$=\{t\in E:u_t^j\neq 0\}$. Так как $g(B^*)=f(x^{опт})$, то $g(B^{опт})\leqslant f(x^{опт})$. Поэтому $f(x^{опт})=g(B^{опт})$. Решив задачу (4) алгоритмом 1, мы можем способом, описанным выше, получить решение задачи 2.

Список литературы

1. Ковалев М. М., Писарук Н. Н. // Докл. АН БССР.— 1984.— Т. 28.— С. 982.
2. Ковалев М. М., Писарук Н. Н. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.— 1984.— № 2.— С. 41.
3. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация.— М., 1981.

Поступила в редакцию 26.10.84.

УДК 519.172:519.683

И. В. КОМАРОВСКИЙ

α-ВЗВЕШЕННЫЕ t-АРНЫЕ ДЕРЕВЬЯ

Ориентированным t-арным деревом назовем ориентированное дерево [1], в котором полустепень исхода любой вершины равна 0, 2, ..., t, $t\geqslant 2$. В статье исследуются только такие деревья, поэтому слова «ориентированное» и «t-арное» будут опускаться. Вершины с полустепенью исхода, отличной от нуля, назовем внутренними, а с полустепенью исхода, равной нулю,— листьями. Листья при изображении дерева будем обозначать квадратом. Уровень вершины есть длина пути из корня в эту вершину. Высота дерева — это длина самого длинного пути из корня дерева в какой-нибудь лист. Множество всех деревьев с $n\geqslant 1$ листьями для фиксированного t обозначим через $\mathbf{D}_n$. Терминологию, относящуюся к деревьям, будем использовать из [2]. На вершинах дерева $D\in\mathbf{D}_n$ определим рекурсивно функции μ_α и σ'_α:

$$\mu_\alpha(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ — лист},\\ \alpha\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_\alpha(x_i) & \text{в противном случае},\end{cases}$$

$$\sigma'_\alpha(x)=\begin{cases}\mu_\alpha(x), & \text{если } x \text{ — лист},\\ \mu_\alpha(x)+\sum\limits_{i=1}^{r}\sigma'_\alpha(x_i) & \text{в противном случае},\end{cases}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_r$, $2\leqslant r\leqslant t$,— вершины, в которые заходят дуги из x, $\alpha>0$. Значения функций μ_α и σ'_α в корне дерева (поддерева) $D_m\in\mathbf{D}_m$ будем обозначать через $\mu_\alpha(D_m)$ и $\sigma'_\alpha(D_m)$, $0<m\leqslant n$.

Пусть $\sigma_\alpha(D_m)=\sigma'_\alpha(D_m)-\mu_\alpha(D_m)$, $0<m\leqslant n$.

Нетрудно видеть, что задачи минимизации функций σ'_α и σ_α на множестве $\mathbf{D}_n$ эквивалентны.

Для фиксированного α назовем *оптимальным* в $\mathbf{D}_n$ дерево D_n, для которого $\sigma_\alpha(D_n)$ минимально.

Нашей задачей является нахождение структуры оптимальных деревьев для различных α и вычисления для них значений функции σ_α. Эти результаты использовались для оценки числа операций ввода и вывода в различных стратегиях совместной обработки файлов [3, 4].

Каждой дуге дерева D_n, заходящей в вершину x, сопоставим значение $\mu_\alpha(x)$, которое будем называть весом этой дуги.

Индукцией по высоте h дерева легко доказываются следующие леммы.

Лемма 1. Сумма весов всех дуг дерева D_n равна $\sigma_\alpha(D_n)$.

Лемма 2. Пусть $D_n \in \mathbf{D}_n$ — дерево высоты h. Тогда

$$\mu_\alpha(D_n) = a_h\alpha^h + a_{h-1}\alpha^{h-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0,$$

где $\sum_{i=0}^{h} a_i = n$ и a_j — число листьев дерева на уровне j, $j=\overline{0,h}$.

Внешним путем дерева назовем путь от корня дерева в лист, а его *α-взвешенной длиной* — сумму $\alpha^{h-1} + \ldots + \alpha + 1$, где h — уровень листа. Для $h=0$ α-взвешенную длину единственного внешнего пути положим равной 0. Так, если $(d_h, d_{h-1}), \ldots, (d_1, d_0)$ есть внешний путь дерева, то в выражении для его α-взвешенной длины слагаемому α^i соответствует дуга (d_{i+1}, d_i), $i=\overline{0, h-1}$.

α-Взвешенная длина внешних путей дерева D_n есть сумма α-взвешенных длин всех внешних путей в D_n.

Лемма 3. α-Взвешенная длина внешних путей дерева D_n равна сумме весов всех дуг этого дерева и, следовательно, равна $\sigma_\alpha(D_n)$.

Насыщенным назовем дерево, в котором полустепень исхода любой внутренней вершины равна t, за исключением, быть может, одной, находящейся на предшествующем максимальному уровне, полустепень исхода которой равна s, $2 \leqslant s \leqslant t$.

Насыщенное дерево, в котором все листья находятся на максимальном и предшествующему ему уровнях, является *полностью сбалансированным насыщенным*.

Лемма 4. Высота полностью сбалансированного насыщенного дерева из $\mathbf{D}_n$ равна $\lceil \log_t n \rceil$ и число листьев на уровнях $\lceil \log_t n \rceil - 1$ и $\lceil \log_t n \rceil$ равно соответственно

$$\left\lfloor \frac{t^{\lceil \log_t n \rceil} - n}{t-1} \right\rfloor \text{ и } \left\lfloor \frac{nt - t^{\lceil \log_t n \rceil}}{t-1} \right\rfloor.$$

Квазилинейным насыщенным назовем насыщенное дерево, все внутренние вершины которого составляют цепь.

Лемма 5. Высота квазилинейного насыщенного дерева из $\mathbf{D}_n$ равна $\left\lceil \frac{n-1}{t-1} \right\rceil$.

Теорема. В классе $\mathbf{D}_n$ оптимальным деревом является: при $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{t}$ — квазилинейное насыщенное; при $\frac{1}{t} < \alpha < 0{,}5$, $n = 1 + l(t-1)$, $l = 0, 1, \ldots$, а также при $\alpha \geqslant 0{,}5$ — полностью сбалансированное насыщенное. В случае $\alpha = \frac{1}{t}$ и $n = 1 + l(t-1)$, $l = 0, 1, \ldots$, оптимальными являются все насыщенные деревья из $\mathbf{D}_n$.

Доказательство. Согласно лемме 3, достаточно построить дерево с минимальной α-взвешенной длиной внешних путей.

1. $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{t}$. Опишем два вида преобразований дерева. Первое преобразование применимо, когда имеются две внутренние вершины, к которым присоединены только листья. Оно заключается в следующем. Обозначим уровни этих листьев через M и m, $M \geqslant m$. Удалим все r, $2 \leqslant r \leqslant t$, листьев, которые являются братьями на уровне m, в результате чего их отец станет листом. Затем эти листья присоединим к одному из листьев на уровне M, который в результате такой операции станет внутренним. Описанная процедура показана на рис. 1. Такая модификация дерева сохраняет число листьев. Используя лемму 3, нетрудно вычислить величину Δ, на которую изменится длина внешнего пути:

$$\Delta = r(1 + \alpha + \ldots + \alpha^{m-1}) + (1 + \alpha + \ldots + \alpha^{M-1}) - (1 + \alpha + \ldots + \alpha^{m-2}) -$$
$$- r(1 + \alpha + \ldots + \alpha^{M}) = \frac{\alpha^{m-1}}{1-\alpha}(1 - \alpha^{M-m+1})(1 - r\alpha).$$

Поскольку при $0<\alpha\leqslant\frac{1}{t}\leqslant\frac{1}{r}$ и $M\geqslant m$ величина Δ неотрицательная, такое преобразование уменьшает или оставляет без изменения α-взвешенную длину внешних путей.

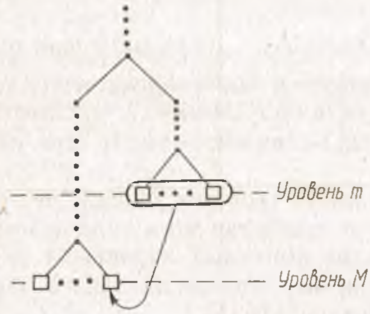

Рис. 1. Преобразование дерева при $0<\alpha\leqslant\frac{1}{t}$, $t\geqslant2$

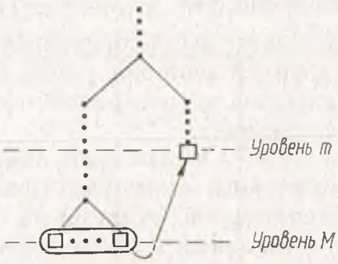

Рис. 2. Преобразование дерева при $\alpha\geqslant0{,}5$

Второе преобразование применимо, когда внутренние вершины составляют цепь, но дерево еще не является квазилинейным насыщенным. Обозначим через M максимальный уровень дерева, а через m — уровень внутренней вершины, полустепень исхода которой меньше t, $m+2\leqslant M$. Пусть число листьев на уровне M больше 2. В этом случае удаляем лист на уровне M и присоединяем его к внутренней вершине на уровне m. Нетрудно видеть, что такое преобразование всегда уменьшает α-взвешенную длину внешних путей. В случае, когда число листьев на уровне M равно 2, удаляем эти листья, в результате чего их отец станет листом, и присоединяем один из них к внутренней вершине на уровне m. Такое преобразование не изменяет числа листьев. Теперь

$$\Delta=2(1+\alpha+\ldots+\alpha^{M-1})-(1+\alpha+\ldots+\alpha^{M-2})-(1+\alpha+\ldots+\alpha^{m})=$$
$$=\alpha^{m+1}\,\frac{1-\alpha^{M-m+1}}{1-\alpha}+\alpha^{M-1}.$$

Очевидно, что при $0<\alpha\leqslant\frac{1}{t}$ и $M\geqslant m+2$ имеем $\Delta>0$. Таким образом, и второе преобразование уменьшает α-взвешенную длину внешних путей.

Применяя первое преобразование до тех пор, пока это возможно, а затем таким же образом — второе преобразование, мы в итоге получим единственное квазилинейное насыщенное дерево. Поскольку каждое преобразование уменьшает или оставляет без изменения α-взвешенную длину внешних путей, то, как нетрудно видеть, квазилинейное насыщенное дерево будет оптимальным.

2. $\alpha\geqslant0{,}5$. Доказательство проводится аналогично случаю 1. Первое преобразование показано на рис. 2, где M и m — максимум и минимум всех уровней, на которых появляются листья, $M\geqslant m+2$. Такое преобразование уменьшает или не изменяет α-взвешенную длину внешних путей.

Второе преобразование аналогично второму преобразованию для случая 1. Оно применимо, когда на уровне $m\leqslant M$ есть внутренняя вершина, полустепень исхода которой меньше t.

Многократно применяя в надлежащей последовательности преобразования 1 и 2, получим полностью сбалансированное насыщенное дерево, в котором на предпоследнем уровне все листья расположены только справа. Поскольку такое дерево единственно, а данные преобразования не увеличивают α-взвешенную длину внешних путей, результирующее дерево будет оптимальным.

3. $\frac{1}{t}<\alpha<0{,}5$, $n=1+l(t-1)$, $l=0,\ 1,\ \ldots$. Схема доказательства следующая. Вначале дерево преобразуем в насыщенное. В нем каждая внутренняя вершина будет иметь полустепень исхода, равную t. Далее применяем преобразование, показанное на рис. 2, до тех пор, пока это возможно.

4. В случае $\alpha=\frac{1}{t}$, $n=1+l(t-1)$, $l=0,\ 1,\ \ldots$, как нетрудно видеть, все дуги имеют вес 1, поскольку для такого n полустепень исхода каждой внутренней вершины равна t. Отсюда, в силу леммы 3, α-взвешенная длина внешних путей равна постоянной величине — числу дуг дерева. Теорема доказана.

Замечание. По существу, доказанная теорема утверждает отсутствие локального минимума, отличного от глобального в задаче минимизации специальной функции на множестве корневых деревьев с ограниченными степенями вершин и фиксированным числом листьев и дает необходимые и достаточные условия оптимальности [5].

Следствие. Пусть D_n^* — оптимальное дерево в классе $\mathbf{D}_n$. Тогда

$$\sigma_\alpha(D_n^*)=\begin{cases}\dfrac{n-(n-q(t-1))\alpha^q}{1-\alpha}-\dfrac{(t-1)\,\alpha(1-\alpha^q)}{(1-\alpha)^2}, & 0<\alpha\leqslant\dfrac{1}{t},\\[2mm] n\,\dfrac{1-\alpha^k}{1-\alpha}-\alpha^{k-1}\left\lfloor\dfrac{t^k-n}{t-1}\right\rfloor, & \left(\dfrac{1}{t}<\alpha<0{,}5\ \wedge\ n=1+l(t-1),\right.\\ & \left.l=0{,}1,\ldots\right)\ \vee\ \alpha\geqslant 0{,}5,\\[2mm] kn-\left\lfloor\dfrac{t^k-n}{t-1}\right\rfloor, & \alpha=1.\end{cases}$$

Здесь $k=\lceil\log_t n\rceil$, $q=\left\lceil\dfrac{n-1}{t-1}\right\rceil$.

Схема доказательства следующая. В силу теоремы достаточно рассмотреть два вида деревьев (при $0<\alpha\leqslant\frac{1}{t}$ и при $\left(\frac{1}{t}<\alpha<0{,}5\ \wedge\ n=\right.$ $\left.=1+l(t-1),\ l=0,\ 1,\ \ldots\right)\vee\ \alpha\geqslant 0{,}5)$. Для таких деревьев, используя леммы 3, 4 и 5, нетрудно вычислить искомые оценки.

При $\alpha=1$ получаем оценку, совпадающую с оценкой в [6], для длины внешних путей оптимального дерева.

В заключение автор выражает благодарность М. М. Ковалеву за полезное обсуждение результатов.

Список литературы

1. Кристофидес Н. Теория графов: Алгоритмический подход.— М., 1978.
2. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов.— М., 1979.
3. Дробушевич Г. А., Комаровский И. В. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.— 1983.— № 1.— С. 37.
4. Дробушевич Г. А., Комаровский И. В. // Труды Международной конференции по системам для автоматизированного обслуживания.— Варна.— 1983.
5. Ковалев М. М. // Кибернетика.— 1985.— № 2.— С. 11.
6. Кнут Д. Искусство программирования. Сортировка и поиск.— М., 1978.— Т. 3.

Поступила в редакцию 16.11.84.