Если m_k, $k = 2, \ldots, s$, невелики, то формула (3) позволяет строить сравнительно простые интерполяционные формулы для $f(A)$. Вычисление матричных функций по указанному способу может быть осуществлено на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М., 1967.
2. Ланкастер П. Теория матриц.— М., 1978.
3. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем.— М., 1970.

УДК 62-506 : 519.272

Г. А. ХАЦКЕВИЧ

ОБ АДАПТИВНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ МНОГОМЕРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим линейную стационарную стохастическую систему с дискретным временем:

$$x_{k+1} = Ax_k + w_k, \quad y_k = Cx_k + v_k, \tag{1}$$

где $y_k \in R^m$, $k = \overline{1, N}$ — наблюдения за поведением системы (1); $x_k \in R^n$ — фазовые состояния системы (1); w_k, v_k и x_0 — независимые гауссовые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и известными ковариациями вида: $M\{w_k w_j^T\} = W\delta_{kj}$, $M\{v_k v_j^T\} = V\delta_{kj}$, $M\{x_0 x_0^T\} = P_0$, δ_{kj} — символ Кронекера, T — оператор транспонирования.

Задача состоит в нахождении неизвестных матричных параметров A и C системы (1) по выходным данным $y_1, \ldots, y_N$.

Для однозначной разрешимости задачи идентификации параметров A, C, следуя [1], представим матрицы A и C в инвариантной канонической форме $A_0 = TAT^{-1}$, $C_0 = CT^{-1}$, где T — матрица наблюдаемости, используемая в качестве преобразования $x_k' = Tx_k$, т. е. $T^T = (c_1 \vdots A^T c_1 \vdots \ldots \vdots A^{p_1-1^T} c_1 \vdots \ldots \vdots c_m \vdots \ldots \vdots A^{p_m-1^T} c_m)$. Здесь c_i — i-я строка матрицы C, p_i $i = \overline{1, m}$ есть наименьшее неотрицательное целое такое, что $c_i^T A^{p_i}$ линейно зависит от векторов, предшествующих данному в матрице T. Заметим, что p_i, называемые показателями наблюдаемости [2], удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^{m} p_i = m$ [2] и считаются априорно заданными.

В дальнейшем условимся производить нахождение оценок на компактном подмножестве параметрического пространства R_c, таком, что 1) A — устойчивая матрица; 2) (A, C) — наблюдаемая пара. Учитывая гауссовое распределение переменных x_k в системе (1), оценим состояния системы с помощью стационарного фильтра Калмана — Бьюси $\hat{x}_{k+1/k} = A_0\hat{x}_{k/k-1} + B_0\nu_k$, где $\nu_k = y_k C_0\hat{x}_{k/k-1}$ — процесс обновлений — последовательность гауссовых случайных величин с нулевыми средними и ковариационной матрицей $(C_0PC_0^T + V)\,\delta_{kj}$; $B_0 = TB$, где B — коэффициент усиления стационарного фильтра Калмана — Бьюси.

После описанных преобразований система (1) приобретает вид:

$$\hat{x}_{k+1/k} = A_0\hat{x}_{k/k-1} + B_0\nu_k, \quad y_k = C_0\hat{x}_{k/k-1} + \nu_k. \tag{2}$$

Величины ν_k и $\hat{x}_{k+1/k}$ являются ненаблюдаемыми, а измерению доступны только выходные переменные $y_1, \ldots, y_N$.

Матрицы A_0 и C_0 имеют вид:

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mm} \end{pmatrix}_{n\times n}, \quad A_{ii} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & & I_{p_i-1} \\ \hline \beta_{ii0} & \ldots & \beta_{iip_i-1} \end{array}\right)_{p_i\times p_i},$$

$$A_{ij} = \left(\frac{0}{\beta_{ij0} \;\ldots\; \beta_{ijp_i-1}} \right)_{p_i \times p_j}, \tag{3}$$

$$C_0 = \| c_{0i}^{\mathrm{T}} \|_{i=\overline{1,\,m}}, \quad c_{0i}^{\mathrm{T}} = \begin{cases} (\underbrace{0 \;\ldots\; 0}_{p_1+\ldots+p_{i-1}}\; 1 \; 0 \ldots 0), & p_i > 0, \\ \beta_{110} \ldots \beta_{i1p_i-1}\beta_{i20} \ldots \beta_{ii-1p_{i-1}-1}\, 0 \;\ldots\; 0), & p_i = 0. \end{cases}$$

Следовательно, задача оценивания параметров A_0 и C_0 свелась к оцениванию величин β_{ijk}, $i = \overline{1,\, n}$. Адаптивный алгоритм идентификации неизвестных элементов β_{ijk}, $i = \overline{1,\, n}$ основан на взаимных корреляциях наблюдений $r_{ij}(\sigma)$: $R(\sigma) = M\{y_{k+\sigma} y_k^{\mathrm{T}}\} = \| r_{ij}(\sigma),\ \sigma > 0,\ i,\ j = \overline{1,\ m} \|$. Однако элементы матрицы $R(\sigma)$ неизвестны, поэтому заменим $r_{ij}(\sigma)$ его оценкой $\hat{r}_{ij}(\sigma)$, тогда $\hat{R}(\sigma) = \frac{1}{N} \sum\limits_{k=1}^{N-\sigma} y_{k+\sigma} y_k^{\mathrm{T}} = \| \hat{r}_{ij}(\sigma),\ \sigma > 0,\ i,\ j = \overline{1,\, m} \|$. Из устойчивости A и результатов в [1] следует сильная состоятельность оценок $\hat{r}_{ij}(\sigma)$.

В силу системы (2) можно получить зависимость между элементами матрицы корреляций:

$$\hat{r}_{ij}(k + p_i) = \sum_{l=1}^{i} \sum_{q=0}^{p_l-1} \beta_{ilq} \hat{r}_{lj}(k + q) = \varphi_{ij}^{\mathrm{T}}(k)\, \beta_i, \tag{4}$$

где $\varphi_{ij}^{\mathrm{T}}(k) = (\hat{r}_{1j}(k) \;\ldots\; \hat{r}_{ij}(k + p_i - 1))$, $\beta_i^{\mathrm{T}} = (\beta_{i10} \ldots \beta_{iip_i-1})$ — векторы размерности $1 \times (p_1 + p_2 + \ldots + p_i)$.

Учитывая блочную структуру матрицы A_0 и достаточно большое число наблюдений y_k, применим аналог рекуррентного алгоритма из [3], основанный на выходных данных (4):

$$\hat{\beta}_i(k + p_i) = \hat{\beta}_i(k + p_i - 1) + \gamma(k + p_i)\, [\hat{r}_{ij}(k + p_i) - \varphi_{ij}^{\mathrm{T}}(k)\, \hat{\beta}_i(k + p_i - 1)[,$$

$$\gamma(k + p_i) = \frac{D(k + p_i - 1)\, \varphi_{ij}(k)}{\varphi_{ij}^{\mathrm{T}}(k)\, D(k + p_i - 1)\, \varphi_{ij}(k)}, \tag{5}$$

$$D(k + p_i) = D(k + p_i - 1) - \frac{D(k + p_i - 1)\, \varphi_{ij}(k)\, \varphi_{ij}^{\mathrm{T}}(k)\, D^{\mathrm{T}}(k + p_i - 1)}{\varphi_{ij}^{\mathrm{T}}(k)\, D(k + p_i - 1)\, \varphi_{ij}(k)},$$

$$\hat{\beta}_i(p_i) = 0; \quad D(p_i) = I, \quad k = \overline{1,\, \sum_{j=1}^{i} p_j}, \quad i = \overline{1,\, m}.$$

Из [3] следует, что алгоритм (5) является оптимальным в среднеквадратическом смысле в классе наблюдений (4) и более простым, чем алгоритм из [4]. Особенностью его является тот факт, что оценивание производится при числе наблюдений, не превосходящем число неизвестных параметров.

Заметим, что в силу достаточно большого числа наблюдений y_k и свойства сильной состоятельности оценок $\hat{r}_{ij}(k)$ мы полагаем, что наблюдения $\hat{r}_{ij}(k + q)$, $q = 0, \ldots, k + p_i$ (4) производятся без ошибок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tse E., Weinert H. L.— IEEE, Trans. on Aut. Contr., 1975, v. 20, № 5, p. 603.
2. Саридис Дж. Самоорганизующие стохастические системы управления.— М., 1980.
3. Медведев Г. А.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.; 1981, № 3, с. 46.
4. Хацкевич Г. А. Адаптивная идентификация параметров стохастических дискретных систем.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 1367-80. Деп. от 09.04.80.