям. Его ученики, среди которых 2 доктора наук и более 20 кандидатов, работают в вузах и НИИ многих городов страны.

Г. А. Медведев проводит большую научно-организационную и методическую работу. Он основатель двух новых кафедр: прикладной математики в Томском госуниверситете (1970) и первой в Белоруссии кафедры теории вероятностей и математической статистики БГУ имени В. И. Ленина (1974). Уже более 10 лет плодотворно работает организованный Г. А. Медведевым Минский городской семинар по статистическим методам. Г. А. Медведев является председателем комитета Белорусского республиканского совета НТО по прикладной математике и вычислительной технике, зам. председателя секции математики научно-технического совета Минвуза БССР, членом научно-методического совета по прикладной математике Минвуза СССР, членом нескольких советов по присуждению ученых степеней. Общественная деятельность Г. А. Медведева, члена КПСС с 1970 г., также многогранна.

За заслуги в научно-исследовательской работе и подготовке высококвалифицированных кадров Г. А. Медведев награжден медалью «За трудовую доблесть. В ознаменование 100-летия со дня рождения В. И. Ленина», нагрудным знаком МВ и ССО СССР «За отличные успехи в работе», Почетными Грамотами Верховного Совета БССР, Минвуза БССР и БГУ имени В. И. Ленина. Геннадий Алексеевич встречает свое пятидесятилетие в расцвете сил, полный энергии, новых планов и творческих замыслов.

Коллектив преподавателей, сотрудников и студентов факультета прикладной математики, редколлегия журнала «Вестник БГУ имени В. И. Ленина» сердечно поздравляют Геннадия Алексеевича с юбилеем, желают крепкого здоровья, счастья, новых творческих свершений на благо нашей Родины.



## СТАНИСЛАВ СТАНИСЛАВОВИЧ ШУШКЕВИЧ (К 50-летию со дня рождения)



Исполнилось 50 лет со дня рождения заведующего кафедрой ядерной физики и мирного использования атомной энергии, доктора технических наук, профессора, заслуженного деятеля науки и техники БССР Станислава Станиславовича Шушкевича.

После окончания в 1951 г. физмата БГУ имени В. И. Ленина Станислав Станиславович продолжил учебу в аспирантуре Института физики АН БССР; в 1964 г. он успешно защитил кандидатскую, а в 1970 г. докторскую диссертацию. С 1972 г. профессор С. С. Шушкевич — заведующий кафедрой ядерной физики и мирного использования атомной энергии.

С. С. Шушкевич — широко известный в нашей стране ученый в области электроники и экспериментальной физики. Им предложены и обоснованы новые методы построения различных устройств ядерной электроники, выполнены основополагающие работы по приему и обработке широкополосных оптических сигналов и стробоскопической осциллографии субнаносекундного разрешения. Под его руководст-

вом разработаны первые в нашей стране оптические линии связи на полупроводниковых лазерах и лазерах с синхронизированными модами, а также методы электронной интроскопии, в частности способы визуализации рентгеновского и гамма-излучения. С. С. Шушкевич — один из авторов первой в мире работы по одноэлектронной фоторегистрации.

Большое место в научной деятельности С. С. Шушкевича занимают вопросы разработки аппаратуры, позволяющей внедрить радиоспектроскопические методы в важнейшие отрасли народного хозяйства страны. Под его руководством выполнен комплекс научных исследований и проектно-технологических разработок, приведших к созданию нового класса радиоспектроскопической аппаратуры — малогабаритных радиоспектрометров общего и специального назначения.

Профессор Шушкевич ведет большую и плодотворную педагогическую работу. Он инициатор коренного пересмотра подхода к изучению радиоэлектроники на физических факультетах университетов страны. С 1979 г. действует подготовленная под его руководством общесоюзная программа по курсу «Основы радиоэлектроники». Совместно с М. К. Ефимчиком им написан учебник по этому курсу.

С. С. Шушкевич — автор более 150 научных и методических работ; им подготовлено 23 кандидата наук.

С. С. Шушкевич принимает активное участие в общественной жизни университета: неоднократно избирался в состав партбюро физического факультета и парткома университета. Он является заместителем председателя городской организации общества «Знание», президентом городского научно-технического общества учащихся, входит в состав ряда проблемных советов и редколлегии «Вестника БГУ имени В. И. Ленина».

За заслуги в научно-исследовательской деятельности и подготовку высококвалифицированных кадров С. С. Шушкевич награжден Почетными грамотами Минпроса СССР, Минвуза БССР, ЦК ЛКСМБ. В 1982 г. он удостоен почетного звания «Заслуженный деятель науки и техники БССР».

Непосыкаемая энергия, творческая активность, целеустремленность и принципиальность снискали С. С. Шушкевичу уважение сотрудников и студентов.

Поздравляя Станислава Станиславовича с юбилеем, преподаватели, сотрудники и студенты физического факультета, редколлегия журнала желают ему крепкого здоровья, личного счастья, новых творческих успехов на благо нашей Родины.

## УКАЗАТЕЛЬ

статей, опубликованных в «Вестнике Белорусского университета»,  
серия I (физика, математика и механика) в 1984 г.

### ФИЗИКА

Аншаков О. М., Гурачевский В. Л., Холмецкий А. Л., Чудаков В. А. Мессбауэровская спектроскопия тонких пленок с регистрацией конверсионных электронов . . . . .	2	18
Барышевский В. Г., Кутень С. А. О возможности исследования фазовых переходов в сегнетоэлектриках с помощью положительных мюонов . . . . .	2	8
Барышевский В. Г., Черепица С. В. Влияние гравитационного поля земли на прецессию спина нейтронов . . . . .	2	21
Барышевский В. Г., Скадоров В. В. О теории резонансного рассеяния $\gamma$ -квантов в веществе . . . . .	3	9
Гайсенюк В. А., Сицко Г. Н., Зубко В. И. К вопросу об определении абсолютной ориентации осцилляторов . . . . .	3	21
Данилькевич М. И., Леонтьев А. В., Сиссе А. Изменение диэлектрических свойств при магнитном разбавлении в бинарной системе Li—Zn ферритов . . . . .	3	17
Евдокимов В. А., Кононов Ю. Г., Лобко А. С., Сасункевич В. А. Мессбауэровский спектрометр на базе микро-ЭВМ «Электроника-60М» . . . . .	3	14
Капара М. С., Кохан Е. К., Лукашевич М. Г. Изменение магнитосопротивления арсенида галлия в электрическом поле . . . . .	1	23
Красноголовый Б. Н., Семенюк С. П., Сидорук С. И., Шпилевой В. Н. Некоторые вопросы построения двоично-десятичных кодов . . . . .	3	3
Кузнецов В. И., Лугаков П. Ф. Образование и параметры областей скопления дефектов в кремнии, облученном протонами и нейтронами . . . . .	3	27
Левкович А. Д., Перцев А. Н., Тарасенко Н. П. Характеристики $^{239}\text{Pu}$ — Ве источника нейтронов типа «Сэндвич» . . . . .	1	18
Левкович А. Д., Перцев А. Н. Бета-излучение образцовых спектрометрических гамма-источников . . . . .	3	6
Носиловская В. А. Одночастичная оценка ядерного матричного элемента электрического монополя ядра $^{197}\text{Au}$ в модели Саксона — Вудса . . . . .	1	15
Орлов Л. Н., Гуану Се. О влиянии температуры на спектры отражения . . . . .	2	11
Патек М., Хапалюк А. П. Метод расчета параметров основной моды резонатора с линзой . . . . .	2	25
Патек М., Хапалюк А. П. Открытый оптический резонатор, усложненный фокусирующими элементами . . . . .	3	28
Прима А. М., Умрейко Д. С. Корреляция параметризаций методов расчета интенсивностей ИК полос по модели эффективных зарядов и по валентнооптической схеме . . . . .	1	6
Процко С. В., Ханох Б. Ю., Хапалюк А. П. Оптический отражатель в форме полного трехгранного угла ( $\pi/2$ , $\pi/2$ , $\pi/4$ ), имеющего малые деформации двугранных углов, в автоколлимационной схеме . . . . .	1	3
Терехович А. Б., Каплун В. А., Работягин В. А., Зеленкевич В. М. Использование машинных методов при разработке антенных обтекателей . . . . .	1	10
Титов А. Д., Хапалюк А. П. Гибридные направляемые моды симметричного плоского прозрачного волновода . . . . .	2	3
Холондырез С. В. Критерий оптимальности времени сканирования участков спектра . . . . .	3	11
Ховратович Н. Н., Пупликова О. И., Неокладнова Л. Н., Прокошина Н. А. К вопросу о взаимодействии РЗЭ с глицином . . . . .	1	20
Чан Ван. Влияние сверхтонкого расщепления ядерных уровней на поворот плоскости поляризации гамма-квантов в поляризованных мишенях . . . . .	2	14

### МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Вакульчик П. А. Исследование сходимости метода Ньютона решения нелинейных разностных уравнений, аппроксимирующих смешанную задачу для квазилинейной гиперболической системы . . . . .	1	38
Вакульчик П. А. О сходимости полностью консервативных разностных схем и метода Ньютона их реализации для системы уравнений газовой динамики . . . . .	3	42
Гладкова Г. А., Мататов В. И., Солонская К. А. О нагруженности фрикционной муфты при квадратичном законе включения . . . . .	2	44
Демле С. Градиентные алгоритмы решения одной обобщенной задачи о рюкзаке . . . . .	3	48
Зверович Э. И., Чаевский Г. Г. Конформные отображения круговых многоугольников специального вида . . . . .	2	46
Ибрагимов Э. Дж., Радыно Я. В. О приближении функций на сфере в метриках $L_{p,\lambda}(S)$ интегралами типа Джексона . . . . .	1	35

Калитин Б. С. Минимальная устойчивость решений дифференциальных систем	2	30
Касим Мухамед Аль-Хайдер. Сильная изохронность центра аналитических дифференциальных систем, удовлетворяющих условиям Коши-Римана	3	50
Ковалев М. М., Писарук Н. Н. Независимые потоки и полиматроиды	2	41
Козел П. Т. О вложении ортогональной группы над полем характеристики 2 в полную линейную группу	3	45
Король И. А., Совпель И. В. Автоматизированная система перевода ключевых слов (СПЕРКС-1). I	1	30
Король И. А., Совпель И. В. Автоматизированная система перевода ключевых слов (СПЕРКС-1). II	2	33
Кравцов М. К. К оценке сверху радиуса транспортного многогранника	2	49
Кулешова И. Ф., Монастырный П. И. О вычислении критических длин для линейных граничных задач	3	33
Леваков А. А. Регулируемость нелинейных систем	2	35
Наумович Н. Ф. Вырожденные стационарные уравнения с законом площадей	1	32
Пилипчук Л. А. Алгоритм решения двухпродуктовой транспортной задачи с дополнительной матрицей ограничений прямым методом	1	42
Пилипчук Л. А. К двойственным методам решения двухпродуктовой транспортной сетевой задачи	3	52
Прокашева В. А. Однородные системы первого порядка без подвижных критических точек (случай $A_0 \neq 0$ )	2	37
Прокашева В. А. Однородные системы первого порядка без подвижных критических точек (п. к. т.) (случай $A_0 \neq 0$ )	3	35
Пыжкова Н. В. К вопросу о периодических изохронных системах	3	39
Та Хонг Куанг, Русак В. Н. Приближение функций рациональными операторами	1	26
Хвоцинская Л. А. Замкнутое решение одной краевой задачи	1	46

#### КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Бобков В. В. Нелинейные методы численного решения дифференциальных уравнений, основанные на экспоненциальном продолжении решения	2	63
Борздов В. М., Молофеев В. М. Оценка временной стабильности точек пленок $\beta$ — Та	3	57
Бузов Л. И., Гончаренко И. И. Эффекты наведенной гиротропии в растворах сложных молекул	1	61
Буснюк Н. Н. О числе 3-циклов в графах с данными степенями вершин	1	57
Жоровина Т. Н. Об одной трехэлементной краевой задаче Римана на торе	2	59
Ерофеев В. Т. Спектральное разложение операторов симметричного дифференцирования и дивергенции	2	57
Касим Мухамед Аль-Хайдер. Об изохронности гамильтоновых дифференциальных систем с полиномами 4-й степени	2	55
Калитин Б. С. К устойчивости компактных множеств	3	61
Карих Е. Д., Унгер Ю. Ч. Поперечная диффузия неравновесных носителей заряда в гетеролазерах с полосковым контактом	1	50
Кожухарь А. Ю., Полонейчик И. И., Жук И. И. Магнитные спектры эпитаксиальных феррит-гранатовых структур	1	49
Ковачев В. Х. О приведении некоторых дифференциальных уравнений с рациональной правой частью к «треугольному» виду при помощи билинейного преобразования	2	61
Кьёу Хак Туан. Фотоустойчивость борсодержащих органических комплексов	3	59
Мазаник С. А. О некоторых инвариантах линейных дифференциальных систем	1	55
Мохамед Стил Камаро. Асимптотическая эквивалентность факторизованных линейных дифференциальных уравнений второго порядка	3	65
Наумович Н. Ф. Нестационарные системы с законом площадей	2	54
Николаеня А. Э., Рекун С. А., Семеренко В. В., Швайбо Т. В. Исследование электронно-возбужденной проводимости в поверхностно-барьерных диодах на арсениде галлия	3	55
Павлов В. И., Бычков Г. Л., Богош А. К. Магнитосопротивление $La_{1-x}Ca_xMnO_3$	1	53
Сурин Т. Л. О преобразованиях систем Лапко — Данилевского	3	63
Сурин Т. Л. Скалярные преобразования систем Лапко — Данилевского	1	58
Табино Т. О линейных дифференциальных системах с частичной изометрией	1	60
Труш Н. Н. Уменьшение смещения при оценивании спектральных плотностей	2	64
Холондырев С. В., Холондырева С. Г. Определение оптимального времени измерения в режиме счета фотонов	1	52
Шалима В. Н. Об одном классе численных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида	2	66

<i>Шаромет А. А.</i> Об абстрактных изоморфизмах разрешимых алгебраических групп . . . . .	1	63
--	---	----

#### ХРОНИКА

<i>Вольвачев Р. Т.</i> XVII Всесоюзная алгебраическая конференция . . . . .	3	68
Аннотации депонированных статей . . . . .	1	66
Аннотации депонированных статей . . . . .	2	69
Аннотации депонированных статей . . . . .	3	68

#### НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Николай Александрович Борисевич (К 60-летию со дня рождения)	1	74
--	---	----

## РЕФЕРАТЫ

УДК 539.12.04

Барышевский В. Г., Чан Ван. Ковариантное описание оптической анизотропии вещества с поляризованными ядрами.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 1.

Дано ковариантное описание оптической анизотропии вещества с поляризованными ядрами. Получены явные выражения для диэлектрической проницаемости в случае электрических, магнитных дипольных переходов и электрических квадрупольных переходов.

Библ. 4 назв.

УДК 535.5

Буров Л. И., Гончаренок И. И. Эффекты наведенной анизотропии в средах с двойным оптическим резонансом.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 1.

В рамках самосогласованного подхода в приближении слабого насыщения развита теория наведенной гиротропии в случае ступенчатого возбуждения атомных и молекулярных систем. Получены общие соотношения, описывающие эволюцию пробного потока в сильном световом поле. Для частного случая (циркулярной поляризации сильного поля и линейной — слабого) показано, что выводы теории хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными.

Библ. 9 назв., ил. 2.

УДК 535.5

Онищенко Н. С. Расчет кубических членов электрической и магнитной поляризации среды с учетом электрического квадрупольного и магнитного дипольного моментов.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 1.

Вычислены кубические члены электрической и магнитной поляризации среды с учетом электрического квадрупольного и магнитного дипольного моментов молекул. В рамках микроскопического подхода найдены уравнения связи для кубически нелинейных оптически активных сред.

Библ. 4 назв.

УДК 535.34 : 543.876 : 541.749

Кьеу Хак Туан. Электронные спектры поглощения и устойчивость борсодержащих органических комплексов в растворах.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 1.

Установлена природа электронного перехода, обуславливающего длинноволновую полосу поглощения растворов борсодержащих органических комплексов соединений. Рассмотрена устойчивость молекул комплексов бора в различных растворителях. Высказано предположение о причине разрыва координационной связи между атомами бора и кислорода молекул борсодержащих комплексов в растворе.

Библ. 2 назв., ил. 2, табл. 1.

УДК 539.1+539.2

Аншakov О. М., Гурачевский В. Л., Машлан М., Холмецкий А. Л., Чудаков В. А. Мёссбауэровский толщиномер защитных покрытий.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 1.

На основе эффекта Мёссбауэра предложен метод толщинометрии защитных покрытий материалов. В качестве промежуточного этапа в создании мёссбауэровского толщиномера разработан портативный ядерный гамма-резонансный спектрометр с гармоническим заданием скоростей. Описана возможная схема построения мёссбауэровского толщиномера.

Библ. 5 назв., ил. 2.

УДК 621.372.412

Патек М., Хапалюк А. П. Открытый резонатор с периодически расположенными линзами.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 1.

В параксимальном приближении рассмотрен линейный резонатор, содержащий произвольное число периодически расположенных одинаковых линз. Параметры нижней моды найдены путем замены сложного резонатора эквивалентным резонатором с однородным заполнением. Показан простой графический метод нахождения его параметров.

Библ. 3 назв., ил. 1.

УДК 548.0.539

Зайцева А. М. Ядерное рассеяние быстрых нейтронов кристаллами.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 1.

Рассматривается прохождение быстрых нейтронов через монокристалл под малым углом ( $\sim 1^\circ$ ) к кристаллографической оси. Численный расчет на ЭВМ подтверждает когерентное усиление процессов взаимодействия кристаллической средой.

Библ. 3 назв., ил. 1.

УДК 534.26

Абдулин А. З., Гумен А. А., Последович Н. Р., Ткаченко В. М. Моделирование дифракции света на многомерных структурах с помощью жидких кристаллов.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 1.

Предлагается метод моделирования явления дифракции света на стоячих ультразвуковых волнах с помощью жидких кристаллов.

Библ. 4 назв., ил. 3.

УДК 518.5

Данг Динь Куанг. Оценка степени достоверности гипотез о функциональных закономерностях в булевом пространстве признаков.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 1.

Предлагаются алгоритм, позволяющий вычислить оценку степени достоверности гипотез о функциональных закономерностях в булевом пространстве признаков на ЭВМ, и формула для получения хорошего практического приближения этой оценки.

Библ. 4 назв., табл. 2.

УДК 519.21

Кирлица В. П. Об одной задаче линейного стохастического программирования с двусторонними ограничениями.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 1.

Рассматривается задача линейного стохастического программирования с двусторонними ограничениями, у которой компоненты векторов ограничений имеют нормальное либо равномерное распределение. Показано, что приведенная задача стохастического программирования сводится к задаче обычного, не стохастического, линейного программирования с двусторонними ограничениями.

Библ. 4 назв.

УДК 519.854.2

Струсевич В. А. Задача трех станков: достаточное условие сводимости в выпуклой форме.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 1.

Доказывается справедливость одного условия, достаточного для сведения трехстаночной задачи Беллмана — Джонсона к искусственной задаче с двумя станками. Условие представляет собой выпуклую линейную комбинацию известных условий Джонсона.

Библ. 8 назв.

УДК 519.24

Труш Н. Н. Статистические характеристики непрерывного стационарного случайного процесса и их свойства.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 1.

По наблюдениям за непрерывным стационарным случайным процессом строятся оценки математического ожидания и ковариационной функции этого процесса. Используя спектральный подход, доказывается их несмещенность и состоятельность.

Библ. 6 назв.

УДК 517.948.3

Митюшев В. В. О линейном функциональном уравнении в классе аналитических функций.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 1.

Рассматривается функциональное уравнение  $\varphi(z) = G(z)\varphi(sz) + g(z)$ ,  $|z| < 1$ . Известные функции  $G(z)$ ,  $g(z)$  и искомая функция  $\varphi(z)$  аналитичны в единичном круге,  $|G(0)| \neq 1$ ,  $s = e^{2\pi i\theta}$ , где  $\theta$  — иррациональное число. При некоторых предположениях на коэффициенты уравнения и число  $s$  найдены необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения.

Библ. 3 назв.

УДК 517.931

Прохорова Р. А., Компель В. Г. Показатели решений квазилинейной системы.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 1.

Рассматривается квазилинейная система  $\dot{y} = A(t)y + f(t, y)$ ,  $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq N \max(\|y_1\|^{m-1}, \|y_2\|^{m-1}) \|y_1 - y_2\|$ ,  $m \geq 2$ ,  $\|y\| < H$ ,  $t \geq 0$ , при выполнении условия  $(m-1)\alpha_p + \sigma_\Gamma < 0$ , где  $\sigma_\Gamma$  — коэффициент неправильности Д. М. Гробмана линейной системы  $\dot{x} = A(t)x$ ,  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p$  — ее показатели соответственно кратности  $n_1, n_2, \dots, n_p$ ,  $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$ .

Доказано, что множество характеристических показателей нетривиальных решений  $y = y(t)$ ,  $\|y(0)\| < h \leq H$  квазилинейной системы совпадает с  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$ , причем в любой достаточно малой окрестности начала координат многообразии начальных условий  $y(0)$  тех решений  $y = y(t)$ , для которых выполнено условие  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|y(t)\| \leq \alpha_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, p$ , имеет размерность  $n_1 + n_2 + \dots + n_l$ .

Библ. 6 назв.

УДК 521.19

Лобач В. И. Об одном подходе к решению задачи управления частично наблюдаемым случайным процессом.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 1.

Рассматривается задача оптимального управления частично наблюдаемым случайным процессом, заданным с помощью стохастических дифференциальных уравнений. Строится закон управления, близкий к оптимальному. Приводится пример.

Библ. 8 назв.

УДК 517.968.23

Шилин А. П. Интегральные уравнения типа свертки, сводящиеся к задачам Гильберта.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 1.

Указано интегральное уравнение типа свертки, сводящееся к задаче Гильберта. Решено более сложное уравнение, сводящееся к двум задачам Гильберта.

Библ. 5 назв.

УДК 519.1

Ковалев А. А., Малышко В. В. Экспериментальное исследование трудоемкости алгоритмов установления изоморфизма орграфов.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 1.

Разработан алгоритм установления изоморфизма орграфов на основе аппарата дуговых графов и техники улучшения разбиения, предложенной Хоккрофтом. Проведенные эксперименты показали предпочтительные средние временные характеристики предлагаемого алгоритма по сравнению с двумя известными методами на случайных орграфах и на некоторых сильно регулярных орграфах.

Библ. 9 назв., ил. 2, табл. 1.

УДК 519.4

Ширяев В. М. Полурешетки с полудистрибутивными решетками подполурешеток.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 1.

Получены необходимые и достаточные условия для V-полудистрибутивности решетки подполурешеток полурешетки в терминах отсутствия определенного вида подцепи. В качестве следствия установлена V-полудистрибутивность решетки подполурешеток полурешетки с условием максимальности.

Библ. 15 назв.

УДК 517.544

Жоровина Т. Н. Обобщенная задача Римана с постоянными коэффициентами на торе.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 1.

Рассматривается краевая задача Маркушевича  $\varphi^+(x) = \overline{a\varphi^-(x)} + b\overline{\varphi^-(x)} + c$ ,  $x \in L$  в классе двоякопериодических функций. Коэффициенты задачи постоянны, контур  $L$  есть линия симметрии прямоугольника, ромба или правильного шестиугольника. Решение выписывается в замкнутой форме.

Библ. 2 назв.



УДК 7.926.7

К а с т р и ц а О. А. **О построении интерполяционных формул для матричной функции.**—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 1.

Приводится способ построения интерполяционных формул для матричной функции, основанный на использовании вспомогательных функций специального вида.  
Библ. 3 назв.

УДК 62-50 : 519.272

Х а щ к е в и ч Г. А. **Об адаптивной идентификации параметров многомерных стохастических линейных систем.**—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1.

Предложен простой рекуррентный алгоритм оценивания параметров линейных дискретных систем при наличии гауссовых шумов в каналах наблюдений и состояний.  
Библ. 4 назв.