ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович В. С., Арсени В. Ф. Математический анализ и его приложения.— Ростов, 1981, с. 3.
2. Арсени В. Ф., Евсеев Е. Г. Об одной граничной задаче со сдвигом.— Тбилиси, 1979.
3. Арнольд В. И.— Изв. АН СССР, 1961, т. 25, № 1, с. 21.

УДК 517.925.31

Р. А. ПРОХОРОВА, В. Г. КОМПЕЛЬ

ПОКАЗАТЕЛИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Наряду с линейной системой

$$\dot{x}=A(t)x, \tag{1}$$

где $A(t)$ — непрерывная ограниченная ($\|A(t)\|\leqslant M$) при $t\geqslant 0$ матрица, рассмотрим квазилинейную систему

$$\dot{y}=A(t)y+f(t, y), \tag{2}$$

где непрерывное m-возмущение $f(t, y)$ удовлетворяет условию

$$\|f(t, y_1)-f(t, y_2)\|\leqslant N\max(\|y_1\|^{m-1}, \|y_2\|^{m-1})\|y_1-y_2\|,$$
$$\|y\|<H,\ t\geqslant 0,\ m>1. \tag{3}$$

Пусть показатели $\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\ldots\leqslant\alpha_n$ системы (1) отрицательны. В случае постоянной матрицы $A(t)\equiv A$ А. А. Шестаковым в [1, с. 267] изучена структура множества Σ показателей нетривиальных решений системы (2), выходящих в момент $t=0$ из любой достаточно малой окрестности начала координат $y=0$. Для правильной системы (1) при дополнительных предположениях на показатели системы (1) и m-возмущение $f(t, y)$ аналогичный [1] результат получен в [2]. В работе [3] построены оценки решений системы (2)—(3). Цель настоящей работы — изучить структуру множества Σ в общем случае системы (1).

Пусть $X(t)=(x_{ij}(t))$ — нормальная упорядоченная фундаментальная система решений системы (1), показатели столбцов которой $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_p$ соответственно кратности $n_1, n_2, \ldots, n_p$, $n_1+n_2+\ldots n_p=n$. Положим $\Omega=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$. Пусть δ_i — показатель i-й строки матрицы $X^{-1}(t)=(\tilde{x}_{ij}(t))$, тогда коэффициент неправильности Д. М. Гробмана σ_Γ [4] вычисляется по формуле $\sigma_\Gamma=\max\limits_{1\leqslant i\ n}\{\alpha_i+\delta_i\}$. Обозначим $\chi[y]=\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln\|y(t)\|$.

Лемма 1. Если выполнено условие

$$(m-1)\alpha_n+\sigma_\Gamma<0, \tag{4}$$

то $\Sigma\subseteq\Omega$.

Доказательство. По теореме Д. М. Гробмана [4] при выполнении условия (4) существует достаточно малая окрестность начала координат $\|y\|<h$, $h<H$, что все решения $y=y(t)$ системы (2), выходящие в момент $t=0$ из этой окрестности ($\|y(0)\|<h$), неограниченно продолжимы вправо и удовлетворяют условию $\chi[y(t)]\leqslant\alpha_n$.

Пусть $y=y_0(t)$, $\|y_0(0)\|<h$, любое нетривиальное решение системы (2). На основании принципа линейного включения [5] $y=y_0(t)$ является решением некоторой линейной системы

$$\dot{y}=A(t)y+Q(t)y,\ \|Q(t)\|\leqslant N\|y_0(t)\|^{m-1},\ t\geqslant 0. \tag{5}$$

Так как $\chi[y_0(t)]\leqslant\alpha_n$, то для любого $\varepsilon>0$ справедлива оценка

$$\|y_0(t)\|\leqslant D_\varepsilon e^{(\alpha_n+\varepsilon)t},\ t\geqslant 0. \tag{6}$$

Обозначим $(m-1)\alpha_n+\sigma_\Gamma=-\gamma$, $\gamma>0$, и пусть $\varepsilon>0$ столь мало, что $-\varepsilon_1=\varepsilon(m-1)-\gamma<0$.

В силу неравенства (6) норма матрицы возмущения $Q(t)$ удовлетворяет оценке

$$\|Q(t)\|\leqslant ND_\varepsilon^{m-1}\,e^{(m-1)(\alpha_n+\varepsilon)t}\equiv N_\varepsilon e^{-(\sigma_\Gamma+\varepsilon_1)t},\ t\geqslant 0.$$

Применяя теорему Богданова — Гробмана [4, 6], получаем, что показатели систем (1) и (5) совпадают, и, следовательно, $\chi[y_0(t)]\in\Omega$. Лемма доказана.

Следствие. Если система (1) правильна, то $\Sigma=\Omega$, причем в любой достаточно малой окрестности начала координат многообразие начальных данных $y(0)$ тех решений $y=y(t)$, для которых выполнено неравенство $\chi[y]\leqslant\lambda_l$, $l=1,\ldots,p$, имеет размерность $n_1+n_2+\ldots+n_l$.

Доказательство следствия вытекает из доказанной леммы и теоремы А. А. Шестакова [1, с. 267] и применения свойства обобщенной приводимости правильной системы.

При доказательстве теоремы будет использоваться следующая очевидно доказываемая

Лемма 2. Пусть дана система

$$\alpha_{j1}x_1+\ldots+\alpha_{jn}x_n+\varphi_j(x_1,\ldots,x_n)=0,\ j=1,\ldots,p,\ p\leqslant n, \tag{7}$$

и пусть выполнены следующие условия:

1) функции φ_j вместе с $\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}$ определены и непрерывны в некоторой окрестности нуля $\|x\|<h$, $i=1,\ldots,n$; $j=1,\ldots,p$;

2) $|\varphi_j(x_1,\ldots,x_n)|\leqslant K\|x\|^m$, $m>1$, $\|x\|<h$, $j=1,\ldots,p$;

3) один из миноров p-го порядка матрицы коэффициентов (α_{ij}) отличен от нуля.

Тогда в любой достаточно малой окрестности нуля множество решений системы (7) образует многообразие размерности $(n-p)$.

Теорема. Если $m\geqslant 2$ и выполнено условие (4), то $\Sigma=\Omega$, причем в любой достаточно малой окрестности начала координат многообразие начальных условий $y(0)=\mathrm{colon}(y_1(0),\ldots,y_n(0))$ тех решений $y=y(t)$, для которых выполнено неравенство $\chi[y]\leqslant\lambda_l$, $l=1,\ldots,p$, имеет размерность $n_1+n_2+\ldots+n_l$.

Доказательство. Пусть $y=y(t)=\mathrm{colon}(y_1(t),\ldots,y_n(t))$ — любое нетривиальное решение системы (2). Тогда по интегральной формуле Коши справедливо представление

$$y(t)=X(t)X^{-1}(0)\,y(0)+\int_0^t X(t)X^{-1}(\tau)f[\tau,\ y(\tau)]\,d\tau$$

или

$$y_i(t)=\sum_{j=1}^n x_{ij}(t)\,c_j+\sum_{j=1}^n x_{ij}(t)\int_0^t\sum_{k=1}^n \tilde{x}_{jk}(\tau)f_k[\tau,\ y(\tau)]\,d\tau, \tag{8}$$

где $\mathrm{colon}(c_1,\ldots,c_n)=X^{-1}(0)y(0)$, $X^{-1}(0)=(a_{ij})$, $c_j=a_{j1}y_1(0)+\ldots+a_{jn}y_n(0)$, $j=1,\ldots,n$. Обозначим $s_{jk}(t)=\tilde{x}_{jk}(t)f_k[t,\ y(t)]$. Тогда (8) можно переписать в виде (см. [6])

$$y_i(t)=\sum_{j=1}^{n_1+\ldots+n_{p-1}} x_{ij}(t)\Big[c_j+\sum_{k=1}^n\int_0^t s_{jk}(\tau)\,d\tau\Big]-$$
$$-\sum_{j=n_1+\ldots+n_{p-1}+1}^{n} x_{ij}(t)\sum_{k=1}^n\int_t^\infty s_{jk}(\tau)d\tau+\sum_{j=n_1+\ldots+n_{p-1}+1}^{n} x_{ij}(t)\Big[c_j+$$
$$+\sum_{k=1}^n\int_0^t s_{jk}(\tau)d\tau\Big]\equiv S_1(t)+S_2(t)+S_3(t). \tag{9}$$

Несобственные интегралы в представлении (9) сходятся, так как подынтегральная функция имеет отрицательный показатель. Действительно,

$$\chi[s_{ij}(t)] \leqslant \chi[N|\tilde{x}_{jk}(t)|\,\|y(t)\|^m] \leqslant \delta_j + m\alpha_n = \delta_j + \alpha_j + (m-1)\alpha_n \leqslant \sigma_\Gamma + (m-1)\alpha_n < 0,\ j = n_1 + \ldots + n_{p-1} + 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, n.$$

Из последнего неравенства имеем

$$\chi[x_{ij}(t)\int_t^\infty s_{jk}(\tau)d\tau] \leqslant \alpha_j + \delta_j + \chi[\|y(t)\|^m] \leqslant \alpha_j + \delta_j + (m-1)\alpha_n + \chi[y] \leqslant \sigma_\Gamma + (m-1)\alpha_n + \chi[y] < \chi[y]$$

и, следовательно, $\chi[S_2(t)] < \chi[y]$.

Аналогично убеждаемся, что $\chi[S_1(t)] \leqslant \max\{\lambda_{p-1}, \chi[y] - \gamma_1\}$, где γ_1 — некоторое положительное число.

Отсюда в силу леммы 1 и свойства несжимаемости нормальной фундаментальной системы решений следует, что показатель любого решения $y = y(t)$ зависит от показателя функции $S_3(t)$ следующим образом:

1) Если начальные данные $y(0)$ таковы, что хотя бы для одного $j = \in\{n_1 + \ldots + n_{p-1} + 1, \ldots, n\}$ выполняется неравенство

$$c_j + \sum_{k=1}^n \int_0^\infty s_{jk}(\tau)d\tau \neq 0, \text{ то } \chi[y(t)] = \lambda_p.$$

2) Если же справедливы равенства

$$c_j + \sum_{k=1}^n \int_0^\infty s_{jk}(\tau)d\tau = 0, \tag{10}$$

то $\chi[y(t)] \leqslant \lambda_{p-1}$.

Покажем, что в любой достаточно малой окрестности начала координат существует $(n - n_p)$— мерное многообразие D_1 начальных данных $y(0)$, что выполняются равенства (10).

Систему (10) можно переписать в виде

$$a_{j1}y_1(0) + \ldots + a_{jn}y_n(0) + \varphi_j[y_1(0), \ldots, y_n(0)] = 0,\quad j = n_1 + \ldots + n_{p-1} + 1, \ldots, n, \tag{11}$$

где $\varphi_j[y_1(0), \ldots, y_n(0)] = \sum_{k=1}^n \int_0^\infty \tilde{x}_{jk}(\tau) f_k[\tau, y(\tau)]\,d\tau.$

Для системы (11) выполняются условия леммы 2. В самом деле, в силу неравенства $\|y(t)\| \leqslant M_\varepsilon \|y(0)\| \exp\{(\lambda_p + \varepsilon)t\}$, $\|y(0)\| < h$, имеем

$$\left|\int_0^\infty s_{jk}(\tau)\,d\tau\right| \leqslant \int_0^\infty |\tilde{x}_{jk}(\tau)|\, M_\varepsilon^m N \|y(0)\|^m \exp\{(m\lambda_p + m\varepsilon)\tau\}\,d\tau \equiv K_{jk}\|y(0)\|^m,$$

$j = n_1 + \ldots + n_{p-1} + 1, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, n$, и, следовательно, справедлива оценка $|\varphi_j[y_1(0), \ldots, y_n(0)]| \leqslant K\|y(0)\|^m$, $j = n_1 + \ldots + n_{p-1} + 1, \ldots, n$.

Кроме того, так как $\det X^{-1}(0) \neq 0$, то хотя бы один из миноров n_p-го порядка матрицы коэффициентов линейной части системы (11) отличен от нуля.

Тогда по лемме 2 в любой достаточно малой окрестности нуля $\|y\| < h_1$ множество решений системы (11) образует $n - n_p = n_1 + \ldots + n_{p-1}$ — мерное многообразие D_1, т. е. существует $n_1 + \ldots + n_{p-1}$ — мерное многообразие D_1 начальных данных $(y_1(0), \ldots, y_n(0))$, что для решений $y = y(t)$, выходящих в момент времени $t = 0$ из этого многообразия, справедлива оценка $\chi[y(t)] \leqslant \lambda_{p-1}$; в противном случае $(y(0) \notin D_1,\ \|y(0)\| < h_1)$, $\chi[y(t)] = \lambda_p$.

Рассмотрим теперь решение системы (2) $y = y(t)$, $y(0) \in D_1$. Для них справедливо представление

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{n_1+\ldots+n_{p-2}} x_{ij}(t)\left[c_j + \sum_{k=1}^{n}\int_0^t s_{jk}(\tau)\,d\tau\right] -$$

$$- \sum_{j=n_1+\ldots+n_{p-2}+1}^{n} x_{ij}(t)\sum_{k=1}^{n}\int_t^\infty s_{jk}(\tau)d\tau + \sum_{j=n_1+\ldots+n_{p-2}+1}^{n_1+\ldots+n_{p-1}} x_{ij}(t)\Big[c_j +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty s_{jk}(\tau)\,d\tau\Big] \equiv \tilde{S}_1(t) + \tilde{S}_2(t) + \tilde{S}_3(t). \qquad (12)$$

Аналогично, как и выше, убеждаемся, что несобственные интегралы в представлении (12) сходятся и справедливы оценки $\chi[\tilde{S}_2(t)] < \chi[y(t)]$, $\chi[\tilde{S}_1(t)] = \max\{\lambda_{p-2}, \chi[y] - \gamma_2\}$, $\gamma_2 > 0$, и, следовательно, характеристический показатель $\chi[y(t)]$ решения $y = y(t)$, $y(0) \in D_1$, зависит от показателя функции $\tilde{S}_3(t)$ следующим образом:

1) Если начальные данные $y(0)$ таковы, что хотя бы при одном $j \in \{n_1 + \ldots + n_{p-2} + 1, \ldots, n_1 + \ldots + n_{p-2}\}$ выполняется неравенство $c_j + \sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty s_{jk}(\tau)d\tau \neq 0$, то $\chi[y(t)] = \lambda_{p-1}$.

2) Если же справедливы равенства

$$c_j + \sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty s_{jk}(\tau)d\tau = 0,\ j = n_1 + \ldots + n_{p-2} + 1, \ldots, n, \qquad (13)$$

то $\chi[y(t)] \leqslant \lambda_{p-2}$.

Покажем, что в любой достаточно малой окрестности начала координат $\|y\| < h_1$ множество решений системы (13) образует $n_1 + \ldots + n_{p-2}$ — мерное многообразие $D_2 \subset D_1$.

Действительно, система (13) имеет вид

$$a_{j1}y_1(0) + \ldots + a_{jn}y_n(0) + \varphi_j[y_1(0), \ldots, y_n(0)] = 0,$$
$$j = n_1 + \ldots + n_{p-2} + 1, \ldots, n, \qquad (14)$$

где $|\varphi_j(y_1(0), \ldots, y_n(0))| \leqslant K\|y(0)\|^m$, $\|y(0)\| < h_1$, $y(0) \in D_1$, $m \geqslant 2$, так как из представления (12) имеем при $m \geqslant 2$ оценку $\|y(t)\| \leqslant \leqslant D_\varepsilon\|y(0)\|\exp\{(\lambda_{p-1} + \varepsilon)t\}$, $y(0) \in D_1$, $m \geqslant 2$. Кроме того, так как $\det X^{-1}(0) \neq 0$, то хотя бы один из миноров $(n_{p-1} + n_p)$-го порядка, окаймляющий отличный от нуля минор n_p-го порядка, не равен нулю.

Тогда в силу леммы 2 существует $n_1 + \ldots + n_{p-2}$-мерное многообразие $D_2 \subset D_1$, что для показателя решения $y = y(t)$, $y(0) \in D_2$, справедливо неравенство $\chi[y(t)] \leqslant \lambda_{p-2}$. В противном случае $(y(0) \in D_1,\ y(0) \notin D_2)$, $\chi[y(t)] = \lambda_{p-1}$.

Проведя последовательно p раз аналогичные построения, закончим доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений.— М.— Л., 1949.

2. Игнатьева Г. К. О характеристических показателях систем с m-возмущениями.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 1763-79. Деп. от 17.05.79.

3. Fodor János.— Szemelyenyek, az Elte TTK, Analizis II. Tanszék tudományos munkáiból, 1979, № 11.

4. Гробман Д. М.— Мат. сб., 1952, т. 30, № 1.

5. Былов Б. Ф., Гробман Д. М.— УМН, 1962, т. 17, № 3.

6. Богданов Ю. С.— Мат. сб., 1957, т. 41, № 4.