

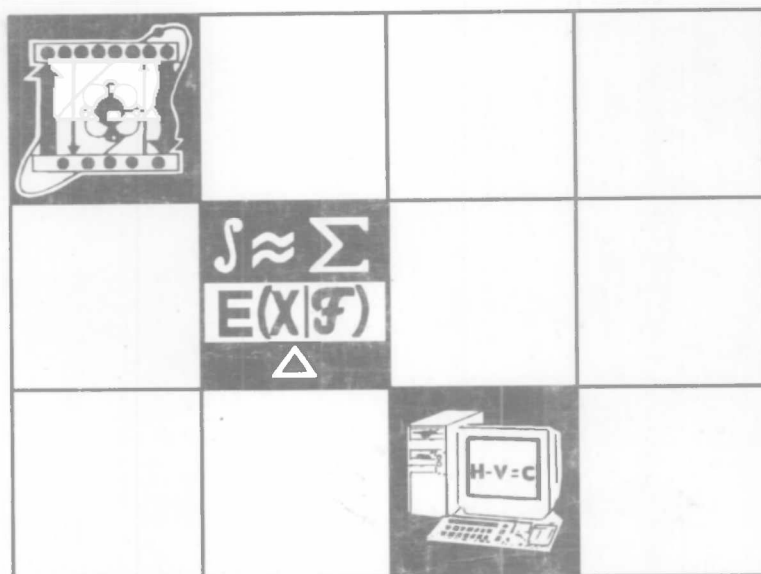
ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета

СЕРИЯ 1

Физика
Математика
Информатика

3/2001





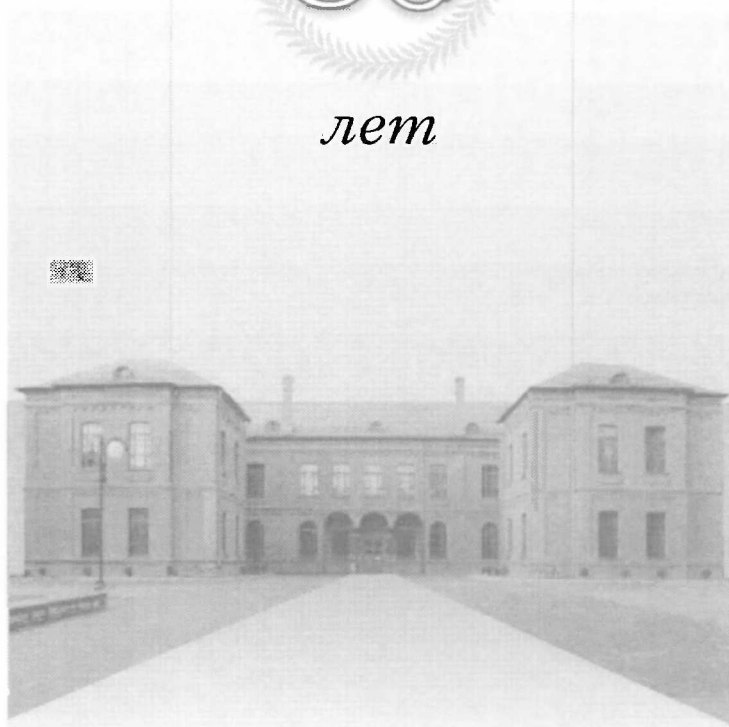
БЕЛОРУССКОМУ
ГОСУДАРСТВЕННОМУ
УНИВЕРСИТЕТУ

1921



2001

лет



ВЕСТНИК

**Белорусского государственного
университета**

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с января 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ 1

**Физика
Математика
Информатика**

3/2001

Сентябрь

**МИНСК
БГУ**

Главный редактор В.Г. РУДЬ

Редакционная коллегия серии:

В.М. АНИЩИК (ответственный редактор),
Л.М. БАРКОВСКИЙ (зам. ответственного редактора), В.Г. БАРЫ-
ШЕВСКИЙ, В.В. БОБКОВ (зам. ответственного редактора),
Е.С. ВОРОПАЙ, М.А. ЖУРАВКОВ, Э.И. ЗВЕРОВИЧ, А.И. КАЛИНИН,
Ф.Ф. КОМАРОВ, А.И. КОМЯК, В.И. КОРЗЮК, П.Д. КУХАРЧИК,
П.А. МАНДРИК, В.И. МИРОНЕНКО, С.Г. МУЛЯРЧИК, И.В. СОВ-
ПЕЛЬ, А.К. ФЕДОТОВ, Ю.С. ХАРИН, С.М. ЧЕРЕНКЕВИЧ, А.Ф. ЧЕР-
НЯВСКИЙ, Н.И. ЮРЧУК

Учредитель:
Белорусский государственный университет

Регистрационный № 805

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1: Физ. Мат. Информ. 2001. № 3

Адрес редакции: 220050, Минск, ул. Бобруйская, 7, к. 412, 413. Тел. 209-54-00.
E-mail vestnik_bsu@research.bsu.unibel.by

Редактор И.А. Лешкевич
Корректор Л.А. Меркуль
Технический редактор Ю.И. Денисов

Набор и верстка выполнены в редакции журнала Р.Е. Осянниковым и Ю.И. Денисовым

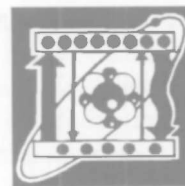
Подписано в печать 12.09.2001. Формат 70x108 1/16. Бумага офс. Печать офс.
Усл.печ. л. 8,4. Усл.кр.-отт. 8,92. Уч.-изд. л. 10,25. Тираж 480 экз. Заказ 525.
Цена 1371 р

Отпечатано с готовых диапозитивов заказчика в Издательском центре БГУ.
220030, Минск, ул. Красноармейская, 6.
ЛП № 284 от 21.05.98.

© Вестник БГУ, 2001

80
лет

БЕЛОРУССКОМУ
ГОСУДАРСТВЕННОМУ
УНИВЕРСИТЕТУ



УДК 53.001(476) (092)

Л.М. БАРКОВСКИЙ, Т.А. АЛЕКСЕЕВА

**АКАДЕМИК Ф.И. ФЕДОРОВ И РАЗВИТИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ
НАУКИ В БЕЛГОСУНИВЕРСИТЕТЕ
(к 90-летию со дня рождения)**

The paper is devoted to the 90th anniversary of academician F.I. Fedorov, well-known physicist-theorist, Professor of the Belarusian State University, Academician and Member of the Presidium of Academy of Sciences of the Republic of Belarus, the President of Belarusian Physical Society.

The data from biography of F.I. Fedorov and the stages of his scientific activities are given in the article.



Барковский Леонид Матвеевич – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретической физики.

Область научных интересов – оптика и акустика сложных сред. Автор более 150 публикаций.

Алексеева Татьяна Александровна – инженер кафедры теоретической физики.



19 июня 2001 г. исполнилось 90 лет со дня рождения академика Федора Ивановича Федорова (1911–1994 гг.) – известного белорусского физика-теоретика, с именем которого неразрывно связаны основные этапы становления и развития физико-математических наук в нашей республике, создателя белорусской научной школы по теоретической физике. Сейчас мы все более осознаем значение его деятельности в области теоретической физики для мировой и отечественной науки.

Академик Ф.И. Федоров родился 19 июня 1911 г. в деревне Турец Гродненской области в семье учителей. Его отец – известный белорусский писатель Янка Мавр. В школьные годы Федор Иванович увлекался радиотехникой, в пятнадцать лет смастерил приемник, очень любил читать. Эту любовь к чтению, книгам он пронес через всю свою жизнь. С детства Федор Иванович стремился к получению знаний. В 1928 г. он поступил в Белорусский государственный университет, где вместо одного обязательного иностранного языка изучил все три (французский, немецкий, английский), которые тогда преподавались в БГУ, а также посещал занятия, не являющиеся

обязательными, например химию. Окончив в 1931 г. физико-математическое отделение педагогического факультета Белгосуниверситета, Ф.И. Федоров начал свою трудовую деятельность в педагогическом техникуме г. Кричева. Кроме физики он преподавал математику, физкультуру и пение, а также работал в одной из городских школ.

С поступления в аспирантуру Ленинградского университета в 1933 г. началась научная деятельность Ф.И. Федорова. Федор Иванович считал, что ему очень повезло: он, аспирант из Белоруссии, оказался в Ленинграде – крупном научном центре страны; его научным руководителем стал выдающийся физик-теоретик с мировым именем В.А. Фок. Это было огромной честью и налагало большую ответственность, ибо тогда в стране не было человека более авторитетного в области теоретической физики, чем В.А. Фок. Период обучения в аспирантуре был труднейшим испытанием для Ф.И. Федорова, но исключительная одаренность, огромная работоспособность и редкая организованность позволили ему всего за три года овладеть новейшими идеями и методами теоретической физики. В то время под непосредственным влиянием В.А. Фока, а также благодаря той особенной доброжелательной атмосфере, которая царила в Ленинграде, сформировались его научный стиль и интересы. Характерной чертой его научного творчества стал глубокий подход к изучаемым проблемам теоретической физики. В сентябре 1936 г. в Ленинградском университете он защитил кандидатскую диссертацию, посвященную электромагнитным взаимодействиям элементарных частиц. В своих исследованиях Федор Иванович широко использовал метод функционалов Фока.

После возвращения в Минск в 1936 г. Ф.И. Федоров много сил и энергии отдал организации учебного процесса и развертыванию научно-исследовательской работы на физико-математическом факультете Белорусского государственного университета. Здесь он продолжил свои исследования по применению функционалов Фока в квантовой теории излучения, и в 1938 г. по его инициативе была создана кафедра теоретической физики, которой он заведовал до 1962 г.

На долю Ф.И. Федорова выпала и непростая задача восстановления физико-математического факультета после возвращения БГУ из эвакуации в освобожденный от фашистов Минск в 1944 г. В это время он был деканом физико-математического факультета. Сейчас невозможно представить все те трудности, с которыми столкнулся Федор Иванович: погибли многие белорусские ученые, были разрушены корпуса университета, разграблены библиотеки и лаборатории. Но факультет быстро восстановился благодаря помощи крупнейших научных центров страны и самоотверженному труду сотрудников университета.

В тот период Федор Иванович внимательно следил за развитием физики и сам активно вел исследования, несмотря на большую загруженность преподавательской и административной работой. Он не мыслил своего существования без постоянного творческого научного поиска. Именно в этот период расширился круг научных интересов ученого, его внимание привлекли вопросы электромагнитной теории света в анизотропных и гиротропных средах, а также вопросы кристаллоакустики. Он еще в юные годы осознал огромное значение теории Максвелла не только для технического развития мирового сообщества, но и в воссоздании научной картины мира. При этом проявилась характерная черта научной деятельности Федора Ивановича: возникшая идея могла занимать его долгие годы, пока не находила своего

точного воплощения. Так, на протяжении многих лет его интересовали проблемы оптики анизотропных сред и универсальных релятивистских уравнений. В 1954 г. он блестяще защитил докторскую диссертацию на тему “Инвариантные методы в оптике анизотропных сред” и стал первым доктором физико-математических наук, выросшим в республике.

Научные интересы Ф.И. Федорова были очень широки. Они связаны с наиболее фундаментальными вопросами физики – квантовой теорией поля, теорией гравитации, математической физикой, теорией универсальных релятивистских волновых уравнений, кристаллоакустикой, кристаллооптикой, теорией элементарных частиц. Три последних направления в его интерпретации отличаются нестандартностью подхода, оригинальностью математических идей. Последовательное применение прямых (бескоординатных) методов позволило ему получить ряд новых научных результатов в каждой из этих областей.

Как мы уже отметили, исследованиям Ф.И. Федорова присуща одна исторически глубоко обоснованная черта – ковариантный подход. Его сущность сводится к последовательному практическому использованию идей инвариантности и ковариантности, отражающих на математическом языке свойства симметрии изучаемых физических явлений. В основе этого подхода лежит специальный математический аппарат, обеспечивающий такую формулировку физической теории, при которой отпадает необходимость в использовании каких-либо координат и базисов многомерных пространств, а следовательно, в разложении по компонентам сложных математических величин (векторов, функций, матриц, операторов), применяемых для описания состояний физических систем и их изменений в пространстве и во времени. Оказалось, что ценная физическая информация может извлекаться из основных уравнений путем последовательного учета и использования инвариантных свойств матриц, входящих в эти уравнения.

Благодаря этому основные соотношения теории формулируются в общем, унифицированном виде; они приобретают компактную форму, становятся легко обозримыми и удобными для физической интерпретации на языке современного функционального анализа. Математические операции, преобразования и расчеты, как правило, существенно, а во многих случаях радикально упрощаются и сокращаются. Применение этого метода позволило рассматривать задачи, решение которых, а в ряде случаев и сама постановка, оказывались затрудненными при использовании других методов.

Эта концепция имеет очевидные достоинства. Она восходит к известным работам Гамильтона, Кэли, Грассмана по некоммутативным алгебрам, алгебро-геометрическим исследованиям Ли и знаменитой эрлангенской программе Ф. Клейна. Еще в домаксвелловскую эпоху дифференциальная геометрия обходилась без явного введения декартовых координат, оперируя, по сути, с тензорами (линейными вектор-функциями) и векторами как разновидностями обобщенных чисел. Преимущества такого подхода в физических задачах отмечал Максвелл в предварительной главе своего трактата [1]. Изыскания названных математиков, открывших некоммутативные алгебры, вдохновили Максвелла, Шредингера, Дирака, Эйнштейна, Фока, Янга и Милса на исследование динамик физических полей и во многом предопределили их успех и создание стандартной модели. Ф.И. Федоров стал их последователем во второй половине XX ст. В век “групповой эпидемии” (“Gruppenpest”, L. Biedenharn) широкого применения методов теории групп и полугрупп и связанных с ними динамических аналогий, геометро-

динамики, топологических фаз, зонных фотонных кристаллических структур и нетрадиционных структур и материалов, кватернионной квантовой механики, открытия роли оператора Штурма–Лиувилля в солитонных решениях все более ясным становится тот факт, что ряд подходов Ф.И. Федорова опережал свое время. Во многих научных центрах осознали их значение и стали шире использовать. Этот вывод подтверждается многочисленными ссылками на работы Ф.И. Федорова и его школы и материалами ряда международных конференций.

Долгие годы Федор Иванович занимался вопросами математических и физических проблем оптики анизотропных сред. Общеизвестно, например, его определяющий вклад в развитие феноменологической теории оптической активности в кристаллах. Об этом свидетельствует обзор по оптической активности американского физика Ж.Л. Лоане [2]. В этом обзоре развитие теории оптической активности он делит на три этапа: до Федорова, Федоров и после Федорова.

Академик Ф.И. Федоров заложил основы ковариантной теории электромагнитных и акустических волн в средах, обладающих различными видами анизотропии. Ему принадлежит заслуга в создании оптики прозрачных магнитных кристаллов. Федоров внес большой вклад и в теорию гиротропных (оптически активных) кристаллов. Им найдены ковариантные выражения для тензоров, описывающих гиротропию во всех классах кристаллов.

Существенные результаты были получены и при исследовании отражения и преломления однородных и неоднородных световых волн на границе гиротропных кристаллов, при изучении ряда сложных вопросов распространения излучения в средах с пространственной дисперсией.

В 1958 г. издана монография Ф.И. Федорова “Оптика анизотропных сред”, в которой систематизированы и обобщены основные полученные результаты. За эту работу в 1976 г. академику Ф.И. Федорову была присуждена Государственная премия СССР.

Ф.И. Федоров существенно развил ряд важных разделов общей теории неоднородных волн, т. е. таких затухающих волн, у которых направление фазовой скорости и направление убывания амплитуды не совпадают (1955–1956 гг.). Такие волны важны в приложениях электромагнитной теории и долгое время оставались малоизученными. Введя вектор рефракции m (1952 г.) [3], Ф.И. Федоров существенно упростил решение ряда граничных задач электродинамики и акустики анизотропных сред. В случае неоднородных волн вектор m – комплексный. При этом его вещественная и мнимая части не параллельны. Первая сохраняет смысл вектора нормальной (фазовой) рефракции, а вторая – вектора экстинкции. В процессе развития этой теории был установлен ряд фактов принципиального значения. Было показано, что, например, в изотропных средах электрический и магнитный векторы неоднородной волны всегда поляризованы различно и притом в разных плоскостях. Только в случае круговой поляризации плоскости колебаний векторов электрического и магнитного полей совпадают. В фиксированной точке вектор потока энергии неоднородной волны описывает эллиптический конус, направленный в сторону от фазовой нормали. Показано, что направление среднего потока энергии зависит от поляризации волны при фиксированной нормали, и установлен ряд других необычных свойств неоднородных волн.

В это же время была развита теория неоднородных волн, возникающих при полном отражении на границе прозрачной изотропной среды. Показа-

но, что в общем случае любой поляризации падающей волны средний поток энергии неоднородной волны во второй среде направлен под углом к плоскости падения. По Федорову, следствием этого должно было являться боковое (поперечное) смещение отраженного пучка, приводящее к выходу его из плоскости падения. Этот интересный и тонкий оптический эффект примерно через 10 лет был обнаружен опытным путем и получил название “сдвиг Федорова” – в 1980 г. он был зарегистрирован в качестве научного открытия. В настоящее время теоретическому и экспериментальному изучению этого явления посвящено много работ.

Применение вектора рефракции дало возможность детально исследовать свойства электромагнитных и упругих волн в различных анизотропных и гиротропных средах. С его использованием получены уравнения волновых нормалей и поляризации собственных волн и множество других важных результатов для всех типов симметрии поглощающих, магнитных и гиротропных кристаллов.

Ф.И. Федоров внес огромный вклад в изучение свойств собственных волн (плоских гармонических волн) в различных линейных средах (прозрачных и поглощающих, немагнитных и магнитных, биизотропных, хиральных, бианизотропных).

Позднее (1965–1966 гг.) ковариантный метод описания был обобщен на случай частично поляризованного света с помощью так называемого тензора пучка. Было показано, что вместо параметров Стокса для полной характеристики частично поляризованного света значительно удобнее использовать инварианты тензора пучка [4]. Этот подход позволил чрезвычайно просто решить ряд сложных задач по определению поляризационных характеристик света при рассеянии, люминесценции и т. д. [5, 6].

Для кристаллов любой симметрии Ф.И. Федоров впервые установил уравнение особых направлений, вдоль которых могут распространяться чисто поперечные волны (1965 г.). Был полностью выяснен вопрос о поведении потока энергии упругих волн для всех направлений, включая акустические оси.

В 1965 г. вышла монография Ф.И. Федорова “Теория упругих волн в кристаллах”, в которую вошли полученные результаты. В 1972 г. за работу в этой области он был удостоен Государственной премии БССР.

Вместе со своими учениками на кафедре теоретической физики БГУ Федор Иванович занимался разработкой метода эволюционных операторов [6, 7]. Это позволило распространить метод поверхностных импедансов и характеристических матриц теории изотропных слоистых сред на различные виды анизотропных, бианизотропных, нелинейных, электрооптических, магнитооптических и других сложных материалов [8]. Разработанные операторные методы и полученные общие решения значительно расширили возможности теоретического исследования волновых свойств различных сложных сред, а также анизотропных элементов различных радиотехнических, оптических и акустических систем [9]. Они также используются для разработки новых методов измерения материальных параметров сложных сред.

Использование ковариантного подхода дало возможность Ф.И. Федорову рассмотреть и некоторые вопросы теории элементарных частиц. Им предложена комплексно-векторная параметризация группы Лоренца, придавшая совершенно иной вид релятивистской кинематике, и метод универсальных нелинейных уравнений, разработан общий метод проективных

операторов в теории взаимодействия элементарных частиц (1958 г.), построена теория релятивистских волновых уравнений для частиц с произвольными значениями спина и массы, развит общий метод конечных преобразований геометрической, динамической и квантовой симметрии, дано описание всех четырех типов фундаментальных взаимодействий на единой математической основе – с помощью универсальных нелинейных уравнений, а также получены другие важные результаты.

Ф.И. Федоров – автор ряда работ по общей теории относительности. Им впервые введена и исследована универсальная матричная форма для линейных релятивистских волновых уравнений, которые описывают гравитон – гипотетический квант гравитационного поля (1951 г.), показано, что уравнения гравитации Эйнштейна могут быть сформулированы в виде универсальных матричных уравнений первого порядка с квадратичной нелинейностью (1968 г.).

В последние годы получены поразительные результаты по фотонной проводимости искусственно создаваемых периодических структур (сверхрешеток), для которых оказывается применимой терминология из области электронной проводимости естественных кристаллов (фотонные зонные структуры, зоны Бриллюэна, сингулярности Ван-Хова и др.). Поведение фотонов в средах полностью описывается уравнениями Максвелла для собственных волн. Именно методам и анализу решений максвелловских уравнений для сложных сред посвящены четыре из шести монографий Ф.И. Федорова. Следовательно, можно ожидать, что имеющиеся наработки ковариантной теории электромагнитных и акустических волн в сложных средах будут эффективными в фотонике щелевых структур и в других вопросах современной оптики, радиофизики, электродинамики.

Научные достижения Ф.И. Федорова общепризнаны как у нас в республике, так и за рубежом, они принесли ему глубокое уважение и высокий научный авторитет в мировом научном сообществе. В обиход современной науки вошли такие понятия и процедуры, как федоровский сдвиг, уравнения связи Друде–Борна–Федорова, федоровский тензор пучка, нелинейные уравнения Федорова, федоровская параметризация группы Лоренца и т. д.

Научное наследие академика Ф.И. Федорова очень богато и многогранно. Он автор около 350 научных публикаций, в том числе шести крупных монографий.

В 1968 г. Ф.И. Федорову было присвоено почетное звание “Заслуженный деятель науки БССР”, а в 1978 г. он удостоен звания Героя Социалистического Труда.

Федор Иванович Федоров создал большую научную школу по теоретической физике. Многие его ученики успешно работают в обозначенных им научных направлениях, стали известными учеными и руководителями крупных научных коллективов.

1. Максвелл Дж. Трактат об электричестве и магнетизме: В 2 т. М., 1989. Т. 1, 2.
2. Kenneth O'Loane J. // Chem. Rev. 1980. P. 41.
3. Федоров Ф.И. // Докл. АН СССР. 1952. Т. 84. № 6. С. 1171.
4. Он же // Оптика и спектроскопия. 1956. Т. 1. С. 807.
5. Он же. Оптика анизотропных сред. Мн., 1958.
6. Barkovskii L.M., Borzdov G.N. // Advances in Complex Electromagnetic Materials: 3. Hight Technology / Ed. by A. Priou. Netherlands, 1997. Vol. 28. P. 3.
7. Barkovskii L.M., Borzdov G.N., Fedorov F.I. // J. Mod. Opt. 1990. Vol. 37. P. 85.
8. Barkovskii L.M., Borzdov G.N., Lavrinenko A.V. // J. Phys. A20. 1987. P. 1095.

9. Barkovskii L.M., Borzdov G.N., Zhilko V.V. et al. // J. Phys. D29. 1996. P. 289.
10. Федор Иванович Федоров (библиографический указатель). Ми., 1981.
11. Ковариантные методы в теоретической физике: Сб. науч. тр. Мн., 1997. Вып. 4. С. 5.
12. Богущ А. А. // О развитии физики и физиках Беларуси. (К 70-летию Национальной академии наук Беларуси). Препринт № 718. Мн., 1998.
13. Выдающийся физик-теоретик: Сб. докл. (К 100-летию со дня рождения академика В.А. Фока). Препринт № 717. Мн., 1998. С. 4.
14. Бокуть Б.В., Филиппов В.В. Достижения физической оптики в Белоруссии. Мн., 1979.

Поступила в редакцию 25.06.2001.

УДК 669.0(075.8)

*В.М. АНИЩИК, В.П. ГОЛЬЦЕВ, Н.Н. ДОРОЖКИН, В.М. ДРАКО, С.И. ЖУКОВА,
В.В. ХОДАСЕВИЧ, В.Г. ШЕПЕЛЕВИЧ*

КАФЕДРА ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА: ОТ РОЖДЕНИЯ ДО ЗРЕЛОСТИ

State the history of development of Solid Physics in Byelorussian State University.



Верхний ряд (слева направо):

Драко Валерий Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент. Автор более 70 публикаций, из них одного учебного пособия.

Гольцев Всеволод Павлович – доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией. Опубликовал более 300 научных работ, из них пять монографий. Имеет более 20 авторских свидетельств.

Дорожкин Николай Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент. Автор более 50 публикаций.

Ходасевич Валерий Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент. Автор более 150 публикаций.

Нижний ряд:

Анищик Виктор Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, декан физического факультета. Опубликовал более 200 научных работ, из них четыре монографии. Имеет семь патентов и авторских свидетельств.

Жукова Светлана Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент. Имеет около 100 публикаций.

Шепелевич Василий Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор. Автор более 200 печатных работ, среди которых два учебных пособия.

Область научных интересов коллектива авторов данной статьи – физика твердого тела.

Физика твердого тела по праву занимает одно из ведущих мест в ряду естественных наук. В Белгосуниверситете работы по физике твердого тела

были начаты еще в 1940-е гг. В послевоенный период в связи с интенсивным научно-техническим и экономическим развитием таких приоритетных для Беларуси отраслей народного хозяйства, как машиностроение, авто-тракторостроение, электроника, энергетика, появилась острая необходимость в подготовке специалистов по физике твердого тела и физике полупроводников. Все это привело к созданию в БГУ в 1957 г. специализированной кафедры физики твердого тела и полупроводников.

Организатором и первым руководителем кафедры был академик АН БССР Н.Н. Сирота. В дальнейшем, после создания в 1963 г. Института физики твердого тела и полупроводников Академии наук БССР, основные исследовательские работы были перенесены в коллективы академии, но, следует подчеркнуть, что кафедра физики твердого тела БГУ всегда находилась и находится на передовых позициях развития науки и ее воспитанники являются высококвалифицированными специалистами в области физики твердого тела и физического материаловедения.

В конце 1950-х гг. под руководством Н.Н. Сироты, Н.М. Олехновича, А.У. Шелега были выполнены фундаментальные исследования по вопросам межатомного взаимодействия и распределения электронных плотностей в кристаллах, динамики кристаллической решетки, фазовых превращений, выращивания монокристаллов и др.

В 1960–1970-х гг. на кафедре началось изучение влияния пластической деформации на механические, физико-химические и электрические свойства металлов, полуметаллов и полупроводников (Н.Ф. Кунин, С.А. Кисляков, В.И. Прокошин, В.М. Анищик, С.И. Жукова, В.Г. Шепелевич и др.) [1, 2]. Были установлены закономерности изменения структуры и свойств висмута, сурьмы и их сплавов. Одновременно с этим исследовались свойства селена и его сплавов, данные о которых имели прикладное значение для создания полупроводниковой аппаратуры (А.В. Шибаева и др.).

В это же время на кафедре интенсивно велись исследования по разработке физических основ создания ферритов, обладающих спектром электрических свойств, строго подчиняемых химическому составу, изменение которых коррелировало с замещением одних ионов другими (Н.Н. Сирота, М.И. Данилькевич и др.) [3]. Установлена зависимость механических свойств широкого класса кристаллов от состава, типа решетки, сил связи, дефектности реальных кристаллов и показано, что элестростатическое взаимодействие является основным фактором, определяющим силы сцепления (В.П. Гольцев, М.И. Данилькевич) [4].

В 1960-е гг., как известно, ядерно-физические методы, в частности ионная имплантация, были приняты как основные в твердотельной электронике. Вместе с тем довольно скоро стало ясно, что концентрированные потоки энергии могут с успехом использоваться для фундаментальных и прикладных исследований физики твердого тела. Это потребовало нового подхода к пониманию процессов, протекающих при взаимодействии ионов с металлами.

Практически весь коллектив кафедры с энтузиазмом включился в работу. Возникли творческие группы по разработке относительно новых для коллектива, исключительно интересных и важных для науки направлений, объединяемых в радиационную физику твердого тела. Уже первые работы показали существенное влияние радиационного повреждения твердых тел на изменение их структуры и фазового состава и, как следствие, заметное изменение физико-механических свойств.

В этот период происходило накопление экспериментальных данных и изучение структурно-фазовых превращений при ионной имплантации, разработка физических основ взаимодействия ионных пучков с твердым телом, были выполнены исследования влияния параметров имплантации на физические, химические, электрические свойства твердых тел (Г.А. Гуманский, В.М. Анищик, В.П. Гольцев, С.И. Жукова, В.В. Ходасевич, В.В. Углов, В.В. Понарядов, А.Ф. Сыщенко и др.), исследованы процессы диффузии и фазообразования в тонких пленках при ионной имплантации (Э.М. Шпилевский, Д.П. Горбачевский, Л.В. Баран и др.) [5–20]. При этом было установлено, что механические напряжения в облучаемых пленках зависят от дозы имплантации, типа и энергии внедряемых ионов, места расположения максимума концентрации внедренных ионов относительно границы раздела слоев [21, 22].

Рассмотрены вклады различных механизмов массопереноса, обусловленных ионной имплантацией. Выполненные оценки показывают, что наибольший вклад в диффузионные потоки при имплантации с разными режимами вносит баллистический механизм (70–80 %). Потoki атомов в процессе имплантации, обусловленные другими механизмами, не столь значительны [23].

Кинетика образования соединений в переходных металлах (ванадий, железо, молибден, вольфрам), имплантированных ионами бора, углерода, азота, исследовалась в работах [5, 6], в результате было установлено, что размеры нитридных фаз ($\epsilon\text{-Fe}_3\text{N}$, $\gamma\text{-Mo}_2\text{N}$), образовавшихся в железе и молибдене, составляют 30–70 нм, а карбидных ($\epsilon\text{-Fe}_3\text{C}$) – 15–25 нм. В случае молибдена наблюдается образование следующего ряда боридов: $\text{Mo} \rightarrow \text{MoB} (\text{Mo}_2\text{B}) \rightarrow \text{Mo}_2\text{B}_5 + \text{MoB}_2$. При имплантации вольфрама была обнаружена следующая схема образования боридов: $\text{W} \rightarrow \alpha\text{-WB} \rightarrow \text{W}_2\text{B}_5$. Для ванадия этот ряд выглядит таким образом: $\text{V} \rightarrow \text{VB} \rightarrow \text{VB}_2$.

Интересные результаты получены в работах, выполненных на монокристаллических материалах и тонких пленках [7–9]. Так, при исследовании влияния внешних воздействий (радиации, ионной бомбардировки, пластической деформации и др.) на структуру и свойства кристаллов висмута показано [10–12], что легирование висмута элементами различной химической активности приводит к существенному изменению процесса ползучести. При облучении собственными ионами, ионами олова и сурьмы сопротивление ползучести имплантированных кристаллов значительно возрастает. Причем имплантация примесных ионов вызывает гораздо больший эффект – скорость ползучести кристаллов, облученных сурьмой, уменьшается более чем в 20 раз [12].

Имплантация ионов углерода в образцы массивного алюминия ведет к формированию кристаллических выделений карбида алюминия – Al_4C_3 , причем его образование зафиксировано при дозе облучения $2 \cdot 10^{17}$ ион/см² и энергии ионов 20 кэВ. Увеличение дозы моноимплантации ионов углерода с энергией 20 кэВ ведет к уменьшению среднего проективного пробега ионов с 65 нм ($2 \cdot 10^{17}$ ион/см²) до 43 нм ($4 \cdot 10^{17}$ ион/см²), что обусловлено дополнительным торможением на ранее имплантированных атомах углерода. Слои, которые создаются методом ионной имплантации, обычно имеют толщину гораздо меньше 1 мкм и в большинстве случаев в промышленных условиях изнашиваются уже на первых этапах работы. В этой связи были предприняты усилия по развитию ионно-лучевых методов и возможности

создания на этой основе новых упрочняющих технологий для промышленного применения.

С начала 1980-х гг. на кафедре стало интенсивно развиваться научно-прикладное направление по модификации структуры и свойств твердых тел с использованием ионных пучков. На первом этапе были разработаны и внедрены в производство методы модифицирования твердых сплавов ионными пучками (В.М. Анищик, В.В. Понарядов). Было установлено, что имплантация ионов бора приводит к увеличению износостойкости инструмента, изготовленного из быстрорежущей стали Р6М5, в 2,5–3 раза по сравнению с неимплантированной [13–15]. На втором этапе использовался метод, основанный на высокоинтенсивной ионной имплантации (при плотностях тока до 10 mA/cm^2) и повышенных температурах, которые значительно уменьшают время обработки и позволяют включить механизмы диффузии, способствующие проникновению имплантируемой примеси на десятки микрометров в глубь мишени. Высокоинтенсивная ионная имплантация образцов быстрорежущей стали Р6М5 ионами азота и бора проводилась в режиме моно- и двойной имплантации, модифицированный слой достигал толщины от 20 до 40 мкм [16]. Третий этап развития методов модификации поверхностных слоев металлов, направленный на расширение путей использования их на практике, связан с увеличением энергии имплантируемых ионов. Разработка, создание и ввод в эксплуатацию ускорительного комплекса в Объединенном институте ядерных исследований (ОИЯИ, г. Дубна) позволяют получать ускоренные ионы практически любой массы с энергиями от единиц до несколько сотен МэВ. Пробег таких ионов достигают сотен микрон. Совместно с сотрудниками лаборатории ядерных реакций ОИЯИ было обнаружено исключительно эффективное упрочнение металлов и сплавов [17, 18].

Перспективным и относительно новым методом поверхностной модификации инструментальных материалов является использование импульсной плазменно-иммерсионной ионной имплантации, который позволяет создавать ионные потоки с плотностью до 10^{11} ион/см², глубина проникновения внедряемых атомов при этом достигает десятков микромолей. Эффект при использовании этого метода состоит в том, что в результате имплантации азота в быстрорежущую сталь при ускоряющем напряжении 40 кВ с частотой импульсов 800 Гц, температуре образцов 380 °С и дозе облучения $8 \cdot 10^{18} \text{ N}^+/\text{cm}^2$ в поверхностном слое (0,1 мкм) происходит полное превращение мартенсита быстрорежущей стали в фазу $\epsilon\text{-(Fe, M)}_{2+x}\text{N}$, где $M=W, Mo, Cr, V, 0 < x < 1$ [19].

В течение последних лет на кафедре физики твердого тела выполнен значительный объем исследований по обеспечению надежной и эффективной модификации поверхностных слоев путем создания ионно-плазменных покрытий со структурой химических соединений переходных металлов с азотом, углеродом, бором двойных (Ti–N, Zr–N, Mo–N) и тройных (Ti–Zr–N, Ti–Mo–N и др.) систем, используя предварительную или последующую обработку ионным пучком, а также методы совмещения плазменных потоков, содержащих соответственно ионы Ni, Mo, Zr и др. (В.П. Гольцев, В.В. Ходасевич, В.М. Драко, М.В. Гольцев, В.В. Чаевский, И.А. Солодухин и др.).

Систематическое изучение комбинированного ионно-плазменного метода упрочнения поверхности показало, что в химических соединениях пере-

ходных металлов с азотом в виде тройных систем (Ti–Zr–N, Ti–Cr–N, Ti–Mo–N и др.), полученных методом совмещения плазменных потоков, содержащих соответственно ионы титана, хрома, молибдена, в зависимости от ионного тока (концентрационный эффект), энергии ионов (активационный эффект) и давления реакционного газа – азота (стехиометрический эффект) формируется поверхностный слой толщиной 5–15 мкм со структурой в основном твердого раствора соответствующих нитридов, например TiN–ZrN, TiN–CrN, TiN–Mo₂N, ZrN–CrN и др. [24–28].

Было также показано, что при обработке высокоэнергетическими ионами поверхности материала перед нанесением карбонитридного покрытия или после его нанесения произошло заметное увеличение микротвердости. В этом случае имплантация ионов бора или аргона с энергиями 75 и 60 кэВ повысила твердость на 40 %. Как было установлено, предварительная имплантация ионами аргона стали У8А приводит к увеличению адгезии осаждаемых на подложку покрытий металлического Ti и TiN, что связывается с изменением условий зарождения и роста покрытий вследствие возникновения неоднородных упругих напряжений. Для покрытия TiN при максимальной дозе предварительной имплантации $1 \cdot 10^{17}$ ион/см² величина критической нагрузки отслаивания составляет 11,3 Н, что в два раза выше, чем для покрытия, осажженного без предварительной имплантации [29, 30].

Актуальность и практическая ценность ионно-плазменного метода формирования стабильных износ- и коррозионностойких покрытий и значительный вклад сотрудников кафедры в развитие этого направления явились основанием для присуждения Государственной премии БССР в области науки и техники за 1986 г. профессору кафедры В.П. Гольцеву за работу «Разработка и создание новых технологических процессов и оборудования для нанесения тонкопленочных покрытий методом ионно-плазменной обработки и их широкое внедрение в народное хозяйство республики».

Известно, что, например, в процессе внешних воздействий на металлы, помимо образования радиационных дефектов, имеют место структурные и фазовые изменения. Поскольку эти изменения происходят в неравновесных условиях, когда атомная и электронная подсистемы возбуждены, появляется возможность получения материалов с уникальными свойствами. К таким задачам следует отнести изучение термодинамически неравновесных процессов, лежащих в основе синтеза аморфных или метастабильных структур. Основными методами для формирования подобных структур приняты: потоки концентрированной энергии и сверхбыстрая кристаллизация расплава [30, 31]. Исследование характера и особенностей изменений в металлах при различных условиях и режимах воздействий, обеспечивающих реализацию тех или иных структурно-фазовых состояний, дает возможность прогнозировать, а также целенаправленно управлять свойствами материалов.

При исследовании условий синтеза износостойких покрытий на основе химических соединений было обнаружено, что сплавы системы Zr–Cr–N, содержащие до 36 ат. % Cr, формируются в виде твердого раствора $Ti_xCr_{(1-x)}N$, при увеличении содержания Cr до 55 ат. % – дифракционные максимумы размываются и при содержании хрома более 60 ат. % – дифракционные максимумы (200) и (400) полностью исчезают, и материал переходит в рентгеноаморфное состояние. Микротвердость этих структур весьма высока и составляет 40 ГПа, что в 2–2,5 раза выше микротвердости мононитридов. Сплавы демонстрируют и высокую износостойкость. И наконец,

отжиг до температуры 1300 К сохраняет аморфную структуру и механические свойства на уровне исходных [26, 30]. Процесс аморфизации сплава Ti-Cr-N объясняется с позиций кластерного механизма.

В дальнейшем для выяснения влияния химической природы имплантируемых ионов на процесс образования аморфной фазы в металлах исследованы микроструктура и элементный состав пленок сплава Fe-Ni, имплантированных различными дозами ионов фосфора. Было установлено, что аморфизация сплава достигается при дозе $1,7 \cdot 10^{17}$ ион/см², соответствующей концентрации фосфора 20 ат. %, что близко к его содержанию в точке глубокой эвтектики на фазовых диаграммах систем Fe-P и Ni-P. Предложена модель аморфизации, основанная на предположении, что аморфизация возможна после достижения необходимой концентрации фосфора, при которой формируется эвтектика, состоящая из дисперсной смеси зерен сплава Fe-Ni и фосфида (Fe, Ni)₃P. Энергии, выделяемой при торможении ионов в такой легкоплавкой системе, достаточно для образования расплавленных областей. Происходит закалка аморфной фазы, а ее количество быстро растет при дальнейшем облучении вплоть до полной аморфизации материала.

В аморфных системах существует корреляция ближнего порядка с параметрами имплантации. На основе исследований ближнего порядка в системах Fe-B и Fe-B-N, полученных последовательной имплантацией бора и азота в пленки железа, обнаружено, что аморфные фазы Fe-B и Fe-B-N либо характеризуются магнитным упорядочением, либо являются парамагнитными [32]. Пороговые концентрации бора и азота, необходимые для формирования парамагнитных фаз (FeB)_n и Fe(B,N)_n, составляют ≈ 28 ат. % бора и ≈ 30 ат. % бора и азота в сумме соответственно.

При формировании углеродных (a-C) и композиционных покрытий с дополнительным легированием углеродного покрытия тугоплавким металлом (цирконий, тантал, титан, ниобий, вольфрам) на мишень одновременно направлялся поток нейтральных атомов и ионов углерода и металла при подаче отрицательного потенциала смещения до 30 кВ.

С помощью просвечивающей электронной микроскопии установлено, что углеродные (a-C) и карбонитридные (a-C, N) покрытия имеют аморфную структуру. С увеличением потенциала смещения мишени до 5–20 кВ износостойкость покрытия на стали возрастает более чем в 10 раз, коэффициент трения не превышает значения 0,1.

Одновременное использование катодно-вакуумной дуги Zr и C позволяет формировать a-(C-Zr) покрытие толщиной до 0,2 мкм с содержанием металла до 18 ат. %. Твердость композиционного покрытия при наноиндентировании 16 ГПа, коэффициент трения имеет значение менее 0,1, а износостойкость более чем в 2 раза превышает аналогичную характеристику a-C покрытия [33].

При исследовании полуметаллов, к числу которых относятся висмут и сурьма, установлено, что фольги данных материалов толщиной 20–80 мкм, полученные сверхбыстрой кристаллизацией (скорость охлаждения $> 10^7$ К/с), имеют микрокристаллическую структуру. В фольгах висмута и в его сплавах с сурьмой формируется столбчатая зеренная структура. Средний размер зерна в фольгах висмута и сурьмы равен 30 мкм и 8 мкм соответственно. Легирование полуметаллов элементами II–IV и VI групп периодической системы элементов приводит к уменьшению среднего размера зерна до 2–5 мкм.

Из-за слоистой структуры полуметаллы склонны к образованию текстуры. Так, в случае получения тонких пленок при термическом напылении в вакууме при малых скоростях роста формируется энергетически выгодная текстура (0001). В быстрозатвердевших фольгах наблюдается четко выраженная текстура (1012).

Среди всех сплавов полуметаллов наиболее важное научное и практическое значение имеют сплавы висмут-сурьма, содержащие 8–15 ат. % Sb. При малых и средних скоростях кристаллизации данных сплавов образуется дендритная структура, ухудшающая их кинетические свойства [34]. При сверхбыстрой кристаллизации в фольгах наблюдается однородное распределение компонентов, что имеет важное практическое значение. Установлено, что абсолютное значение дифференциальной термо-эдс быстрозатвердевших фольг сплава Bi-12 ат. % Sb превосходит компоненты тензора дифференциальной термо-эдс монокристалла.

Одним из способов изменения физических свойств полуметаллов является их легирование электрически активными элементами. Впервые было установлено, что сера является донором, а германий, индий и галлий – акцепторами, цинк и кадмий – нейтральными легирующими элементами в висмуте и сплавах висмут-сурьма, содержащих до 15 ат. % Sb. Также впервые установлено, что алюминий, галлий и индий являются акцепторами, а цинк и кадмий – донорами в сурьме [35–37].

Быстрозатвердевшие фольги полуметаллов находятся в неустойчивом состоянии. При нагреве происходит изменение структуры и как следствие – их свойств. Отжиг фольг висмута, сплавов висмут-сурьма способствует протеканию собирательной рекристаллизации.

В бинарных и тройных сплавах на основе полуметаллов, полученных сверхбыстрым охлаждением и являющихся пересыщенными твердыми растворами, при нагреве происходит их распад. Температура начала распада пересыщенного твердого раствора зависит от легирующего элемента и его концентрации.

Исследования быстрозатвердевших фольг халькогенидов полуметаллов Bi_2Te_3 и Sb_2Te_3 показало, что они имеют микрокристаллическую структуру, при этом форма зерен не является равноосной. В фольгах Bi_2Te_3 наблюдается текстура (2025), а в фольгах Sb_2Te_3 – (2025) и (1120). Проведены исследования структуры и электрических свойств тройных соединений $(\text{Bi-Sb})_2\text{Te}_3$ в зависимости от условий получения и последующего отжига. В результате были определены оптимальный химический состав и условия термической обработки быстрозатвердевших фольг с целью их использования в качестве термоэлектрических материалов. Также методом СБЗР получены и исследованы соединения CdSb и InSb [37, 38].

Сурьма и висмут входят в состав инконгруэнтных соединений Bi_2Te_2 , Bi_2Te , Sb_2Te_2 , Sb_2Te , ZnSb , SnSb . Из-за сильного переохлаждения жидкой фазы происходит вырождение перитектической реакции, т. е. указанные фазы выделяются непосредственно из жидкости [39].

Работы, начатые в 1960-е гг., получили развитие при создании твердотельных датчиков на эффекте Холла на основе сплавов полуметаллов Bi-Sb и гетероэпитаксиальных структур (В.И. Прокошин, В.М. Анищик, В.Г. Шепелевич, В.А. Ярмолович, С.В. Гусакова, И.И. Васильев). Комплекс датчиков, включающий тактильные, датчики перемещения, скорости, частоты вращения и другие, с успехом используется для адаптации промышленных роботов.

Теоретические исследования электронного строения твердых тел позволяют установить взаимосвязь состава и структуры с физическими свойствами материалов и поэтому являются одними из важнейших в физике твердого тела. На кафедре с использованием методов зонной теории выполнен ряд работ по расчету зонной структуры и физических свойств боридов переходных металлов (В.М. Анищик, Н.Н. Дорожкин) [40–42]. Впервые методом ЛМТО (линейные МТ-орбитали) были выполнены самосогласованные зонные расчеты для диборидов переходных металлов, что позволило оценить зарядовый перенос в этих соединениях, рассчитать распределение электронной плотности и дать качественную интерпретацию эффектов химического связывания. Было показано, что химическая связь в диборидах переходных металлов носит смешанный металлоковалентный характер с преобладанием ковалентных связей В–В и заметным вкладом связей Ме–В.

Совместно с сотрудниками ИФТТ и ПП Академии наук Беларуси (Е.М. Гололобов, Б.В. Новыш) выполнены расчеты структурных амплитуд и угловых компонент потенциала электрон-ионного взаимодействия высокотемпературного сверхпроводника $YBa_2Cu_3O_7$ [43, 44]. Развита новая методика расчета матричных элементов электрон-фононного взаимодействия в приближении жесткого сдвига электронной плотности [45] и предложена интерполяционная схема, позволяющая существенно ускорить процесс их вычисления [46, 47].

Вместе с сотрудниками БГУИР рассчитана электронная структура и физические свойства ряда полупроводниковых силицидов, обладающих интересными оптическими характеристиками [48, 49].

Метод ЛПСО (линеаризованных присоединенных слэтеровских орбиталей) обобщен для случая электронной структуры трехмерных идеальных твердых тел с любой кристаллической структурой и разработаны компьютерные программы, а также выполнен расчет электронной структуры твердофазных покрытий (Ti-Zr)N (В.М. Анищик, Н.Н. Дорожкин, Н.Н. Якутович) [50].

Дальнейшая работа в области исследования электронного строения твердых тел связана с развитием единого подхода к исследованию электронного строения идеальных и неидеальных твердых тел с учетом реального пространственного распределения электронной плотности и потенциала, одинаково пригодного для трех- и двумерных материалов с произвольной кристаллической структурой и сильными электронными корреляциями.

1. Кунин Н.Ф., Анищик В.М., Прокошин В.И. // Диффузия в металлах и сплавах. Тула, 1968. С. 422.
2. Драко В.М., Ходасевич В.В. // Изв. вузов. Физика. 1970. № 10. С. 117.
3. Данилькевич М.И., Сирота Н.Н. // Физические свойства ферритов. Мн., 1967. С. 63.
4. Гольцев В.П., Данилькевич М.И. // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 10. С. 907.
5. Drako V.M., Gumanskij G.A. // Radiat. Eff. 1982. Vol. 66. № 1-2. P. 101.
6. Syshchenko A.F., Anishchik V.M., Komarov F.F. // Ibid. 1986. Vol. 97. № 1-2. P. 111.
7. Sood P.R., Anishchik V.M., Gumanskij G.A. // Thin Solid Films. 1977. Vol. 43. L7–L9.
8. Анищик В.М., Лукашов А.А., Понарядов В.В., Романовская Л.Н. // Взаимодействие атомных частиц с твердым телом: Материалы VIII Всесоюз. конф. М., 1987. № 1. С. 145.
9. Анищик В.М., Гуманский Г.А., Углов В.В. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Физика радиац. повреждений и радиац. материаловедение. 1981. Вып. 2 (16). С. 62.

10. Анишик В.М., Жукова С.И. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-энерг. наук. 1982. № 1. С. 34.
11. Goltsev V.P., Zhukova S.I., Anishchik V.M. // Phys. Stat. Sol. (a). 1986. Vol. 96. P. 130.
12. Zhukova S.I., Goltsev V.P., Kasko I.V. // EPM 89 Energy Pulse and Particle Beam Modification of Material 3rd In. Conf. Dresden, 1989. Vol. 13. P. 284.
13. Анишик В.М., Понарядов В.В., Холмецкий А.Л., Чудаков В.А. // Тез. докл. XIII Всесоюз. совещ. по физике взаимозаряж. частиц с кристаллами. М., 1983. С. 100.
14. Анишик В.М., Дмитриев А.И., Елисеева Л.Б. и др. Структурные изменения в металлах при ионном облучении. Деп. в ВИНТИ 21.12.85, № 8893-В.
15. Анишик В.М., Гурачевский В.Л., Машлан М. и др. // Вестн. Белорус. ун-та им. В.И. Ленина. Сер. 1. 1986. № 2. С. 3.
16. Углов В.В., Русальский Д.П., Холмецкий А.Л. и др. // Перспективные материалы. 1999. № 4. С. 83.
17. Гольцев М.В., Хофман А. // Радиационное упрочнение ОЦК ГЦК-металлов при облучении тяжелыми высокоэнергетическими ионами: Тр. междунар. конф. «Взаимодействие излучений с твердым телом»: В 2 ч. Мн., 1999. Ч. 2. С. 42.
18. Анишик В.М., Жукова С.И., Васильева Л.А. // Физика и химия обработки материалов. 1998. № 1. С. 5.
19. Uglov V.V., Kholmetskii A.L., Kuleshov A.K. et al. // Nuclear Instruments and Methods. 1999. B148. P. 841.
20. Шпилевский Э.М., Горбачевский Д.А., Андреев М.А., Максименко В.Н. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. наук. 1991. № 3. С. 69.
21. Шпилевский Э.М., Баран Л.В. // Неорганические материалы. 1999. Т. 35. № 1. С. 1337.
22. Они же // Физика и химия обработки материалов. 1998. № 6. С. 15.
23. Шпилевский Э.М., Курило И.Н. // Тез. докл. XXII совещ. по физике взаимодействия заряж. частиц с кристаллами. М., 1992. С. 95.
24. Киселевский Л.И., Гольцев М.В., Ходасевич В.В. и др. // Материалы IX Всесоюз. конф. «Взаимодействие атомных частиц с твердым телом». М., 1989. С. 288.
25. Гольцев В.П., Болтушкин В.И., Гольцев М.В. и др. // Тр. междунар. конф. «Взаимодействие излучений с твердым телом». Мн., 1995. С. 745.
26. Гольцев М.В. // Вестн. АН БССР. Сер. физ.-техн. наук. 1988. № 5. С. 44.
27. Ходасевич В.В. // Взаимодействие излучения с твердым телом. Мн., 1997. С. 233.
28. Гольцев В.П., Драко В.М., Андреев М.А. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-энерг. наук. 1988. № 1. С. 27.
29. Ходасевич В.В., Солодухин И.А., Углов В.В. и др. // Вакуумная техника и технология. 1977. Т. 7. № 2. С. 3.
30. Гольцев В.Н., Драко В.М. // Тр. междунар. конф. «Взаимодействие излучений с твердым телом». Мн., 1997. С. 205.
31. Шепелевич В.Г. // Тр. конф. «Взаимодействие излучений с твердым телом». Мн., 1997. С. 239.
32. Uglov V.V., Fedotova J.A., Jagelski J. et al. // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. 1999. B159. P. 218.
33. Uglov V.V., Kuleshov A.K., Rusalski D.P. et al. // Surf. Coat. Technol. 2000. Vol. 128–129. P. 150.
34. Шепелевич В.Г. // Кристаллография. 1991. Т. 36. № 1. С. 238.
35. Шепелевич В.Г., Гречанников Э.Е. // Неорганические материалы. 2000. Т. 36. № 11. С. 1287.
36. Шепелевич В.Г. // Физика твердого тела. 1991. Т. 33. С. 10.
37. Idem // Physica status solidi (a). 1992. Vol. 132. № 2. P. K85–K87.
38. Он же // Кристаллография. 1997. Т. 42. № 3. С. 538.
39. Шепелевич В.Г., Кухаренко Е.Л. // Неорганические материалы. 2000. Т. 36. № 2. С. 185.
40. Анишик В.М., Дорожкин Н.Н. // Докл. АН БССР. 1989. Т. XXXIII. № 2. С. 121.
41. Anishchik V.M., Dorozhkin N.N. // Phys. Stat. Sol. 1990. B. 160. P. 173.
42. Анишик В.М., Дорожкин Н.Н., Жукова С.И. // Вестн. АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1994. № 3. С. 84.
43. Гололобов Е.М., Дорожкин Н.Н., Новыш Б.В. // ФТТ. 1993. Т. 35. № 7. С. 2371.
44. Новыш Б.В., Дорожкин Н.Н., Гололобов Е.М., Анишик В.М. // Вестн. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1999. № 3. С. 53.

45. Novysh B.V., Gololobov E.M., Dorozhkin N.N. // Phys. Stat. Sol. (B). 1996. Vol. 195. P. 209.
46. Новыш Б.В., Дорожкин Н.Н. // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1999. № 4. С. 98.
47. Filonov A.B., Tralle I.E., Dorozhkin N.N. et al. // Phys. Stat. Sol. (B). 1994. 186. P. 209.
48. Filonov A.B., Migas D.B., Shaposhnikov V.L. et al. // J. of Applied Physics. 1996. Vol. 79. P. 7708.
49. Filonov A.B., Migas D.B., Shaposhnikov V.L. et al. // Physical Review B. 1999. Vol. 60. № 24. P. 16494.
50. Якутович Н.Г., Дорожкин Н.Н., Анищик В.М., Новыш Б.В. // ФТТ. 2000. Т. 42. Вып. 11. С. 1943.

Поступила в редакцию 11.07.2001.

УДК 535.37

А.Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ, В.И. ПОПЕЧИЦ

РАЗВИТИЕ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ В ИНСТИТУТЕ ПРИКЛАДНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ ИМ. А.Н. СЕВЧЕНКО БЕЛГОСУНИВЕРСИТЕТА

Data on a history of organization and development of A.N. Sevchenko's institute of applied physical problems of Byelorussian State University are given. The basic results of institute collective research activity are submitted.



Чернявский Александр Федорович – академик НАН Беларуси, доктор технических наук, профессор, директор НИИ НФП им. А.Н. Севченко БГУ, заведующий кафедрой интеллектуальных систем, заслуженный деятель науки и техники БССР, лауреат Государственной премии СССР 1991 г., Государственной премии БССР 1986 г., премии Совета Министров СССР 1984 г. Основное направление научной деятельности – разработка теории, аппаратных и программных средств параллельно-конвейерной обработки измерительной информации на основе минимально-избыточной модулярной компьютерной арифметики. Автор более 250 научных работ, в том числе 7 монографий.



Попечиц Владимир Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент, ученый секретарь НИИ ПФП им. А.Н. Севченко. Работает в области молекулярной спектроскопии и люминесценции. Автор более 80 научных работ.

Научно-исследовательское учреждение "Институт прикладных физических проблем им. А.Н. Севченко" Белорусского государственного университета основан 1 марта 1971 г. на базе проблемной лаборатории полупроводниковой техники, научно-исследовательских лабораторий ядерной физики и применения атомной энергии, спектроскопии, экспериментальной физики и физической электроники, а также научно-исследовательских групп других лабораторий БГУ, соответствующих профилю института.

Организаторами и первыми руководителями института были видные белорусские ученые – Герой Социалистического Труда, заслуженный деятель науки БССР, академик АН БССР, ректор Белгосуниверситета, затем первый директор института Антон Никифорович Севченко и заслуженный деятель науки БССР, академик АН БССР, проректор по научной работе Белгосуниверситета Леонид Викентьевич Володько. Вдохновенный труд этих замеча-

тельных людей и созданная ими авторитетная школа ученых-физиков определили становление и всестороннее развитие в институте основных направлений научных исследований в области физической оптики, спектроскопии и люминесценции, физики твердого тела и полупроводников, радиофизики, автоматизации научных исследований и электронного приборостроения, информатики.

Академик АН БССР А.Н. Севченко был директором института со времени его основания – 1 марта 1971 г. до своей кончины – 26 сентября 1978 г. Вторым директором института является заслуженный деятель науки и техники БССР, академик НАН Беларуси А.Ф. Чернявский – с 12 февраля 1979 г. по настоящее время.

В целях увековечения памяти академика АН БССР А.Н. Севченко постановлением Совета Министров БССР от 2 августа 1979 г. № 236 Научно-исследовательскому институту прикладных физических проблем Белгосуниверситета присвоено имя А.Н. Севченко.

Приказом ректора БГУ от 25 октября 1971 г. была утверждена первая структура НИИ прикладных физических проблем, созданы первые отделы и лаборатории, назначены их руководители:

– отдел электромагнитных явлений (руководитель – академик АН БССР, профессор А.Н. Севченко) включал 3 лаборатории – люминесценции (руководитель – профессор Д.С. Умрейко), оптики конденсированных сред (профессор Л.В. Володько), нелинейной оптики (кандидат физико-математических наук А.Н. Хапалюк);

– отдел физики и техники полупроводников (профессор В.Д. Ткачев), включавший 4 лаборатории – оптических свойств полупроводников (кандидат физико-математических наук В.М. Ломако), радиационной физики полупроводников (кандидат физико-математических наук А.В. Юхневич), элионики (доцент Г.А. Гуманский), контактных явлений (профессор И.Г. Некрашевич);

– отдел электронных систем включал 4 лаборатории – полупроводниковой электроники (кандидат физико-математических наук А.Ф. Чернявский), электронных методов экспериментальной физики (кандидат физико-математических наук И.З. Рутковский), информационно-измерительных систем (кандидат технических наук А.В. Прокуров), электронно-вычислительных систем (доцент А.И. Оранский);

– общеинститутская лаборатория теоретической физики (кандидат физико-математических наук Л.И. Комаров).

На момент открытия в штате института насчитывалось 195 человек (из них 2 доктора и 10 кандидатов наук), в 1972 г. – 250 человек (2 доктора, 13 кандидатов наук).

В 2001 г. в составе института находятся 27 лабораторий, тематически объединенных в 4 отдела: оптики, физики твердого тела и полупроводников, радиофизики, информатики; а также экспериментальное производство; библиотека; ряд других вспомогательных подразделений и служб. Численность сотрудников составляет 320 человек (из них 15 докторов и 60 кандидатов наук).

Институт является базой Белгосуниверситета для выполнения научно-исследовательских работ, подготовки и повышения квалификации научно-педагогических кадров в области физики, радиофизики, информатики, научного приборостроения, электроники, акустики и химической технологии. Ежегодно к научно-исследовательской работе, написанию курсовых и ди-

пломных работ, производственной практике привлекаются более 120 студентов и аспирантов БГУ и других вузов республики. В учебном процессе каждый год участвуют более 70 сотрудников института.

Основные научные направления:

- исследования в области физики низкотемпературной плазмы;
- изучение воздействия ионизирующих излучений на материалы и приборы электронной техники и некоторых вопросов физических явлений в твердом теле;
- теоретические и экспериментальные исследования в области распространения ультразвука в неоднородных средах;
- спектроскопия и люминесценция конденсированных систем (включая нелинейные явления) и разработка новых принципов создания спектральной аппаратуры;
- теоретические и экспериментальные работы по созданию логических элементов и систем, а также синтез на их основе электронно-вычислительных устройств.

За 30 лет сотрудниками института получены Государственная премия СССР (1991 г.), три Государственные премии БССР (1974, 1982 и 1986 гг.), три Государственные премии Республики Беларусь (1992, 1994, 1998 гг.), премия Совета Министров СССР (1984 г.), премия Совета Министров БССР (1990 г.), премия Совета Министров Республики Беларусь (1991 г.), три премии ЛКСМБ; защищено 35 докторских и 232 кандидатских диссертаций; опубликовано более 110 монографий, учебников, учебных пособий, справочников и сборников статей, более 14 000 научных статей; получено 1250 авторских свидетельств на изобретения и патентов; внедрено в производство свыше 1100 разработок. Сотрудники института неоднократно награждались медалями ВДНХ и других выставок.

В 1980, 1981, 1983, 1988, 1989 гг. институт занимал первое место и был награжден переходящим Красным знаменем в социалистическом соревновании среди НИИ системы Минвуза СССР, в 1976, 1978, 1979, 1982, 1986, 1987 гг. – награжден Почетными грамотами Минвуза СССР и ЦК профсоюза работников просвещения, высшей школы, научных учреждений.

В институте созданы и работают четыре крупные научные школы в области оптики, спектроскопии и люминесценции; физики твердого тела и полупроводников; радиофизики; информатики.

Оптическую научную школу возглавляют доктора физико-математических наук, профессора Д.С. Умрейко, А.А. Минько, Е.С. Воропай, А.П. Халпалюк, М.А. Ксенофонтов, Б.Б. Виленциц. В области оптики, спектроскопии и люминесценции разработаны методы и средства спектрально-структурного анализа различных веществ, материалов и плазмы, на основе которых осуществлен целенаправленный синтез новых неорганических и органических соединений (жидкокристаллические материалы для устройств отображения информации и управления, активные и пассивные лазерные среды, оптические среды для записи информации, негативные и позитивные фоторезисты, материалы цветокодирования и цветопередачи информации, пожаровзрывобезопасные теплоизоляционные полимерные материалы, лекарственные препараты радиопротекторного действия, индикаторы для анализа биологических жидкостей человека, красители для онкотерапии, алмазоподобные пленки и др.). Созданы методы и приборы экспресс-диагностики концентрации, температуры и скорости газовых потоков, пылевых и дымовых выбросов; определения содержания тяжелых металлов в раз-

личных средах; дистанционной фотометрии для решения экологических проблем; определения содержания радона в воздухе, не имеющие аналогов в мире, которые соответствуют Международным правилам и ГОСТам, обладают высокой метрологической надежностью. Налажен серийный выпуск таких приборов. В результате исследования температурной зависимости спектров ураниловых соединений разработана серия люминесцентных неконтактных термодатчиков криогенных температур и создана установка для их калибровки.

Сотрудники лаборатории оптики конденсированных сред А.А. Минько, В.С. Безбородов, С.Е. Яковенко, А.З. Абдулин, В.А. Коновалов, В.И. Лапаник, А.А. Муравский, Н.Р. Последович, В.С. Рачкевич, В.В. Ржеусский получили премию Совета Министров БССР в 1990 г. за работу "Синтез, физико-химические исследования новых жидкокристаллических материалов. Разработка технологий создания жидкокристаллических устройств отображения информации и их практическое применение".

За работу "Разработка физических основ градиентно-оптической диагностики газовых и аэрозольных струй (потоков), создание и внедрение измерительной аппаратуры для контроля дымовых выбросов в атмосферу промышленных производств и технических средств" сотрудникам лаборатории люминесценции Д.С. Умрейко, Б.Б. Виленцицу и А.А. Ждановскому присуждена премия Совета Министров Республики Беларусь за 1991 г.

Заведующему лабораторией спектроскопии Е.С. Воропаю (совместно с сотрудниками Белгосуниверситета и Института физики НАН Беларуси) за цикл работ "Флуктуации микроструктуры и фотофизика растворов сложных органических соединений" присуждена Государственная премия Республики Беларусь в области науки и техники за 1994 г.

Научной школой в области физики твердого тела и полупроводников, возглавляемой член-корреспондентом НАН Беларуси, доктором физико-математических наук, профессором Ф.Ф. Комаровым и доктором физико-математических наук П.В. Кучинским, разработана теория и созданы методы ионно-лучевого легирования полупроводников, металлов и других материалов. Создана система сквозного компьютерного моделирования технологий микро- и наноэлектроники. Исследованы процессы дефектообразования в кристаллах кремния, арсенида галлия и фосфида индия. Разработаны принципы управления антикоррозионными и каталитическими свойствами материалов, новые методы получения сверхтвердых и износостойких материалов, новые технологии создания изделий электронной техники с помощью ионных пучков. Впервые в мире предложены и реализованы способы управления пучками рентгеновских и гамма-квантов, созданы элементы и системы оптики жестких квантов. Разработаны технологические процессы выращивания крупных синтетических алмазов инструментального и приборного назначения. Созданы новые изделия на основе природных и синтетических алмазов для использования в машиностроении и электронной технике.

Заведующий лабораторией элионики Ф.Ф. Комаров в 1998 г. стал лауреатом Государственной премии Республики Беларусь в области науки и техники за цикл работ "Разработка новых методов проектирования и развитие физико-технологических основ создания высоких технологий производства конкурентоспособных микроэлектронных изделий".

Научной школой в области радиофизики, которую возглавляют академик НАН Беларуси, доктор технических наук, профессор А.Ф. Чернявский,

член-корреспондент НАН Беларуси, доктор технических наук, профессор П.Д. Кухарчик, доктора физико-математических наук Б.И. Беляев и В.К. Гончаров, на основе изучения взаимодействия СВЧ-излучения с диэлектрическими материалами разработаны новые методы анализа физических свойств и параметров исследуемых объектов, что позволило создать радиологические технические средства для бесконтактного измерения влажности, массы, плотности, толщины и других характеристик диэлектрических материалов. Изучены процессы образования плазменных потоков при воздействии на металлы и другие материалы мощных лазерных импульсов различной энергии и длительности. Разработаны методы и созданы приборы для обнаружения очагов возгорания лесных пожаров в инфракрасном диапазоне спектра по их собственному тепловому излучению на фоне подстилающей поверхности и природных образований. На основе разработанных и изготовленных в институте универсальных солнечных озонметров введена в действие первая национальная озонметрическая станция. На основании изучения распространения ультразвука в движущихся средах созданы ультразвуковые расходомеры жидкости и газа высокой точности, налажен их серийный выпуск.

Проректор по научной работе Белгосуниверситета, академик АН БССР Л.В. Володько и заведующий лабораторией микроволновых антенн М.А. Вилькоцкий удостоены в 1974 г. Государственной премии БССР в области науки и техники за разработку новых антенно-фидерных устройств.

Сотрудникам института А.Ф. Чернявскому, М.И. Демчуку, Д.А. Ашкинадзе, В.В. Данилевичу, А.К. Якушеву за работу "Разработка и внедрение в практику оптико-физических исследований статистических методов временного анализа быстропеременных потоков светового излучения" в 1986 г. присуждена Государственная премия БССР в области науки и техники.

Заведующий лабораторией лазерной плазмодинамики В.К. Гончаров (совместно с сотрудниками Института молекулярной и атомной физики НАН Беларуси и Института тепло- и массообмена НАН Беларуси) за цикл работ по физике плазмодинамических процессов при лазерно-плазменном воздействии на металлы и композиционные материалы в 1992 г. награжден Государственной премией Республики Беларусь в области науки и техники.

Научную школу в области информатики возглавляют академик НАН Беларуси, доктор технических наук, профессор А.Ф. Чернявский, доктор технических наук В.В. Ревинский, доктор физико-математических наук А.А. Коляда. Этой школой спроектированы, созданы и внедрены в народное хозяйство и учебный процесс новые позиционно-модулярные измерительно-вычислительные средства различного назначения; системы контроля характеристик газоплазменных потоков в реальном масштабе времени; автоматизированная аппаратура для определения пространственных и временных характеристик световых пучков, системы технологического контроля изделий электронной и оптоэлектронной техники и др. Для оснащения геологических партий республики современными поисковыми средствами с характеристиками, соответствующими лучшим мировым образцам, разработан, создан и передан в эксплуатацию 960-канальный компьютеризированный телеметрический комплекс сейсморазведки, обеспечивающий повышение эффективности поиска нефти, газа и других полезных ископаемых. Для решения задач клинической дозиметрии разработан и создан из-

мерительный комплекс оперативного мониторинга дозных распределений пучков рентгеновского и электронного излучений в воздушной и водной средах. Созданы и внедрены в ряде правительственных организаций компьютерные средства защиты информации.

Сотрудники института И.А. Малевич, Б.П. Устинов, В.М. Баранчиков в 1982 г. удостоены Государственной премии БССР в области науки и техники за разработку спецпроблемы.

За разработку и внедрение в учебный процесс автоматизированных обучающих систем на базе ЭВМ А.Ф. Чернявскому, А.М. Мухарскому, А.И. Тарнопольскому присуждена премия Совета Министров СССР 1984 г.

Ректор Белгосуниверситета, академик АН БССР А.И. Киселевский и сотрудники института А.Ф. Чернявский, Б.И. Беляев, А.А. Коляда, В.В. Ревинский в 1991 г. удостоены Государственной премии СССР в области науки и техники за работу "Многофункциональные высокопроизводительные системы измерений с параллельно-конвейерной структурной организацией позиционно-модулярного типа".

В производство и учебный процесс внедрено свыше 1100 разработок, среди них: технологические режимы создания антикоррозионных покрытий с использованием интенсивной ионно-лучевой обработки материалов и осаждаемых покрытий (Ассоциация "Номатех"); прибор для измерения дымности выхлопных газов автомобилей (предприятия Министерства транспорта и коммуникаций); технология создания жидкокристаллических смесей для супертвистовых дисплеев; быстродействующий ЖК-модулятор для маски сварщика (СКБ "Немига" НПО "Интеграл"); программно-алгоритмические и аппаратные средства контроля массы, влажности и зольности листовых материалов (концерн "Беллесбумпром"); компьютеризированный 960-канальный телеметрический комплекс сейсморазведки (Минпром РБ, ПО "Белгеология"); автоматические средства измерений для определения уровня, скорости течения и расхода воды в открытых потоках (ГП "Водкосмос"); автоматический измеритель влажности торфа для полевых и стационарных условий (концерн "Белтопгаз"); технологии выращивания монокристаллов синтетического алмаза для однокристалльного и лезвийного инструмента (НПМП "Адамас"); оборудование специального назначения и технологический процесс производства изделий из пенополиуретана для инвалидной техники и средств реабилитации инвалидов (Министерство социальной защиты); аппаратура для мониторинга водных систем и управления поведением рыб (Комитет рыбоохраны Минприроды РБ); комплекс автоматизированной дистанционной инфракрасной системы пожарного мониторинга лесных массивов (Министерство чрезвычайных ситуаций РБ); автоматический измеритель влажности для технологической линии производства силикатного кирпича (коллективное предприятие "КСВ", г. Могилев); измеритель дозных распределений в сечениях пучка ионизирующего излучения (НИИ онкологии и медицинской радиологии); автоматизированный лазерный технологический комплекс по обработке алмазов (НПМП "Адамас"); вакуумная электропечь с программным управлением (МП "Агрострой"); установка для контроля динамических параметров мощных транзисторов (ИПП "Белэкотехника"); установка для получения чистых композиционных керамических материалов с использованием СВЧ-излучения (НТП "Имтех").

В последние годы институт участвует в выполнении заданий ряда республиканских научно-технических программ: "Защита", "Энергосбережение", "Алмазы", "Радиоэкология", "Информатика", "Чрезвычайные ситуации", "Ресурсосбережение", "Ликвидация последствий аварии на Чернобыльской АЭС" и др.

Институт поддерживает тесные связи с рядом научных центров и фирм ближнего и дальнего зарубежья. В 1995 г. была организована и успешно работает совместная лаборатория с южнокорейской фирмой "Самсунг". Для освоения научно-технических разработок и производства товаров народного потребления с 1993 г. в институте функционирует совместное с Польшей предприятие "Беларусполь". Проводятся научно-исследовательские работы, обмен научными результатами с вузами и НИИ России, Германии, США, Дании, Польши, Китая, Югославии, Италии и других стран. Ежегодно 5–7 сотрудников института выезжают в зарубежные командировки для проведения научной работы, на научную стажировку, для участия в международных конференциях и т. д.

Имеющийся научно-интеллектуальный потенциал, наличие современной материально-технической базы позволяют коллективу института на высоком научно-техническом уровне решать актуальные научные задачи, с оптимизмом смотреть в будущее.

Поступила в редакцию 10.07.2001.

УДК 535.37

Е.С. ВОРОПАЙ, И.М. ГУЛИС

КАФЕДРА ЛАЗЕРНОЙ ФИЗИКИ И СПЕКТРОСКОПИИ: ОТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ДО ПРИКЛАДНЫХ РАЗРАБОТОК

Review of research results in molecular spectroscopy, luminescence (spectroscopy of uranyles, effects of intermolecular interactions on spectroscopic characteristics of complex molecules, supersonic jet spectroscopy of large organic molecules and van-der-waals complexes) and nonlinear optics (dynamic holography, four-wave mixing) have been done by the Division of Laser Physics and Spectroscopy is presented. Applied developments (new chemicals for photodynamic therapy, active media for tunable lasers, new types of lasers, instruments for spectroscopy).



Воропай Евгений Семенович – доктор физико-математических наук, профессор, лауреат Государственной премии Республики Беларусь. Е.С. Воропаем сформировано и успешно развивается научное направление по исследованию взаимосвязи спектрально-люминесцентных характеристик со структурными особенностями сложных молекулярных систем и разработке на этой основе молекулярных структур для определенных приложений, разработке методов и аппаратуры для изучения молекулярных систем и комплексов. Автор около 280 работ, включая монографию, четыре репринта и 38 изобретений.



Гулис Игорь Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры лазерной физики и спектроскопии, лауреат Государственной премии Республики Беларусь. Основные направления исследований – динамика фотофизических процессов в растворах и изолированных ван-дер-ваальсовских комплексах сложных молекул, разработка методов и аппаратуры для лазерно-спектроскопических исследований. Является автором более 120 научных публикаций.

В 1953 г. в Белгосуниверситете была создана кафедра спектрального анализа (ныне кафедра лазерной физики и спектроскопии), на которой вместе с другими подразделениями университета (кафедра общей физики, НИИ ПФП), а также с Институтом физики НАН Беларуси ведутся исследования в области молекулярной спектроскопии, физики лазеров, лазерной спектроскопии, а также разработки по ряду прикладных направлений. В настоящей статье содержится краткий ретроспективный обзор основных результатов исследований главным образом последнего десятилетия.

Широкое развитие в Беларуси получили исследования по спектроскопии и люминесценции молекулярных конденсированных систем. Под руководством А.Н. Севченко в БГУ начались исследования соединений шестивалентного урана, представляющих практический интерес в связи с развитием ядерной энергетики. Активное участие в них приняли Л.В. Володько, А.И. Комяк, Д.С. Умрейко. Первые работы по соединениям уранила (UO_2^{2+}) были посвящены решению спектрально-структурных задач комплексных систем и кристаллов. Применение спектрально-поляризационного метода позволило установить природу электронных переходов и направление их дипольных моментов в ураниловых комплексах (М.Р. Последович), преимущественно лигандный характер верхней заполненной молекулярной орбитали, интерпретировать тонкую структуру эмиссионных и абсорбционных спектров ураниловых соединений при низких температурах и провести систематику электронных состояний в видимой и ультрафиолетовой областях спектра. Выявлено, что возбуждение электронов из валентных состояний приводит к делокализации электронного облака всего уранилового комплекса. Результаты исследований электронных и колебательных состояний комплексных соединений уранила обобщены в монографии Л.В. Володько, А.И. Комяка и Д.С. Умрейко «Ураниловые соединения» (1981) [1].

В развитие данного направления в 1980–1990-х гг. установлены корреляции между положением полос в спектрах электронного поглощения и люминесценции комплексов уранила в растворах и электронно-донорной способностью нейтральных лигандов. Полуэмпирическим путем выявлены соотношения, связывающие положение первого чисто электронного перехода с координационным числом и суммарным донорным числом лигандов, входящих в первую координационную сферу иона уранила. Определена частота длинноволнового чисто электронного перехода свободного иона уранила, когда окружающие его лиганды имеют нулевое значение донорного числа. На основании указанных корреляций предложен метод определения состава первой координационной сферы в ураниловых комплексах, находящихся в растворе или кристалле (А.И. Комяк, А.П. Зажогин) [2].

В 1980–1990-е гг. на кафедре также активно велись исследования влияния флуктуаций микроокружения в растворах сложных органических молекул на динамику фотофизических процессов (И.М. Гулис, А.И. Комяк, С.К. Горбацевич). Работы эти проводились в тесном содружестве с НИИ ПФП (Е.С. Воропай, В.А. Гайсенюк и др.) и с Институтом физики НАН Беларуси (А.Н. Рубинов, В.И. Томин, Б.А. Бушук). В рамках этого направления были разработаны методы теоретического расчета и экспериментального определения функции неоднородного уширения, т. е. распределения флуоресцирующих молекул по частотам чисто электронного перехода в растворах. С использованием методов кинетической лазерной спектроскопии установлено, что флуктуационный, динамический характер микро-

структуры растворов сложных молекул существенным образом определяет механизмы протекания важнейших фотофизических процессов в молекулярных ансамблях. В частности, показано, что перенос энергии электронного возбуждения в ансамблях сложных молекул с неоднородным уширением уровней приводит к возникновению ряда новых явлений и закономерностей [3–5]: длинноволновому сдвигу спектра люминесценции с повышением концентрации и мгновенного спектра с течением времени после импульса возбуждения; характерным зависимостям анизотропии испускания от частоты возбуждения и по спектру люминесценции; качественным различиям в законах затухания флуоресценции для разных частот возбуждения и регистрации; зависимости эффективности переноса донор–акцептор от частоты возбуждения; изменениям в спектрах испускания донора при введении акцептора и др. Построена теория переноса энергии в молекулярных системах с неоднородно уширенными спектрами, адекватно описывающая экспериментальные зависимости. Сделано заключение об универсальном характере наблюдаемых закономерностей.

Предложена модель раствора сложных молекул, в которой наряду со спектральной неоднородностью центров учитывается их гетерогенность по вероятностям безызлучательных переходов [6]. Наиболее отчетливо упомянутая гетерогенность проявляется для интеркомбинационных переходов между возбужденными синглетным и триплетным состояниями. Установлено существование ряда неизвестных ранее особенностей в спектрально-кинетических характеристиках замедленного свечения твердых полярных растворов органических молекул – несовпадение спектров замедленной и быстрой флуоресценции; зависимость соотношения интенсивностей полос быстрой, замедленной флуоресценции и фосфоресценции от частоты возбуждения; несовпадение средних длительностей замедленной флуоресценции и фосфоресценции; зависимость законов затухания замедленных свечений от частоты возбуждения и по спектру испускания; резкая неэкспоненциальность законов затухания; коротковолновое смещение мгновенных спектров замедленных свечений со временем.

Показано, что структурная неоднородность молекулярного ансамбля существенным образом влияет на протекание фотопротолитических реакций в растворах [7]. В результате исследования динамики реакции фотопереноса протона с пикосекундным временным разрешением получены прямые свидетельства существования сверхбыстрой (нелимитированной трансляционной диффузией) стадии реакции. Установлена связь сверхбыстрого процесса фотопереноса протона с процессом дипольной релаксации в полярных растворителях. Предложена новая теоретическая модель фотопротолитической реакции, объясняющая наблюдающиеся в эксперименте закономерности (зависимость вклада сверхбыстрого процесса в общий выход реакции от концентрации донора (акцептора) протонов и температуры, неэкспоненциальность затухания флуоресценции исходного продукта, зависимость выхода реакции от частоты возбуждения).

Исследованы особенности нелинейных фотофизических процессов, обусловленные спектральной и структурной неоднородностью растворов сложных молекул. Выполнен анализ проявлений межмолекулярной ориентационной релаксации при воздействии на раствор интенсивного резонансного излучения (Е.С. Воропай и др.) [8]. Показано, что путем вариации интенсивности накачки за счет изменения времени жизни уровней энергии молекулы по отношению ко времени межмолекулярной ориентационной релак-

сации возможно создание условий для реализации целого ряда новых фотофизических эффектов. Среди них вынужденная, или ступенчатая, межмолекулярная релаксация, в ходе которой сольватная оболочка молекулы формируется в течение нескольких актов поглощения–деактивации. Предсказанное явление вынужденной межмолекулярной релаксации обнаружено и исследовано экспериментально. Показано, что этот эффект позволяет в определенных пределах управлять структурой сольватной оболочки. Установлено, что флуктуации микроструктуры раствора и ориентационная дипольная релаксация окружения сложной молекулы существенным образом влияют на световое тушение флуоресценции растворов сложных молекул, обусловленное вынужденными переходами на подуровни основного состояния. Проанализирована зависимость изменения эффективности светового тушения и анизотропии испускания от сдвига мгновенного спектра люминесценции в процессе релаксации и соотношения между временем жизни и временем релаксации. Установлено, что спектрально-поляризационные характеристики люминесценции в условиях светового тушения обусловлены неоднородным уширением уровней. Экспериментально это проявляется во влиянии частоты возбуждения на зависимость степени поляризации по спектру люминесценции. Показана перспективность использования светового тушения как для изучения межмолекулярной ориентационной релаксации, так и для управления молекулярной динамикой и параметрами неоднородного уширения в растворах молекул.

За цикл работ по исследованию флуктуаций микроструктуры и фотофизики молекул красителей в растворах Государственной премии Республики Беларусь в области науки и техники за 1994 г. были удостоены Б.А. Бушук, Е.С. Воропай, В.А. Гайсенюк, И.М. Гулис, А.Н. Рубинов, В.И. Томин.

С 1987 г. на кафедре ведутся исследования в области спектроскопии и фотофизики охлажденных в сверхзвуковой струе молекул и ван-дер-ваальсовских комплексов (И.М. Гулис, А.И. Комяк, К.А. Саечников) [9]. Такого рода исследования важны для понимания механизмов межмолекулярных взаимодействий, их спектроскопических проявлений и влияния на фотофизические процессы в молекулах и имеют непосредственное отношение к перспективным областям технологии – высокоселективной лазерохимии, лазерному разделению изотопов. На кафедре созданы уникальный лазерный спектрометр для исследования спектров возбуждения и люминесценции сверххолодных изолированных молекул и комплексов, а также аппаратура для кинетических исследований с пикосекундным временным разрешением, базирующаяся на нелинейном методе возбуждения и зондирования. Разработаны методы теоретического анализа спектральных сдвигов при формировании комплексов с неполярными лигандами типа атомов инертных газов. Предложена модель для описания спектральных сдвигов в полярных комплексах, в основе которой лежат введенные представления о доминирующей роли дисперсионных взаимодействий в формировании пространственной структуры комплекса и вытекающей отсюда возможности формирования ориентационно-напряженных структур. Исследованы эффекты изотопозамещения в вибронных спектрах сверххолодных изолированных молекул и комплексов [10]. Предложен и обоснован новый механизм влияния изотопозамещения на частоты электронных переходов. Результаты представляют интерес для развития фундаментальных основ и методов изотопоселективной лазерохимии. Установлена ранее неизвестная особенность процесса внутримолекулярного колебательного перераспреде-

ления в изолированных сверххолодных молекулах – возможность реализации "ступенчатого" перераспределения при возбуждении обертоновых колебательных состояний верхнего электронного состояния, детально прослежен механизм влияния межмолекулярных взаимодействий на вероятности интеркомбинационных переходов в изолированных комплексах [11].

Фундаментальные исследования, ведущиеся на кафедре, служат основой для разработок прикладного значения. Такого рода работы имеют различающуюся в широких пределах "степень готовности" для практического использования, начиная от поисковых, с целью отработать новые принципы реализации элементов, сред и устройств для потенциальных применений до приборов, выполненных на уровне опытных образцов и пригодных для запуска в производство.

С 1980-х гг. на кафедре под руководством А.Л. Толстика и А.В. Чаля совместно с Институтом физики НАН Беларуси (А.С. Рубанов с сотрудниками) ведутся широкие исследования в области нелинейной оптики (обращение волнового фронта (ОВФ), динамическая голография, четырехволновое взаимодействие, оптическая бистабильность). На их основе выполнен цикл работ с целью разработки новых оптических и оптоэлектронных систем и методов оптической обработки информации с использованием нелинейных оптических элементов с обратной связью, в которых проявляются разнообразные эффекты самоорганизации, позволяющие генерировать световые поля заданной пространственно-временной структуры [12–14].

Предложен способ и экспериментально реализовано усиление динамических ОВФ-голограмм некогерентной оптической подкачкой. Реализовано обращение волнового фронта с одновременным удвоением частоты излучения в сложных органических соединениях. Разработан новый метод управления пропусканием жидкокристаллических (ЖК) элементов, основанный на изменении оптической глубины рельефа нематических жидких кристаллов с помощью электрического поля. Экспериментально реализованы режимы оптической бистабильности и генерации пульсаций интенсивности на выходе ЖК-элементов при постоянной входной интенсивности, исследованы пути перехода к режиму оптического хаоса, реализован ряд логических операций.

Разработаны и созданы новые фоторефрактивные элементы на основе легированных кристаллов теллурида кадмия, работающие в ближней ИК-области спектра 1–1,5 мкм, включая окно прозрачности волоконной оптики, которые могут быть интегрированы в схемы волоконно-оптических линий связи, а также использоваться для ограничения мощности ИК-излучения с целью защиты сенсоров от активного радиоэлектронного подавления. Исследования перестраиваемых ЖК-структур с управляемой дифракцией или пропусканием позволили разработать многофункциональный стенд для оптической обработки информации. Стенд предназначен для реализации разнообразных аналоговых и цифровых методов преобразования оптической информации: пространственной фильтрации изображений, оптической бистабильности, генерации регулярных и хаотических пульсаций, логических операций. Небольшое число управляющих параметров оптоэлектронных ЖК-элементов, отсутствие требований к высокой мощности лазерного излучения, наглядность и простота регистрации и обработки данных эксперимента позволяют рассматривать предлагаемые оптоэлектронные элементы как модельные системы обработки оптической информации, удобные для обучения студентов.

Под руководством Е.С. Воропая выполнен цикл работ по разработке новых материалов для квантовой электроники [15, 16]. Синтезирован ряд новых соединений – полиметиновых красителей и производных дицианометилена, являющихся эффективными активными средами для перестраиваемых лазеров на диапазон 0,6–1,2 мк, а также пригодных в качестве фототропных затворов. На основе полиметиновых красителей разработаны эффективные композиционные составы, перспективные в качестве активных слоев оптических WDM-дисков.

Молекулярные системы, использующиеся как компоненты регистрирующих сред, а также в лазерной технике и ряде других областей, подвержены воздействию излучения различной интенсивности и длительности. При плотности мощности порядка десятков и сотен мегаватт на квадратный сантиметр становятся существенными различные нелинейные эффекты, в первую очередь двухквантовые. Это предопределило интерес к их изучению. Детальное изучение характеристик двухфотонно-возбуждаемой флуоресценции было начато Е.С. Воропаем совместно с А.М. Саржевским на кафедре общей физики и продолжено в лаборатории спектроскопии НИИ ПФП, в том числе в рамках тематик, выполняемых совместно с кафедрой лазерной физики и спектроскопии. В результате проведенных исследований были разработаны основные положения поляризованной двухфотонно-возбуждаемой флуоресценции; рассчитаны поляризационные характеристики двухфотонно-возбуждаемой люминесценции для различных моделей; развит метод поляризационных диаграмм Вавилова для двухфотонного возбуждения; установлена связь степени поляризации с симметрией молекул; экспериментально определены предельные значения степени поляризации [17–19].

На основе новых синтезируемых трикарбоцианиновых красителей ведется разработка новых препаратов для фотодинамической лазерной терапии (ФДТ) онкозаболеваний в окне прозрачности биотканей (Е.С. Воропай, М.П. Самцов, А.П. Луговский и сотрудники НИИ ОМР им. Н.Н. Александрова). В настоящее время метод ФДТ широко используется во многих клиниках мира. Методика и аппаратура при этом определяются типом фотосенсибилизаторов. Дальнейшие успехи данного метода связывают с использованием нового поколения фототерапевтических препаратов непериферинового ряда, характеризующихся высоким поглощением света в области “фототерапевтического окна” – от 650 до 1000 нм. В этой области поглощение света компонентами биотканей минимально, и глубина проникновения света в ткань лимитируется в основном рассеянием. Использование для фототерапии излучения данного спектрального состава обеспечивает глубокое проникновение света в ткани и позволяет использовать метод ФДТ для лечения не только поверхностных, но и глубоко расположенных опухолей. К препаратам такого типа относятся трикарбоцианиновые красители. Проведенные с применением этих соединений исследования показали их перспективность для ФДТ. В экспериментах *in vitro* и *in vivo* показано, что трикарбоцианиновые красители способны избирательно накапливаться в опухолевых клетках в мономерной форме, обладают низкой токсичностью при введении в концентрациях, обеспечивающих фототерапевтический эффект, достаточно быстро выводятся из организма. В экспериментах на культурах клеток показано, что при фотовоздействии достигается более чем десятикратное сокращение числа жизнеспособных опухолевых клеток, а в опытах на животных достигнута тотальная гибель тканей опухолевых

узлов на глубине до 20 мм. В настоящее время разворачиваются работы по созданию препаратов на их основе и проведению клинических испытаний. Ведутся также работы по созданию соответствующей лазерно-терапевтической аппаратуры для использования ее в условиях клиники, а также приборов для оперативной спектроскопической диагностики локализации и распределения фотодинамических препаратов в тканях [20–22].

Разработаны новые методы генерации перестраиваемых по частоте пикосекундных импульсов света и на их основе созданы лабораторные макеты компактных и недорогих лазеров на красителях, генерирующих одиночные пикосекундные импульсы при накачке импульсами наносекундного диапазона (И.М. Гулис, Е.А. Ермилов) [23]. Лазеры представляют интерес как перспективные источники излучения для спектроскопии. Методы базируются на использовании бинарных смесей красителей, реализуются нетрадиционные варианты пассивной модуляции добротности (генерационное восстановление потерь в резонаторе, режим спектрального переключения генерации в лазерах с распределенной обратной связью).

Экспериментально реализованы простые по конструкции лазеры с ВКР-преобразованием и сложением частот в нелинейных кристаллах, работающие в режиме синхронной накачки (И.М. Гулис, К.А. Саечников). Лазеры позволяют получать пикосекундные импульсы на широком наборе дискретных частот видимого и ближнего ИК-диапазона, а также непрерывно перестраиваемое в пределах до 5 нм излучение в ряде спектральных областей [24].

Используя результаты исследований физических принципов создания объемных, включая голографические, изображений, разработан цилиндрический растр, используемый для получения объемных и динамических эффектов (И.В. Сташкевич). Каждый элемент растра представляет собой цилиндрическую линзу, в фокусе которой находится параллаксстереограмма, синтезированная на компьютере. Свойства параллаксстереограммы заключаются в том, что наблюдатель видит различные изображения, локализованные в одном и том же месте под разными углами зрения. В результате видимое изображение всей стереограммы будет зависеть от положения наблюдателя и иметь разрешение, равное шагу растра. Указанное свойство может быть использовано для создания объемных либо меняющихся при движении наблюдателя изображений в визуальной рекламе. Предлагаемая разработка предполагает значительное увеличение размеров стереограммы за счет замены фоторегистрации компьютерным синтезом изображения с получением твердой копии на цветном принтере, что позволяет достичь параметров, необходимых для применения в визуальной рекламе. Появляется возможность создания новых эффектов – изменение информации, цвета, формы объекта при передвижении наблюдателя относительно рекламного щита. Такие растровые элементы позволяют получить эффекты объемного и динамического изображения, что будет способствовать расширению информативности и привлекательности визуальной рекламы.

На кафедре в последние годы активно ведутся разработки новых приборов для спектроскопических исследований и спектрального анализа. Основой этих разработок является большой опыт работы сотрудников кафедры в области экспериментальной спектроскопии, в частности лазерной спектроскопии, спектроскопии временного разрешения. Созданные в процессе фундаментальных исследований оригинальные спектроскопические установки служат прототипами для приборов, предназначенных для примене-

ния в научных исследованиях, аналитических приложениях, для контроля технологических процессов. Опыт работы в области прецизионных спектральных и фотометрических измерений импульсных световых потоков обобщен в монографии Е.С. Воропая и П.А. Торпачева [25].

Завершается работа по созданию импульсного спектрофлуорометра, обеспечивающего регистрацию предельно слабых (на уровне одиночных квантов) световых потоков с произвольным законом затухания и предназначенного для изучения параметров импульсных световых источников с частотой следования 10^2 – 10^5 с⁻¹. Прибор обеспечивает временное разрешение 5×10^{-10} с, возможность работы в широком спектральном диапазоне (220–800 нм по возбуждению и 270–800 нм по регистрации), имеет динамический диапазон по фотометрической шкале до 10^6 . Прибор построен по модульно-блочному типу и может быть изготовлен с учетом пожеланий потребителя, в том числе с возможным использованием функциональных узлов аппаратуры заказчика. Программное обеспечение имеет модульную структуру, допускает его наращивание и модернизацию и функционирует на IBM-совместимых персональных ЭВМ класса Pentium под управлением операционной системы Windows 95/98/NT. Оно обеспечивает диалоговую настройку программно-технических средств на требуемые режимы работы, оперативный контроль за процессом измерений, обработку данных и восстановление функций затухания в заданных базисах, ведение архива, предоставление справочной и обучающей информации.

Разработан многоканальный атомно-эмиссионный спектрометр ЭМАС-200Д (М.Н. Коваленко, А.П. Зажогин, А.И. Серафимович). Прибор при наличии разработанных методик и эталонных образцов может обеспечивать анализ элементного состава (свыше 50 элементов) широкого круга веществ и материалов. Разработан ряд модификаций прибора. С помощью ЭМАС-200Д можно проводить анализ нелегированных, низколегированных и высоколегированных сталей различных типов, меди, алюминия, цинка, никеля и сплавов на их основе. В настоящее время ведутся разработки методики определения элементного состава продуктов питания и сырья для пищевой промышленности, природных сред (вода, растворы, почвы, руды, минералы), нефтепродуктов, лекарственных и косметических препаратов, лаков, красок, пластмасс, биотканей человека, животных и других биообъектов. Особенности ЭМАС-200Д: многоэлементный (до 10 элементов) анализ за одно измерение; отсутствие расходимых фотоматериалов; полная автоматизация обработки и документирования результатов анализа; малое время и высокая точность анализа. Основные характеристики прибора: пределы обнаружения концентраций 0,00001 %; диапазон измерения концентраций 0,0001–40 %; погрешность прибора 3–5 отн. %. Модульная конструкция ЭМАС-200Д обеспечивает возможность установки дополнительных блоков и узлов, модернизации прибора, простоту наладки и обслуживания.

Создан экспериментальный образец и завершается работа по подготовке технической документации малогабаритного универсального спектрометра. В приборе в качестве фотоприемника используется ПЗС-линейка с 2048 элементами, что обеспечивает высокую чувствительность и оперативность в регистрации спектров (время регистрации от 10 мс до 100 с). Прибор характеризуется компактностью (200×150×110 мм), высоким для спектрометров таких размеров разрешением (лучше 0,25 нм), большим светопропусканием (относительное отверстие 1:2). Применение оригинальных схемно-конструктивных решений обеспечивает спектрометру высококонкурентную

цену, что делает экономически целесообразным его использование как для учебных целей (в практикумах по оптике, атомной физике, спектроскопии, люминесценции), так и в исследовательской и аналитической практике. Прибор может использоваться в качестве базового модуля для абсорбционного, флуоресцентного спектрометра, спектрометра комбинационного рассеяния и изготавливаться в настольном варианте, а также и в портативном, допускающем полевое применение (с автономным питанием и управлением от notebook -компьютера).

Среди прикладных разработок последнего времени следует назвать создание метода спектроскопического анализа характеристик нефтепродуктов и обеспечивающего его аппаратную реализацию в виде специализированного спектрометра ближнего ИК-диапазона [26], а также нового метода детектирования малых концентраций флуоресцирующих органических соединений в присутствии интенсивного фонового сигнала, ориентированного на использование в экологическом контроле водных сред и в медико-биологических приложениях [27]. Ведется разработка метода и аппаратуры для оперативного контроля технологического процесса производства алмазоподобных структур с использованием техники комбинационного рассеяния.

1. Володько Л.В., Комяк А.И., Умрейко Д.С. Ураниловые соединения. Строение и спектры. Мн., 1981.
2. Зажогин А.П., Комяк А.И. // Оптика и спектроскопия молекулярных и надмолекулярных систем. Мн., 2000. С. 20.
3. Горбацевич С.К., Гулис И. М., Комяк А. И. // ЖПС. 1982. Т. 37. № 3. С. 460.
4. Гулис И. М., Комяк А. И., Томин В.И. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1978. Т. 42. № 2. С. 307.
5. Гулис И. М., Комяк А. И. // ЖПС. 1980. Т. 32. № 5. С. 897.
6. Горбацевич С.К., Гулис И. М., Комяк А. И., Миксюк Ю.И. // Там же. 1982. Т. 37. № 1. С. 92.
7. Гулис И. М., Комяк А. И., Миксюк Ю.И., Цвирко В.А. // Там же. 1992. Т. 56. № 1. С. 54.
8. Бутько А.И., Воропай Е.С., Гайсенюк В.А. и др. // Оптика и спектроскопия. 1982. Т. 52. № 2. С. 253.
9. Гулис И. М., Комяк А. И., Саечников К. А. // ЖПС. 1995. Т. 62. № 6. С. 140.
10. Гулис И. М., Саечников К. А., Комяк А. И. // Там же. 1997. Т. 64. № 2. С. 148.
11. Гулис И. М., Саечников К. А., Комяк А. И. и др. // Там же. 1998. Т. 65. № 2. С. 184.
12. Карпук С.М., Рубанов А.С., Толстик А.Л., Чалей А.В. // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. № 12. С. 4.
13. Karpuk S.M., Romanov O.G., Rubanov A.S., Tolstik A.L. // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics. 1996. Vol. 60. № 1. P. 52.
14. Карпук С.М., Рубанов А.С., Толстик А.Л. // Оптика и спектроскопия. 1996. Т. 80. № 2. С. 313.
15. Воропай Е.С., Самцов М.П. // ЖПС. 1995. Т. 65. № 2. С. 218.
16. Воропай Е.С., Луговский А.П., Самцов М.П. // Журн. науч. и прикл. фотографии. 1993. Т. 38. № 6. С. 1.
17. Воропай Е.С., Кирсанов А.А., Саечников В.А., Саржевский А.М. // ЖПС. 1982. Т. 36. № 2. С. 230.
18. Воропай Е.С., Гайсенюк В.А., Кирсанов А.А. и др. // ЖПС. 1983. Т. 38. № 6. С. 912.
19. Воропай Е.С., Гайсенюк В.А., Гусенков С.Н. и др. // Оптика и спектроскопия. 1984. Т. 56. № 5. С. 808.
20. Жаврид Э.А., Истомин Ю.И., Александрова Е.Н. и др. // Актуальные вопросы онкологии и медицинской радиологии. Мн., 1997. С. 266.
21. Voropay E.S., Samtsov M.P., Lugovskiy A.P. et al. // Experimental Oncology. 1997. Vol. 9. № 1. P. 56.

22. Schastak S.I., Enzmann V., Jngel A. et al. // Laser Medizin. 1997. Vol. 13. P. 50.
23. Гулис И. М., Ермилов Е. А. // Лазерная и оптико-электронная техника. Мн., 2000. Вып. 5. С. 49.
24. Бельский А.М., Гулис И.М., Саечников К.А // Квантовая электроника. 1995. Т. 22. № 8. С. 841.
25. Воропай Е.С., Торпачев П.А. Техника фотометрии высокого амплитудного разрешения. Мн., 1986.
26. Воропай Е.С., Валах В.В. // ЖПС. 1999. Т. 66. № 2. С. 255.
27. Воропай Е.С., Гулис И.М., Цыбульский Д.А. // ЖПС. 2000. Т. 67. № 6. С. 748.

Поступила в редакцию 28.06.2001.

УДК 577.3

*С.Н. ЧЕРЕНКЕВИЧ, А.Б. САМАЛЬ, В.П. ЗОРИН, Т.Е. ЗОРИНА, Г.Н. СЕМЕНКОВА,
Е.И. КОВАЛЕНКО, А.В. ТИМОШЕНКО, И В. ГОРУДКО, А.И. ХМЕЛЬНИЦКИЙ,
П.Г. МОЛЧАНОВ, В.И. КРОТ, С.К. ГОРБАЦЕВИЧ*

БИОФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КЛЕТОК И МОДЕЛЬНЫХ БИОСТРУКТУР

In the article the basic scientific data received at the Department of Biophysics in different fields of cellular, molecular and medical biophysics are discussed.



Верхний ряд (слева направо):

Хмельницкий Александр Ильич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры биофизики, заместитель декана физического факультета. Основные научные направления – мембранная биофизика, спектроскопия сложных молекул. Автор 90 публикаций.

Черенкевич Сергей Николаевич – доктор биологических наук, профессор, заведующий кафедрой биофизики. Основные научные направления – биофизика клетки, клеточная информатика, медицинская биофизика, биологические нейронные сети. Автор 450 научных публикаций.

Молчанов Павел Геннадьевич – младший научный сотрудник кафедры биофизики. Основные научные направления – нейронные биологические сети, нейрочипы. Имеет 11 научных публикаций.

Средний ряд:

Зорин Владимир Петрович – кандидат биологических наук, заведующий лабораторией биофизики и биотехнологии. Основные направления научных исследований – медицинская биофизика, мембранная и клеточная биофизика. Автор 160 научных публикаций.

Самаль Александра Борисовна – кандидат биологических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории биофизики и биотехнологии. Основные научные направления – медицинская биофизика, биофизика клетки. Автор 110 научных публикаций.

Семенкова Галина Николаевна – кандидат биологических наук, ведущий научный сотрудник кафедры биофизики. Область научных интересов – медицинская биофизика. Автор 96 научных публикаций.

Нижний ряд:

Крот Владимир Илларионович – кандидат биологических наук, доцент кафедры биофизики. Область научных интересов – биофизика нуклеиновых кислот. Автор 110 научных публикаций.

Зорина Татьяна Евгеньевна – кандидат биологических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории биофизики и биотехнологии. Область научных интересов – медицинская биофизика. Автор 90 научных публикаций.

Горбачевич Сергей Константинович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры биофизики. Область научных интересов – нелинейная спектроскопия сложных молекул. Автор 80 научных публикаций.

Коваленко Елена Иосифовна – младший научный сотрудник кафедры биофизики. Область научных интересов – медицинская биофизика. Имеет 39 научных публикаций.

Тимошенко Александр Викентьевич – доктор биологических наук, ведущий научный сотрудник кафедры биофизики. Основные научные направления – биофизика клетки, гликобиология, экспериментальная онкология. Автор 120 научных публикаций.

Горудко Ирина Владимировна – кандидат биологических наук, младший научный сотрудник кафедры биофизики. Основные научные направления – биофизика клетки, гликобиология. Имеет 22 научные публикации.

Биофизика – наука о физических основах строения и функционирования живых систем. Для установления особенностей уникального строения биосистем используется весь набор теоретических и экспериментальных методов физики. В статье приведены научные результаты, полученные сотрудниками кафедры биофизики физического факультета при применении физических подходов к изучению структуры и свойств клеток в норме и при ряде патологий, внутриклеточных структур, включая плазматические мембраны, биологических полимеров.

Молекулярные механизмы агрегации клеток

Одним из основных направлений, сформированных почти 20 лет назад, является изучение механизмов функционирования компонентов системы гемостаза (тромбоцитов и факторов свертывающей системы крови). Изучение влияния pH среды, ионной силы, температуры, различных индукторов и ингибиторов агрегации на функциональную активность тромбоцитов человека позволило установить важную роль плазматической мембраны тромбоцитов в трансдукции агонистрецепторного сигнала и формировании межклеточных контактов [1]. Впервые установлено, что перекись водорода как наиболее стабильный тип активных форм кислорода (АФК) является функционально значимой сигнальной молекулой, участвующей в регуляции агрегационной активности тромбоцитов [2]. Исследования показали, что АФК в зависимости от концентрации могут оказывать двойственное действие: проагрегантное (увеличивают агрегационную активность тромбоцитов) и антиагрегантное (ингибируют агрегацию тромбоцитов под действием различных индукторов агрегации). Поскольку в организме АФК в достаточно высоких концентрациях образуются под действием ионизирующей радиации, лазерного излучения, токсических соединений, лекарственных веществ, а также при воспалительных и других патологических процессах, полученные результаты имеют практическое значение для диагностики и профилактики заболеваний, связанных с нарушением механизмов тромбообразования. При исследовании влияния доноров оксида азота на процессы агрегации и дезагрегации тромбоцитов важным научным результатом рабо-

ты явилось установление механизма NO-индуцированного регулирования внутриклеточной концентрации ионов кальция в тромбоцитах, не связанного с активацией гуанилатциклазы; механизма активации NO-синтазы тромбоцитов перекисью водорода и участия NO в активации аденилатциклазы и удалении ионов Ca^{2+} из цитоплазмы тромбоцитов [3]. Совместно с НИИ кардиологии исследовано действие нитросульфозэфиров полисахаридов, синтезированных в НИИ физико-химических проблем, на свертывающую систему крови и на агрегацию тромбоцитов. Показана перспективность данных препаратов, сочетающих в себе антиагрегантные и антикоагулянтные свойства, для лечения тромботических осложнений различных заболеваний [4]. Исследования, проведенные совместно с кафедрой кардиологии БелМАПО позволили подобрать условия УЗ-воздействия, позволяющие предотвратить опасность развития ретромбозов при разрушении тромбов ультразвуком, и явились основой для развития перспективного ультразвукового метода разрушения тромбов [5, 6]. В настоящее время значительное внимание уделяется механизмам дезагрегации тромбоцитов. Впервые показана возможность разрушения тромбоцитарных агрегатов, образованных под действием тромбина – мощного индуктора агрегации. Получены данные, свидетельствующие о том, что при агрегации тромбоцитов, индуцированной тромбином, АДФ, лектином и ультразвуком, образуются межклеточные контакты, чувствительные к тиоловым реагентам [7, 8].

Разработанные подходы изучения механизмов взаимодействия тромбоцитов служат основой для развития новых направлений исследования механизмов агрегации и дезагрегации тромбоцитов и путей разрушения тромбоцитарных агрегатов. Дальнейшая научная работа связана с установлением внутриклеточных механизмов, приводящих к разрушению образованных под действием различных индукторов агрегации тромбоцитарных агрегатов, и управлением этим процессом лекарственными препаратами, а также с разработкой новых эффективных лекарственных средств для предупреждения и лечения тромбозов.

Биофизические основы фотодинамической терапии

Исследования в области фотодинамической терапии с использованием тетрапиррольных соединений проводятся на кафедре биофизики с 1987 г. Основное направление работ в данной области связано с установлением молекулярных, клеточных и тканевых механизмов регуляции процессов распределения порфириновых сенсibilизаторов в организме. С этой целью сотрудниками кафедры биофизики совместно с сотрудниками лаборатории фотоники молекул ИМАФ НАН Беларуси синтезирован ряд новых фотосенсibilизаторов (производных хлорина еб) с различными физико-химическими характеристиками и изучены процессы их взаимодействия с макромолекулами, биологическими мембранами, клетками. В экспериментах на животных доказана возможность использования данных соединений в качестве фотосенсibilизаторов для фотодинамической терапии солидных опухолей [9–12].

При исследовании процессов взаимодействия тетрапиррольных пигментов с белками плазмы крови показано, что сенсibilизаторы с различной химической структурой проявляют различную специфичность связывания с отдельными транспортными белками. В модельных системах, а также в эксперименте на животных показано важное значение липопротеинов низкой плотности в избирательной доставке неполярных фотосенсibilизато-

ров к опухолевым клеткам и тканям. Впервые установлено участие форменных элементов крови в механизмах транспорта порфириновых пигментов в организме [13–16].

Изучена специфичность окрашивания порфиринами иммунокомпетентных клеток в норме и при некоторых гематологических заболеваниях. Сравнение фотосенсибилизированного повреждения различных субпопуляций лимфоцитов показало возможность применения методов фотодинамической терапии для коррекции иммунных процессов в организме [16–19]. Доказана высокая бактерицидная активность ряда производных хлорина еб. С использованием модельных бактериальных систем изучены механизмы повреждения мембран и генетических систем клеток [20]. В дальнейшем предполагается изучение механизмов терапевтического эффекта комбинированного действия производных хлорина еб и видимого света при лечении бактериальных и вирусных инфекций. Перспективными являются исследования, направленные на развитие новых фотомедицинских терапевтических технологий, основанных на применении хлоринов для контролируемого фотосенсибилизированного воздействия на кровеносные сосуды в составе тканей глаза при лечении ряда заболеваний, в том числе хориоидальной неоваскуляризации. Разрабатываются биофизические основы нового метода лечения ревматоидного артрита и ряда других воспалительных процессов, основанного на комбинированном воздействии на пораженные ткани видимого света и порфириновых сенсibilизаторов. Избирательное фотосенсибилизированное действие на отдельные клеточные и тканевые структуры сустава позволит осуществить коррекцию пролиферативных процессов в синовиальной оболочке и достичь нормализации биохимических и структурных характеристик внутрисуставной среды.

Активация молекулярного кислорода клетками в норме и при патологиях

Множество типов клеток человека и животных генерируют АФК при ряде воздействий, стимулирующих их метаболизм. Нами впервые выявлены кислородактивирующие системы в Т- и В-лимфоцитах периферической крови и клетках костного мозга человека [21]. Установлено, что образование АФК в лимфоцитах происходит с участием ферментных систем, локализованных в плазматических мембранах. Установлено, что выход АФК в этих клетках зависит от условий среды, содержания и природы активирующих факторов и коррелирует с пролиферативной активностью лимфоцитов. Показана роль супероксидных анион-радикалов, синглетного кислорода, гидроксильных радикалов и пероксида водорода как вторичных мессенджеров при формировании пролиферативного отклика клеток.

Обнаружена генерация АФК при адгезии нейтрофилов, моноцитов, альвеолярных макрофагов, Т- и В-лимфоцитов на подложку и выявлена положительная корреляция между степенью адгезивности и кислородактивирующей способностью перечисленных типов клеток [22]. В образовании АФК плазматическими мембранами клеток помимо НАДФН-оксидазной системы принимают участие G-белки, цитохром P-450, системы метаболизма арахидоновой кислоты и транспорта глюкозы, ионы кальция. Выход АФК в результате функционирования внутриклеточной миелопероксидазной системы и секреция миелопероксидазы во внеклеточную среду из моноцитов и нейтрофилов зависят от степени активации редокс-систем плазматических мембран.

Впервые установлен прайминг кислородактивирующей способности иммунокомпетентных клеток адгезией к подложке, действием рекомбинантного интерлейкина-1 β (rIL-1 β) и гранулоцит-колониестимулирующего фактора (G-CSF). Доказано, что супероксидные анион-радикалы выполняют роль основного мессенджера при передаче сигнала от rIL-1 β через плазматическую мембрану к внутриклеточной миелопероксидазной системе [23]. Изучены механизмы активации кислорода в нейтрофилах при лимфогранулематозе, остром лимфобластном лейкозе, неходжкинских лимфомах, нейробластоме, в клетках костного мозга при панмиелопатии, миелодиспластическом синдроме, в альвеолярных макрофагах и моноцитах при саркоидозе легких на разных стадиях развития патологического процесса. Установлено, что при названных состояниях происходит специфическое модифицирование кислородактивирующих систем клеток. При действии факторов роста и дифференцировки гранулоцитов G-CSF отмечено усиление функциональной активности и кислородактивирующей способности нейтрофилов миелосупрессивных больных [24]. На основании полученных данных разработан ряд методов мониторинга функциональной активности клеток при терапии пациентов.

Впервые обнаружены кислородактивирующие системы у пневмоцитов II при адгезии и стимуляции иммуноглобулином G, а также в первичной культуре астроцитов морской свинки и перевиваемой культуре глиомы крысы С6 при восстановлении менадиона. В астроцитах морской свинки содержится фермент, обладающий пероксидазоподобной активностью [25].

Лектин-индуцированные межклеточные контакты

Лектины, обладающие уникальной способностью вызывать агрегацию клеток, привлекают внимание исследователей в течение уже нескольких десятилетий. Исследования межклеточных взаимодействий с участием лектинов раскрывают такие сложные процессы, как пролиферация, иммунный ответ, метастазирование и др. Поскольку связывание лектинов гликорцепторами часто сопровождается не только агрегацией, но и активацией клеток, была исследована взаимосвязь между образованием ранних межклеточных контактов и способностью лектинов запускать внутриклеточные сигнальные реакции. С использованием метода дезагрегации клеток, активированных лектинами в присутствии гаптенных углеводов, было обнаружено, что в процессе лектин-индуцированной агрегации клеток образуются межклеточные контакты, устойчивые к действию гаптенных углеводов (haptenic-sugar-resistant contacts, или HSR-контакты). Показано, что формирование лектин-индуцированных HSR-контактов является новым функциональным ответом клеток, реализация которого зависит от способности лектинов растительного и животного происхождения активировать процессы внутриклеточной сигнализации [26–29]. Ингибиторы внутриклеточных сигнальных реакций (нордигидрогваяретовая кислота, N-этилмалеимид, D609, бисиндолилмалеимид, трифторперазин, KT5720, KT5926, МК-886, эмодин, ингибитор диацилглицерол-киназы и (\pm)-метоксиверапамил) подавляют образование HSR-контактов между тимоцитами крыс при действии галактозидспецифичного лектина омелы белой (*Viscum album* L., или VAA) [28]. При этом способность VAA стимулировать образование HSR-контактов обусловлена наличием в его составе углеводсвязывающей В-субъединицы, а А-субъединица вносит стабилизирующий вклад в этот процесс. Важную регуляторную роль в лектин-индуцированном образовании HSR-контактов

играют тиол-зависимые механизмы, чувствительные к действию ингибиторов сигнальных реакций [29]. Определено, что пути трансдукции сигнала, ведущие к лектин-индуцированному образованию HSR-контактов, дегрануляции и генерации H_2O_2 нейтрофилами человека, различны [30]. Продемонстрировано амбивалентное действие МК-886, ингибитора синтеза лейкотриенов, на функциональные ответы клеток иммунной системы (образование HSR-контактов, дегрануляция, генерация H_2O_2 и изменение внутриклеточной концентрации ионов Ca^{2+}) [31].

Результаты проведенных исследований и экспериментальные модели используются для разработки новых методов диагностики заболеваний, обусловленных нарушением функционирования адгезионного аппарата клеток, а также для тестирования соответствующих фармакологических препаратов.

Модификация физико-химических свойств липидных мембран

Процессы транспорта веществ через биологические мембраны имеют фундаментальное значение в жизнедеятельности живых организмов. Нами исследованы электрофизические свойства мембранных структур с управляемым переносом заряда. Показано наличие ионных каналов в немодифицированных бислойных липидных мембранах. Разработаны методики модификации ионно-транспортных свойств и стабильности модельных биомембран агентами химической природы (меланин, йод, ионофоры, каналоформеры), а также при термо- и фотовоздействиях [32–37].

Мембранные структуры термоуправляемого ионного транспорта могут быть положены в основу создания биосенсоров и систем экспресс-диагностики, а также использованы для разработки методов лечения патологических состояний организма.

Впервые проведено изучение электронных и колебательных спектров поглощения, флуоресценции, возбуждения флуоресценции и фосфоресценции, а также поляризации флуоресценции хромофоров, образующихся при перекисном окислении липидов. Показано, что хромофорные системы, образующиеся при окислении фосфолипидов, представляют собой сопряженные полиеновые цепи различной длины [38, 39]. Установлены локализация и ориентация полиеновых хромофоров в бислойной мембране. Изучены механизмы образования и деструкции хромофорных систем под действием таких внешних физико-химических факторов, как температура, ультрафиолетовое излучение, ультразвук, озон [40–43]. На основании установленных спектроскопических свойств липидных хромофоров разработаны методы изучения фазовых переходов и свободнорадикальных процессов в биомембранах и их моделях, а также методы получения стабильных липосом и дифференциальной диагностики некоторых заболеваний крови.

На кафедре биофизики разработан новый метод получения синтетических меланиновых структур. Интерес к исследованию меланиновых пигментов связан с уникальными свойствами этих структур: противоопухолевые, антиоксидантные, радиопротекторные, бактериостатические, электронно- и ионообменные и др.

Проведен идентификационный анализ и высказаны предположения о молекулярной структуре синтезированных препаратов [44]. Установлено протекторное действие синтетических меланинов при действии на клетки и их модели внешних физических факторов и химических агентов [45, 46].

Нейросенсоры и нейрочипы

В течение длительного периода времени основным способом сопряжения измерительных устройств с нейронными ансамблями является измерение трансмембранного потенциала клеток при помощи вводимых внутрь клетки микроэлектродов. Ограничения данного метода связаны с трудностями регистрации потенциалов отдельных клеток ансамбля набором внутриклеточных микроэлектродов, а также с нарушением ионной асимметрии клеток и их лизисом, поддержания стерильности, необходимой при долговременных физиологических и фармакологических исследованиях.

На кафедре биофизики разработаны внеклеточные электроды в виде микроэлектродных массивов (МЭМ) для регистрации различных электрических клеточных событий, например, распространения потенциалов действия с множества различных мест клеточной культуры одновременно в формирующихся ансамблях клеток. Совмещенная с МЭМ система предусилителей, фильтров и выходных буферов обеспечивает усиление и передачу сигнала на аналого-цифровой преобразователь. При стандартных условиях культивирования на поверхности подобного микроэлектродного массива нейроны формируют нейросеть в течение второй недели с момента посева.

В то же время микроэлектродные массивы характеризуются низкой чувствительностью, высоким уровнем шума и сильной зависимостью регистрируемого сигнала от местоположения сомы клетки. Перспективными нейросенсорами являются массивы миниатюрных МОП-транзисторов. В отличие от МЭМ чувствительные активные элементы МОП-массивов можно располагать непосредственно рядом с сомой, что приводит к значительному усилению сигнала и открывает возможность регистрации слабых, подпороговых импульсов. Использование МОП-структур приводит к значительному уменьшению выводов чипа и позволяет вести регистрацию с большого количества точек нейросети [47]. Замена электродов затворов непосредственно сомой биологического нейрона приводит к тому, что вариации локального внеклеточного поля, возникающие в ходе электрической активности клеток, модулируют проводимость сток-исток напрямую без помощи электрода. Это позволяет избегать вклада теплового шума, а также уменьшать влияние паразитных емкостей и сопротивлений, присущих МЭМ [48].

Создаваемые для изучения механизмов обработки информации в нейросетях нейрон-кремниевые чипы могут использоваться в качестве вычислительных элементов “биологического типа” в искусственных информационных системах.

Биофизика ДНК-содержащих структур клетки

Большое внимание на кафедре биофизики БГУ уделяется исследованию структуры и физико-химических свойств ДНК-содержащих систем. Вискозиметрическое и спектрофотометрическое изучение растворов ДНК в составе дезоксирибонуклеопротеидных (ДНП) систем показало, что ДНК в ДНП-растворах характеризуется в несколько раз меньшей персистентной длиной, чем в свободном состоянии. Высокая по сравнению с растворами ДНК компактизация ДНП в растворе свидетельствует о дестабилизированном состоянии ДНК в ДНП. Еще более высокой степенью компактизации характеризуется дезоксирибонуклеопротеидный комплекс при физиологической ионной силе среды (0,14 М раствор NaCl), что свидетельствует о квазиоднотяжем состоянии ДНК в конденсированных надмолекулярных

ДНП-структурах, являющихся по ряду параметров корректными моделями хромосом клетки [49, 52].

Исследование влияния различных физико-химических воздействий на надмолекулярные ДНП-системы (рН, ионная сила, биоактивные вещества, ультрафиолетовое, гамма- и рентгеновское излучение) показало, что ответственной за изменение свойств ДНП является система межмолекулярных связей в дезоксирибонуклеопротеидных структурах. Разработанный на кафедре метод определения количества межмолекулярных контактов позволил определить, что фрагментация ДНП-систем при облучении в растворе с последующим переводом в конденсированное состояние и облучение предварительно сформированных хромосомных моделей связаны с сильным (в несколько раз) изменением числа межмолекулярных узлов в этих объектах [50, 52]. Было показано также, что радиопротекторные свойства ряда соединений тоже связаны с изменением (увеличением в десятки раз) числа межмолекулярных контактов в ДНП-системах [51, 52].

Электронно-микроскопическое исследование показало, что при модификации состояния конденсированных ДНП-структур варьирует не только число межмолекулярных узлов, но происходит также изменение параметров пространственной сетки дезоксирибонуклеопротеидных молекул, деформирование нуклеосомных образований и перераспределение белков на ДНК. Экспериментально выяснено, что нарушения такого рода в структуре ДНП-систем сопровождаются изменениями параметров плавления ДНК в ДНП. С целью установления механизмов наблюдаемых эффектов в конденсированных ДНП-системах при нагревании разработана теория перехода спираль-клубок ДНК в составе ДНП, позволяющая объяснять возникновение различных структурных перестроек этих объектов в норме и при физико-химических воздействиях [53].

Одним из примеров приложения разработанных экспериментальных и теоретических подходов к изучению ДНК-содержащих систем является исследование механизмов влияния антиопухолевых препаратов на наследственные структуры клетки. Так, в экспериментах *in vitro* было показано, что активные в антиопухоловом плане *цис*-дихлордиаминоплатиновые соединения вызывают увеличение числа межмолекулярных контактов в надмолекулярных ДНП-структурах и существенную стабилизацию ДНП-комплексов, обнаруживаемую по увеличению температуры плавления молекул ДНК в ДНП на 4–5 °С при нагревании их растворов [54]. Разработана также теоретическая модель кинетики транскрипции, в которой показано, что время процесса, связанного с распространением конформационных волн по молекулам ДНК, существенно зависит от структурного состояния ДНП-комплекса (числа нуклеосом, характера и количества узлов в пространственной сетке, формирующейся при конденсации молекул ДНП) [55].

Нелинейная спектроскопия сложных молекул

Нелинейные процессы, протекающие в растворах сложных молекул, можно условно разделить на два класса. К первому классу относится нелинейный сольватационный сдвиг спектров сложных молекул в полярных растворителях, ко второму – эффекты, связанные с насыщением электронных переходов в растворах сложных молекул.

Основной причиной формирования нелинейного сольватационного сдвига спектров сложных молекул в полярных растворителях является так называемое диэлектрическое насыщение, проявляющееся в нелинейности

реактивного поля по отношению к величине дипольного момента молекулы активатора, помещенной в растворитель. Из сопоставления модельных расчетов, выполненных методами Монте-Карло, с экспериментальными результатами вытекает, что насыщение реактивного поля приводит к целому ряду эффектов, влияющих на спектрально-кинетические параметры флуоресценции, замедленной флуоресценции и фосфоресценции растворов сложных молекул в полярных растворителях [56–60]. В частности, время ориентационной релаксации растворителя зависит от величины дипольного момента молекулы активатора, а также от частоты возбуждающего излучения [60].

Второй причиной, приводящей к формированию нелинейного сольватационного сдвига, помимо диэлектрического насыщения, является диполь-дипольное взаимодействие между собой молекул полярного растворителя. Наиболее четко эти эффекты прослеживаются в трехкомпонентных растворах сложных полярных молекул в смесях полярного и неполярного растворителей [61, 62]. Кооперативность процессов неспецифической сольватации в этих растворах приводит к гистерезисной зависимости поглощения от интенсивности возбуждающего излучения [62], на базе которой возможна реализация внутренней оптической бистабильности в растворах сложных полярных молекул в бинарных растворителях [63].

Второй класс явлений – эффекты, связанные с насыщением электронных переходов. Они наблюдаются при стационарном возбуждении только в случае растворов с долгоживущими триплетными состояниями. В растворах, состоящих из молекул двух типов (донор и акцептор), при интенсивностях возбуждения, достаточных для насыщения населенностей триплетных состояний молекул акцептора, степень поляризации и квантовый выход флуоресценции донора зависят от интенсивности возбуждения, а значение степени поляризации флуоресценции может превышать 50 % [64–66]. Для растворов связанных хромофоров наблюдается сложная динамика изменения населенностей электронных уровней системы, позволяющая использовать такие ансамбли бихромофоров, как мультстабильные устройства, сохраняющие свое состояние в течение времени, соответствующего времени жизни триплетного состояния [67, 68].

Развитие современной биофизики отражает ее участие в решении многих мультидисциплинарных проблем современных биомедицинских наук, в частности, в решении проблем молекулярной медицины, клеточной информатики, нанобиологии, геномики, протеомики, разработки биосенсорных и диагностических устройств. В настоящее время на кафедре биофизики эффективно разрабатываются проблемы биофизики мембран и клеток, фототерапии рака, клеточной сигнализации, медицинской биофизики, создания новых типов биосенсоров, нейросенсоров, биофизического оборудования.

1. Самаль А. Б., Черенкевич С.Н., Хмара Н.Ф. Агрегация тромбоцитов: методы изучения и механизмы. Мн., 1990.

2. Они же // Гематология трансфузиология. 1988. Т. 33. № 11. С. 34.

3. Samal A., Karvatskaya O., Loiko E. // Acta Physiol. Scand. 1999. Vol. 167. Suppl. 645. P. 40.

4. Самаль А.Б., Колядко М.Г., Согрина Е.Н. и др. // Эксперим. и клин. фармакология. 1996. Т. 59. № 2. С. 27.

5. Самаль А.Б., Адзерихо И.Э., Мрочек А.Г. и др. // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44. № 1. С. 79.

6. Samal A.B., Adzerikho I.D., Mrochek A.G. et al. // Eur. J. Ultrasound. 2000. Vol. 11. № 1. P. 53.

7. Самаль А.Б., Тимошенко А.В., Лойко Е.Н. и др. // Биохимия. 1998. Т. 63. № 5. С. 611.
8. Самаль А.Б., Лойко Е.Н. // Там же. 2000. Т. 65. № 2. С. 276.
9. Гуринович Г.П., Зорина Т.Е., Аркатов Ю.М. и др. // Цитология. 1989. Т. 31. № 9. С. 1058.
10. Зорин В.П., Хлудеев И.И., Зорина Т.Е. и др. // Эксперим. онкология. 1992. Т. 14. № 3. С. 39.
11. Gurinovich G.P., Zorina T.E., Mel'nov S.B. et al. // J. Photochem. Photobiol. B: Biology. 1992. Vol. 13. P. 51.
12. Zorin V.P., Zorina T.E., Mikhalovsky I.S. et al. // Proceedings SPIE: Photodynamic Therapy in Cancer. 1994. Vol. 2325. P. 87.
13. Zorin V.P., Zorina T.E., Mel'nov S.B. et al. // Photochemotherapy: PDT and Other Modalities. 1996. Vol. 2924. P. 109.
14. Zorin U., Mikhalovsky I., Khludeyev I. et al. // Proceedings of 6 Congress of IPA. SPIE. 1998.
15. Зорин В.П. // ЖПС. 1999. Т. 66. № 4. С. 541.
16. Зорин В.П., Хлудеев И.И., Зорина Т.Е. // Биофизика. 2000. Т. 45. № 2. С. 313.
17. Zorin V.P., Zorina T.E., Khludeyev I.I. et al. // Proceedings SPIE : Laser Use in Oncology II. 2000. Vol. 4059. P. 139.
18. Савицкий В.П., Зорин В.П. // Актуальные вопросы детской онкологии и гематологии. Мн., 2000. С. 100.
19. Zorin V.P., Khludeyev I.I., Savitsky V.P. et al. // Photochemotherapy: PDT and Other Modalities III. 1997. Vol. 3191. P. 333.
20. Зорина Т.Е., Фомичев А.Ю., Зорин В.П. и др. // Микробиология. 1988. Т. 57. № 6. С. 1007.
21. Семенкова Г.Н., Черенкевич С.Н. // Фотобиология и мембранная биофизика. Мн., 1999. С. 209.
22. Семенкова Г.Н., Черенкевич С.Н., Левин В.И. и др. // Биофизика. 1985. Т. 35. Вып. 5. С. 864.
23. Закревская Ю.В., Семенкова Г.Н., Черенкевич С.Н. // Докл. АН Беларуси. 1993. Т. 37. № 6. С. 79.
24. Smirnova E.I., Semenkov G.N., Kovalenko E.I. et al. // Acute Leukemias VII. 1998. P. 387.
25. Семенкова Г.Н., Квачева З.Б., Обыденникова С.В. и др. // Укр. биохим. журн. 1998. Т. 70. № 4. С. 126.
26. Timoshenko A.V., Gorudko I.V., Kaltner H. et al. // Biochem. Mol. Biol. Int. 1997. Vol. 43. № 3. P. 477.
27. Timoshenko A.V., Gorudko I.V., Cherenkevich S.N. et al. // FEBS Lett. 1999. Vol. 449. P. 75.
28. Timoshenko A.V., Gorudko I.V., Kaltner H. et al. // Mol. Cell. Biochem. 1999. Vol. 197. № 1-2. P. 137.
29. Timoshenko A.V., Gorudko I.V., Andre S. et al. // Biosci. Rep. 2000. Vol. 20. № 3. P. 199.
30. Горудко И.В., Тимошенко А.В. // Биохимия. 2000. Т. 65. Вып. 8. С. 1107.
31. Они же // Там же. 2001. Т. 66. Вып. 3. С. 359.
32. Черенкевич С.Н., Хмельницкий А.И., Драпеза А.И. и др. // Биофизика. 1989. Т. 34. № 1. С. 45.
33. Сидерко В.М., Эпштейн О.Л., Хмельницкий А.И., Кулинкович О.Г. // Высокомолекулярные соединения. 2000. Т. 42Б. № 9. С. 1598.
34. Зайцев М.А., Лобан В.А., Эпштейн О.Л. и др. Низкоразмерные системы. Мн., 1997. С. 28.
35. Зайцев М.А., Хмельницкий А.И., Черенкевич С.Н. и др. Низкоразмерные системы. Мн., 1998. С. 49.
36. Василевская Н.В., Хмельницкий А.И., Черенкевич С.Н. и др. // Сборник материалов XII научно-технической конференции «Датчик-2000». Судак, 2000. С. 127.
37. Василевская Н.В., Хмельницкий А.И., Черенкевич С.Н. и др. Низкоразмерные системы. Мн., 2000. С. 24.
38. Володько Л.В., Хмельницкий А.И., Черенкевич С.Н. // ЖПС. 1979. Т. 31. № 1. С. 70.
39. Луневич А.Я., Хмельницкий А.И., Чаранкевич С.М. і інш. // Весці АН БССР. Сер. біял. навук. 1984. № 3. С. 70.
40. Луневич А.Я., Хмельницкий А.И., Черенкевич С.Н. и др. // Биофизика. 1983. Т. 28. № 2. С. 238.

41. Хмельницкий А. И., Черенкевич С. Н., Комяк А.И. и др. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1982. № 3. С. 16.
42. Хмельницкий А.И., Черенкевич С. Н. // Биофизика. 1982. Т. 27. № 3. С. 550.
43. Они же // ЖПС. 1980. Т. 32. № 5. С. 857.
44. Ховратович Н.Н., Новикова Т.М., Хмельницкий А.И. и др. // ЖПС. 1998. Т. 65. № 2. С. 196.
45. Novikova T.M., Loban V.A., Prokoshina N.A. et al. *Advances in Synergetics*. 1996. P. 87.
46. Черенкевич С.Н., Хмельницкий А.И. // Сборник научных трудов по республиканской программе фундаментальных исследований «Фотон-БГУ» «Оптика и спектроскопия молекулярных и надмолекулярных функциональных систем». Мн., 2000. С. 187.
47. Денисов А.А., Молчанов П.Г., Черенкевич С.Н. // Изв. инж. акад. 1997. № 1(3)/3. С. 140.
48. Денисов А.А., Мартинович Г.Г., Молчанов П.Г. и др. // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44. № 6. С. 397.
49. Писаревский А.Н., Андрианов В.Т., Крот В.И. // Докл. АН БССР. 1967. Т. 11. С. 538.
50. Крот В.И., Спитковский Д.М., Писаревский А.Н. и др. // Биофизика. 1974. Т. 19. С. 10.
51. Егоров А.С., Крот В.И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1982. № 2. С. 5.
52. Писаревский А.Н., Андрианов В.Т., Спитковский Д.М. и др. // Радиобиология. 1969. Т. 9. С. 608.
53. Ландо Д.Ю., Франк-Каменецкий М.Д. // Мол. биология. 1975. Т. 9. № 6. С. 856.
54. Крот В.И., Миканович В.И., Стецепко А.И. // Химиотерапия опухолей в СССР. 1985. Вып. 43. С. 22.
55. Грушевская Г.В., Крот В.И. // *Studia Biophysica*. 1983. Vol. 96. № 3. P. 61.
56. Горбацевич С.К., Комяк А.И., Гулис И.М. // ЖПС. 1982. Т. 36. № 3. С. 460.
57. Горбацевич С.К., Гулис И.М., Комяк А.И. и др. // Там же. Т. 37. № 1. С. 92.
58. Они же // Там же. № 2. С. 306.
59. Они же // Там же. 1984. Т. 40. № 4. С. 583.
60. Они же // Там же. № 5. С. 773.
61. Горбацевич С.К., Аль-Мутавалли Маад Сабри // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1985. № 3. С. 22.
62. Горбацевич С.К., Михневич С.Ю., Покотило О.Ю. // ЖПС. 2000. Т. 67. № 1. С. 38.
63. Горбацевич С.К., Смирнова О.Ю. // Там же. Т. 67. № 6. С. 708.
64. Горбацевич С.К., Сахарук С.А. // Там же. 1996. Т. 63. № 1. С. 113.
65. Они же // Там же. 1997. Т. 64. № 2. С. 164.
66. Горбацевич С.К., Михневич С.Ю. // Там же. 1999. Т. 66. № 5. С. 648.
67. Буров Л.И., Горбацевич С.К., Томин В.И. // Там же. 1997. Т. 64. № 3. С. 353.
68. Горбацевич С.К., Рубанов А.С., Толстик А.Л. // Опт. и спектр. 1999. Т. 87. № 5. С. 813.

Поступила в редакцию 10.07.2001.

80

лет

БЕЛОРУССКОМУ
ГОСУДАРСТВЕННОМУ
УНИВЕРСИТЕТУ



УДК 33:517.9

М.М. КОВАЛЕВ

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКЕ В БГУ

The article summarizes the results received in Belorussian State University in the area of mathematical economics and decision theory.



Ковалев Михаил Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой экономической информатики и математической экономики, декан экономического факультета. Основные направления научных исследований – теория принятия решений, математическая экономика.

Автор и соавтор 450 публикаций, в том числе шести монографий и трех учебных пособий.

Начало экономико-математическим исследованиям в БГУ положил научный семинар, организованный в 1968 г. профессором В.А. Емеличевым (позднее этим семинаром стал руководить М.М. Ковалев). Из участников экономико-математического семинара вышли многие доктора и кандидаты наук, посвятившие свою научную деятельность математической экономике, исследованию операций и теории принятия решений, экономической информатике: М.К. Кравцов, В.Е. Микульский, А.А. Просяной, В.А. Пирьянович, Н.Н. Писарук, А.А. Запорожец, А.Г. Гарновский, Н.А. Наумович, А.П. Крачковский, Э. Гирлих и В. Хоппе (Германия), П. Миланов и Е. Димов (Болгария), А. Качкаров и Х. Шунгаров (Россия), А. Рамазанов (Азербайджан), Г. Болоташвили и А. Топчишвили (Грузия), Сварна Редди (Индия), Гассан Фуити и Аль-Сальти (Сирия), Курума (Гвинея), Буй Кат Тьонг, До Зуй Чинь и Нгуен Нгия (Вьетнам).

Семинар продолжает свою работу сегодня уже на экономическом факультете, организованном в 1999 г., где сегодня достаточно хорошо представлены научные исследования в области математической экономики, финансовой инженерии и экономической информатики.

Экономико-математические исследования продолжают также на факультетах прикладной математики и информатики, механико-математическом. Значительные результаты в области оптимального управления получены в БГУ под руководством профессора Р. Габасова. Его ученики исследовали и чисто экономические проблемы [1, 2], подготовили учебные пособия по математической экономике [3, 4].

С 1972 г. в БГУ начала складываться научная школа по эконометрике профессора Ю.С. Харина [5–8]. Подготовленное на экономическом факультете учебное пособие С.А. Бородича [9], а также практические исследования по эконометрике, широко ведущиеся в БГУ совместно с Национальным банком [10–12], способствуют повышению уровня эконометрических исследований.

С появлением в Беларуси рынка страховых услуг возник интерес к проблемам актуарной математики, исследования в этой области возглавил профессор Г.А. Медведев [13] (см. также [14, 15]).

Задачи размещения производств, исследование сетевых задач и транспортных многогранников

Изучение задач регионального размещения, специализации и унификации производств в Беларуси было центральным в первых опытах ученых БГУ по математическому моделированию экономических процессов [16–19]. Именно эти задачи послужили толчком к разработке оригинального метода построения последовательности планов [20], синтезировавшего идеи метода ветвей и границ и динамического программирования. Позднее этот метод, дополненный различными идеями сокращения перебора вариантов, нашел применение при решении задач оптимального планирования на предприятиях, в объединениях и в различных отраслях народного хозяйства, в частности на белорусском заводе «Азовкабель» при выборе портфеля заказов.

В теоретическом плане наиболее значимые результаты были получены по транспортной задаче – модельной в линейном программировании. Впервые данную задачу поставил главный интендант Наполеона, выдающийся французский ученый Монж*. Позднее ей уделяли внимание лауреаты Нобелевской премии Л.В. Канторович и Купманс. Белорусские ученые глубоко исследовали множество всех вариантов транспортных планов как для простых задач Монжа, так и для существенных усложнений: моделирующих, например, многопродуктовость [22, 23]. Результаты были обобщены в монографии В.А. Емеличева, М.М. Ковалева и М.К. Кравцова [24], которая сразу же после издания получила признание и была переведена в немецком академическом издательстве и в издательстве Кембриджского университета. В дальнейшем ученые БГУ много внимания уделили изучению сетевых задач оптимизации, которые в современной глобальной (иногда ее называют информационно-сетевой) экономике становятся главным модельным инструментом.

Методы оптимального распределения ресурсов

Если понимать экономику как науку о рациональном использовании ограниченных ресурсов, то модели и методы их оптимального распределения являются центральными в математической экономике. Вместе с тем термином *allocation problems* определяется конкретный класс экономико-математических моделей вида:

$$\begin{aligned} \max \sum_{i=1}^n f_i(x_i), \\ \sum_{i=1}^n x_i = K \end{aligned}$$

* Современная трактовка свойства Монжа дана в [21].

при различных дополнительных ограничениях. Здесь K – наличный ресурс, $f_i(x_i)$ – эффективность его использования в секторе i . Ученые БГУ данному классу моделей уделяли много внимания [25, 26]. Основными результатами, признанными за рубежом [27, 28], являются следующие:

- описаны все классы дополнительных ограничений, при которых greedy-решения, т. е. решения, построенные алгоритмами координатного и бикоординатного подъема, являются оптимальными [29–32];

- из ненадежных методов построены композиции, обладающие высокой точностью [33, 34];

- построены модели оптимального управления активами и пассивами коммерческого банка [35]. В частности, полиматроидные подходы, предложенные для общих задач распределения ресурсов, в последнее время были успешно применены для задач диагностики банка и формирования оптимального инвестиционного портфеля [36].

Выпуклый дискретный анализ

Выпуклые функции – основной инструмент в математической экономике. Исследование экономических задач с неделимыми ресурсами потребовало построения дискретного аналога выпуклого анализа. Одна из его возможных моделей была построена в цикле работ [37–43] на основе функций, заданных на частично упорядоченных множествах, обладающих свойством монотонности градиентов – приращений функций вдоль цепей. Благодаря развитому в этих работах аппарату выпуклости на множествах, упорядоченных частичным порядком, были исследованы сложностные оценки задачи поиска локальных экстремумов выпуклых функций дискретного аргумента, основанные на установленных связях с проблематикой монотонных булевых функций многозначной логики [44]. Построены оптимальные, по Шеннону, алгоритмы максимизации выпуклых и субмодулярных на решетках функций. Установлены верхние границы sgf -оракульной трудоемкости нового метода поиска экстремумов – метода центрального элемента [45].

Выяснена связь выпуклых и матроидных структур на основе концепции выпуклости, по Менгеру, в координатных решетках (координатная выпуклость) и найдены необходимые условия совпадения локальных и глобального максимумов [46]. Исследована возможность точного решения задач целочисленного программирования дискретными аналогами градиентных методов. В частности, полностью описаны классы задач, точно решаемых алгоритмами координатного и бикоординатного подъема, и их обобщений [46].

Дана аксиоматизация обобщенных матроидных структур в координатных решетках, для которых выполнена только одна матроидная аксиома – аксиома Штейница; установлены связи подобных матроидных структур и выпуклых в менгеровском смысле множеств. В частности, предложен метод индуцирования полиматроидов потоками в сетях и на его основе построены методы решения наиболее общей потоковой задачи с полиматроидными ограничениями и выпуклыми стоимостными функциями. Доказано, что бикоординатные алгоритмы (алгоритмы замен) решают любую задачу выпуклой дискретной оптимизации лишь в случае, когда допустимое множество есть обобщенный суперматроид [32].

Предложены методики оценки точности градиентных алгоритмов максимизации выпуклых функций на различных подмножествах целочислен-

ной решетки, с помощью которых получен ряд неулучшаемых оценок; из оценок точности алгоритмов координатного спуска с растяжением градиентов, в частности, вытекает ряд известных результатов для задач о рюкзаке, покрытии, задач целочисленного программирования с неотрицательными параметрами, коммивояжера [47, 48].

Матроидный подход применен для разработки новых методов декомпозиции [49] параметрического анализа [50], сетевых [51] и гиперболических задач [52].

В целом результаты по применению порядковой выпуклости и матроидного подхода были суммированы в монографии [53].

Теория коллективного выбора (агрегирование предпочтений)

Аксиомы, математические модели и теоремы коллективного выбора служат для формализации конкретных ситуаций в распределении затрат и благ при различных представлениях о справедливости, иначе говоря – для поиска компромисса между равенством и эффективностью.

Вместе с тем теория коллективного выбора, безусловно, имеет более широкое применение – от проблем голосования и принятия других важных общественных решений до локальных задач принятия решений рейтинга экономических субъектов (банков, государств, университетов). Фундаментальная проблема теории оптимального выбора – агрегирование индивидуальных предпочтений, т. е. построение коллективного предпочтения. Для этого важно иметь линейное описание многогранника предпочтений. Первые результаты в этом направлении, исследующие обобщения перестановочных полиматроидов [54], были получены в монографии [24] и развиты в многочисленных статьях М.М. Ковалева, Э. Гирлиха, А.М. Исаченко, А.А. Запорожца, Д.М. Василькова (см. [55, 56]). Новый подход был сформулирован в [57] как метод порождения описаний многогранника линейных порядков, или, как его еще называют, *linear ordering polytope*, или *approval-voting polytope*.

Полученные теоретические результаты по многограннику *linear ordering problem* были успешно применены в самых разных моделях агрегирования предпочтений:

- анализа и ранжирования инновационных проектов [58];
- выявления победителей в тендерах [59];
- надежности банков [60];
- инвестиционного риска государств [61];
- сертификации университетов [62];
- сравнительного анализа и сертификации программного обеспечения на примере автоматизированных банковских систем [63].

Исследование оптимумов Парето

Общеизвестна роль оптимумов Парето в экономической теории и практике. Начиная с работы [64], В.А. Емеличевым, М.К. Кравцовым и М.М. Ковалевым совместно с учеными из Запорожья и Магдебурга было предпринято масштабное изучение структуры множества оптимумов Парето в задачах с неделимыми ресурсами, т. е. в многокритериальных задачах линейного целочисленного программирования [65–69]. Исследования велись в двух направлениях: первое – оценка числа и сложности нахождения оптимумов Парето, второе – стабильность и устойчивость оптимумов Парето при различных возмущениях исходных данных. В частности, описаны

ситуации со стабильным множеством Парето, найдены формулы для радиусов устойчивости и стабильности.

Проблема устойчивости изучалась не только для оптимумов Парето, но и для других определений эффективных планов, например, оптимальных, по Смейлу, Слейтеру. Результаты по устойчивости, квазиустойчивости и стабильности паретовских оптимумов могут послужить хорошим инструментом в моделировании траекторий устойчивого экономического роста.

Игровые модели экономики

Аппарат теории игр экономисты-математики БГУ использовали не так уж часто. Тем не менее значительный интерес представляет обобщение классических матричных игр, введенное Н.Н. Писаруком (см., например, [70]), с помощью зависимых смешанных стратегий:

$$\sum p_i = 1, p_i \geq 0, i = 1, \dots, n,$$

$$r_2(I) \leq \sum_{i \in I} p_i \leq r_1(I), I \subset \{1, \dots, n\},$$

где r_1 и r_2 – соответственно субмодулярная и супермодулярная функции [53].

Дополнительные ограничения на смешанные стратегии без существенных усложнений позволили существенно разнообразить практические ситуации, моделируемые с помощью подобных обобщений матричных игр. В частности, были построены интересные модели севооборота в условиях неопределенностей с типом будущей летней погоды. В дальнейшем Н.Н. Писаруком с помощью аппарата субмодулярных функций были получены оригинальные результаты для игр на сетях [71], которые нашли приложение в транспортной логистике.

Оптимальное управление производственными процессами

Задачи производственного менеджмента и логистики в экономико-математическом направлении наиболее часто находят практическое применение, а методы их решения иногда прямо встраиваются в гибкие производственные системы. По данному направлению в Институте технической кибернетики АН БССР сложилась мирового уровня школа ученых-математиков, возглавляемая В.С. Танаевым. Кратко коснемся некоторых прилегающих к ним по тематике работ экономико-математического направления, развиваемых в БГУ:

- в 1980-е гг. широко применялись в СССР и в ГДР разработанные модели оптимальной стандартизации и унификации [71–74];
- для классической задачи линейного программирования о рационе в 1990-х гг. были построены новые оригинальные модели – минимизации невязок в нелинейной модели [75], что позволило М.А. Воробьеву создать универсальную программу «рацион», применяющуюся для расчета смеси в технологических процессах на десятках комбикормовых заводов СНГ. Позднее был создан универсальный пакет оптимального принятия решений [76];
- существенные результаты были получены в [77] по классической задаче Л. Канторовича – задаче раскроя, на основе которых А.Г. Тарновским создана программа раскроя, внедренная на многих белорусских станкостроительных предприятиях;
- широко применялись на практике модели оптимальной синхронизации производственных процессов [78–80];

- в [81] дан анализ полуонлайновых алгоритмов многопроцессурных расписаний загрузки оборудования;

- многообразны модели, разработанные в период 1975–1989 гг. в отраслевой НИЛ горнохимических предприятий БГУ для планирования и анализа экономических показателей «Беларуськалия» (см., например, [80–82]);

- цельная система эволюционных моделей производственных процессов на заводе «Карл Цес Йена», которые только сегодня начинают широко применяться в экономике, была построена совместно с учеными Йенского университета в 1985–1987 гг. [83].

- ряд работ посвящен моделям выбора оптимального парка оборудования.

Обобщение моделей Леонтьева

Много внимания экономисты-математики БГУ уделяли обобщению и применению в белорусской практике классических моделей Леонтьева [87, 90]. В частности, предложен декомпозиционный подход к межотраслевой модели Леонтьева, состоящий из двух этапов: передел ресурсов и производство потребительских благ [57].

Многие из полученных результатов были обобщены в учебных пособиях [90, 91].

1. Калитин Б.С. // Бел. экон. журн. 1999. № 1. С. 120.
2. Калитин П.С. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 1. С. 42.
3. Альсевич В.В. Математическая экономика. Мн., 1998.
4. Альсевич В.В., Габасов Р., Глушенков В.С. Оптимизация линейных экономических моделей. Мн., 2000.
5. Харин Ю.С., Малюгин В.И. и др. Пакет прикладных программ СЭМП: Система эконометрического моделирования и прогнозирования. Мн., 1996.
6. Kharin Yu., Pogatch P. On statistical estimation of systems of simultaneous equations under time varying coefficients. Research Memorandum. Univ. of Leicester, 1998. № 98/7.
7. Хацкевич Г.А. Эконометрическое моделирование и анализ неустойчивых экономических процессов. Мн., 2000.
8. Харин Ю.С., Малюгин В.И. и др. Основы имитационного и статистического моделирования. Мн., 1997.
9. Бородич А.С. Вводный курс эконометрики. Мн., 2000.
10. Возный А.В., Бородич А.С. // Квартальный бюллетень клуба экономистов. Мн., 2000. С. 39.
11. Ковалев М.М. // Банк. весн. 2001. № 4. С. 8.
12. Ковалев М.М., Швайко П.Л. // Бел. банк. бюл. 2000. № 3. С. 51.
13. Медведев Г.А. Математические модели финансовых рисков. Мн., 1999.
14. Аванесов Э.Т., Ковалев М.М., Руденко В.Г. Финансово-экономические расчеты: анализ инвестиций и контрактов. Мн., 1998.
15. Казанцева О., Ковалев М. 10 уроков актуарной математики для инвесторов. Мн., 1998.
16. Емеличев В.А., Шлефрин В.И. // Экономика и мат. методы. 1968. Т. 4. Вып. 1.
17. Емеличев В.А., Клебанов И.Ф., Комлик В.И. // Материалы Межрегионального семинара ООН по размещению промышленности и региональному развитию. Мн., 1969.
18. Емеличев В.А., Ковалев М.М. // Изв. АН БССР. 1970. № 6. С. 65; 1972. № 1. С. 27. См. также: Емеличев В. А., Ковалев М. М. // Журн. выч. математики и мат. физики. 1972. № 12. С. 1312. (Англ. пер: Emelicev V., Kovalev M. On local minima in the transport problem with Schur-concave function. USSR Comput. Math. Phys. 1972. 12. № 5. P. 282.)
19. Медведев В.Ф., Емеличев В.А. // Семинар по экономическим моделям, включая планирование комплексных (крупномасштабных) проектов развития. Женева, 1981.
20. Емеличев В.А., Комлик В.И. Метод построения последовательности планов для решения задач дискретной оптимизации. М., 1981.

21. Ковалев М.М., Запорожец А.А., Гирлих Э. // Докл. НАН Беларуси. 1998. Т. 42. № 1. С. 38–44. См. также: Girlich E., Kovalev M., Moshensky A. Conventy and Monge arrays. Magdeburg University. Preprint Math. 1993. № 12. S. 22; Girlich E., Kovalev M., Zaporozhets A. Subcones of submodular functions (subclasses of Monge matrices). Otto-von-Guericke University, 1994. № 29.
22. Емеличев В.А., Кравцов М.К. // Экономика и мат. методы. 1983. Т. 19. Вып. 2.
23. Емеличев В.А., Ковалев М.М. // Кибернетика. 1982. № 6. С. 54.
24. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. М., 1981. (Англ. пер.: Yemelichev V., Kovalev M., Kravtsov M. Polytopes, graphs and optimization. Cambridge University Press, 1984; нем. пер.: Emelicev V., Kovalev M., Kravcov M. Polyeder, Graphen, Optimierung. Berlin, 1985.)
25. Kovalev M., Girlich E. (ed.). Diskrete Optimierung. Yena, 1985.
26. Ковалев М.М. Дискретная оптимизация (целочисленное программирование). Мн., 1977.
27. Kovalev M., Kotov V. An analysis of greedy solution for traveling salesman problem. USSR Comput. Math. and Math. Pphys. 1981. 4. S. 1035; Evaluation of gradient algorithms for knapsack and traveling salesman problems. Waterloo, 1991.
28. Гирлих Э., Ковалев М.М., Запорожец А.А. // Докл. АН Беларуси. 1998. 42. № 1. С. 38. См. также: Kovalev M., Zaporozhets A. The fast greedy algorithm for resource allocation problems with polimatroidal constraints. Magdeburg, 1994. № 16; Girlich E., Kovalev M., Zaporozhets A. // Optimization. 1996. Vol. 37. P. 73.
29. Емеличев В.А., Овчинников В.Г. // Докл. АН БССР. 1983. Т. 2. № 11. С. 972.
30. Ковалев М.М., Запорожец А.А. // Докл. АН Беларуси. 1992. 36. № 9-10. С. 786.
31. Ковалев М.М. // Докл. АН БССР. 1983. 27. № 7. С. 584.
32. Ковалев М.М., Нисарук Н.Н. // Там же. 1984. Т. 24. № 11. С. 971.
33. Ковалев М.М., Котов В.М. // Вести. Белорус. ун-та. 1985. Сер. 1. № 3. См. также: Kotov V., Kovalev M. // Math. Methods Oper. Res. 1996. 43. № 2. P. 169.
34. Ковалев М.М., Котов В.М. // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 11. С. 969.
35. Абражевич И., Ковалев М.М. // Банк. весн. 1990. № 6. С. 44.
36. Ковалев М.М., Шибекко И.Т. // Фин. анализ. 1997. № 9-10.
37. Ковалев М.М. // Докл. АН БССР. 1980. Т. 24. № 2. С. 113.
38. Girlich E., Kovaliov M. Nichtlineare Discrete Optimierung. Berlin, 1981.
39. Ковалев М.М. Градиентные // Кибернетика. 1985. № 6. С. 77. (Англ. пер.: Kovalev M. // Cybernetics. 1985. 21. P. 819.)
40. Димов Е.Т., Ковалев М.М. // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28. № 1. С. 9.
41. Ковалев М.М. // Кибернетика. 1985. № 5. С. 122.
42. Ковалев М.М. // Кибернетика. 1985. № 2. С. 11. (Англ. пер.: Kovalev M. // Cybernetics. 1985. 21. P. 160.)
43. Ковалев М.М., Нгуен Нгиа // Вестн. Белорус. ун-та. 1990. № 1. С. 46.
44. Ковалев М.М., Миланов Н. // Журн. выч. мат. и мат. физ. 1984. 24. № 5. С. 786. / Англ. пер.: Kovalev M., Milanov P. // USSR Comput. Math., Math. Phys. 1984. 24. P. 106. См. также: Milanov P., Kovaljov M. On the accuracy of gradient algorithm in solving integer optimization problems. C.R. Acad. Bulgarie Science, 1980. 33. P. 1459.
45. Ковалев М.М., Мощенский А.В. // Докл. АН Беларуси. 1992. 36. № 2. С. 111. См. также: Girlich E., Kovaljow M., Moshchensky A. // Optimization. 1998. № 44; Kovalev M.M., Moshchenckij A.V. // Discrete Math. Appl. 1992. 2. № 1. P. 45.
46. Ковалев М.М., Писарук Н.Н. // ДАН СССР. 1985. 284. № 6. С. 1322. (Англ. пер.: Kovalev M., Pisaruk N. // Sov. Phys. Dokl. 1985. 30. № 10. P. 830.)
47. Гляков П.В., Ковалев М.М., Котов В.М. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1987. № 1. С. 36.
48. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Рамазанов А.Б. // Дискрет. математика. 1990. Т. 2. Вып. 2. С. 127. (Англ. пер.: Emelichev V., Kovalev M., Ramazanov A.V. // Discrete Math. Appl. 1992. 2. № 2. P. 119.)
49. Kovalev M., Pisaruk N. // J. Comput. Syst. Sci. Int. 1993. 31. № 5. P. 142.
50. Ковалев М.М., До Зуй Чинь // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1990. № 3. С. 35.
51. Ковалев М.М., Писарук Н.Н. // Там же. 1984. № 2. С. 41. См. развернутый вариант: Kovalev M., Pisaruk N. // USSR Comput. Math., Math. Phys. 1985. 25. № 3. P. 72.

52. Ковалев М.М., Кочкаров А.М. // Математические модели и методы оптимального планирования. Мн., 1980. С. 50.
53. Ковалев М.М. Матроиды в дискретной оптимизации. Мн., 1987.
54. Горуневич С.А., Ковалев М.М. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. 1980. № 6. С. 9.
55. Ковалев М.М., Васильков Д.М. // Докл. АН Беларуси. 1994. 38. № 5. С. 19. См. также: Girlich E., Kovalev M., Vasilkov D. // Eur. J. Oper. Res. 1997. 101. № 1. P. 74; Kovalev M.M., Vasilkov D.M. // European J. Oper. Res. 1995. 80. P. 446.
56. Girlich E., Kovalev M. // Math. Meth. of Oper. Res. 1996. 43. P. 143.
57. Bolotaschvili G., Kovalev M., Girlich E. // SIAM J. Discr. Math. 1999. Vol. 12. № 3. P. 326.
58. Ковалев М.М., Нехорошева Л.Н. // Вестн. БГУ. 1995. № 1. С. 54.
59. Ковалев М.М., Курбацкий А.Н., Листопад Н.И. // Информатизация адукацыі. 1997. № 1. С. 68.
60. Ковалев М.М., Шибеско И.Т. // Банк. весн. 1999. № 6. С. 30.
61. Горбач А.В., Ковалев М.М. // Вести. ассоциации бел. банков. 2000. № 33.
62. Козулин А.В., Ковалев М.М. // Бел. банк. бюл. 2001. № 23. С. 18.
63. Ковалев М.М., Новик В.В. // Банк. бюл. 1997. № 37. С. 30.
64. Ковалев М.М. // Вопросы совершенствования планирования народного хозяйства. Мн., 1973.
65. Emelicev V., Perepeliza V. // Optimisatization. 1991. 22. P. 903.
66. Girlich E., Kovalev M., Kravzov M. K-Summen und k-Product-Bottleneck-Vectoroptimierungsprobleme. Magdeburg, 1995. № 20.
67. Бердышева Р.А., Емеличев В.А. // Кибернетика и системный анализ. 1997. № 4. С. 83.
68. Гирлих Э., Ковалев М.М., Кравцов М.К., Янушкевич О.А. // Там же. 1998. № 1. С. 81. См. также: On conditions of solvability of combinatorial multicriteria optimization by linear convolution of criteria. Magdeburg, 1996. № 26.
69. Гирлих Э., Ковалев М.М., Кравцов М.К. // Кибернетика и системный анализ. 1999. № 6.
70. Писарук Н.Н., Редди С.К. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1991. С. 44.
71. Pisaruk N. // Math. of Oper. Res. 1999. Vol. 24. № 4. P. 817.
72. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Гирлих Э. // 18. Intern. Wiss. Koll. TH Pfenau. 1973.
73. Kovaljov M., Girlich F. // Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization. 1977. 8. № 1. S. 89.
74. Girlich E., Kovaljow M. // Math. Operations und Statist. 1980. II. № 3. S. 547; Eine Problemklasse der nichtlinearen diskreten Optimierung // Wiss. Z. Fridrich Schiller-Univ. Jena, 1980. 29. S. 327.
75. Ковалев М.М., Топчишвили Л. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1991. № 1. С. 39.
76. Воробьев М.А., Ковалев М.М., Наумович Н.А. Системы программного обеспечения решения задач оптимального планирования. М., 1990.
77. Ковалев М.М., Тарновский А.Г. // Комбинаторно-алгебраические вероятностные методы дискретного анализа. Н. Новгород, 1991. См. также: Girlich E., Kovalev M., Zaporozhets A. Planning of rectangle materials cutting on a 2-guillotine. Magdeburg, 1994. № 22.
78. Hoppe V., Kovalev M. // Optimization 1990. 21. № 1. S. 109.
79. Idem // Operation Research Spektrum. 1994. 16. P. 203.
80. Пирьянович В.А., Ковалев М.М., Федулов Л.В., Кудрявцев П.Д. // Изв. вузов (Горный журнал). 1977. № 5.
81. Girlich E., Kotov V., Kovalev M. Semi on-line algorithm for multiprocessor Scheduling Problem with a given total Processing time. Magdeburg, 1998. № 5.
82. Ковалев М.М., Пирьянович В.А. // Кибернетика. 1982. № 1 С. 100.
83. Вальк М., Гирлих Э., Ковалев М. Проблемы максимального проектирования систем. Мн., 1988.
84. Fedulow L., Kovaljow M., Lyska W., Schoch M. // Bergbautechnik. 1982. № 6. S. 342.
85. Ковалев М.М., Листопад Н.И. // ДАН НАН Беларуси. 2000. Т. 44. № 6. С. 104.
86. Емеличев В.А., Микульский В.Е. // Автоматизир. системы плановых расчетов в респ. плановых органах. Мн., 1977. Вып. 9.

87. Приходченко О. И., Кравцов М. К. // Математические модели и методы в автоматизированных системах. Мн., 1975.
88. Воробьев М. А., Ковалев М. М. // Весті АН Беларусі. 1992. № 5-6. С. 37.
89. Ковалев М. М. // Финансовый анализ. 1997. № 2-3.
90. Кавалёу М. М., Пісарук М. М. Сучаснае лінейнае праграмаванне. Мн., 1998. 260 с.
91. Норре V., Kovalev M. Wirtschaftsmathematik Bestimmung optimalen Lösungen mit PC. TU Ilmenau, 1995.

Поступила в редакцию 21.06.2001.

УДК 336.763.055.4

Г. А. МЕДВЕДЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТОИМОСТИ ФИНАНСОВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, КОГДА СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС ЦЕНЫ АКТИВА ИМЕЕТ ПЛАВАЮЩУЮ ОТРАЖАЮЩУЮ НИЖНЮЮ ГРАНИЦУ

The formulae for pricing of financial derivatives are derived under assumption that the price of underlying asset follows the stochastic process with lower reflecting boundary.



Медведев Геннадий Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики. Основные направления научных исследований – анализ стохастических процессов, статистический анализ данных (оценивание и предсказание). Автор и соавтор 197 публикаций, среди них четыре научных, восемь учебных изданий.

В своей знаменитой работе об определении цен опционов [1], отмеченной в 1997 г. Нобелевской премией, Блэк и Шоулс получили дифференциальное уравнение для цен финансовых производных, зависящих от цены акции, по которой в период контрактного срока не выплачиваются дивиденды. Основной смысл рассуждений, которые использовали авторы, состоит в том, что составляется безрисковый портфель из двух финансовых активов: финансовой производной и акции. Затем доход от такого портфеля приравнивается к доходу, получаемому от такой же по величине инвестиции при безрисковой ставке. В модели Блэка–Шоулса принимается, что процесс цены S_t лежащего в основе финансового актива следует геометрическому броуновскому движению, возбуждаемому стандартным винеровским процессом W_t :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1)$$

Такой процесс S_t является нестационарным, так как его дисперсия (при $\sigma > 0$) и математическое ожидание (при $\mu > 0$) неограниченно возрастают. Кроме того, уровень $S_t = 0$ является поглощающей границей для этого процесса, так как, попадая на нее, процесс остается нулевым в течение всего последующего времени. Эти свойства делают его не адекватным реальным условиям при решении задач стационарно действующего рынка ценных бумаг. Поэтому вместо такого процесса для описания изменения цены лежащего в основе финансового актива Терпуговым предложено использовать «процесс, возвращающийся к среднему с квадратным корнем» (mean reverting square root process), введенный в практику финансового анализа

Коксом, Ингерссолом и Россом [2] при описании процесса безрисковой процентной ставки

$$dS_t = (\alpha - \beta S_t) dt + \sigma \sqrt{S_t} dW_t, \quad S_t > 0. \quad (2)$$

Такой процесс принимает только неотрицательные значения, и для него существует стационарный режим с конечным математическим ожиданием и дисперсией, а уровень $S_t = 0$ является отражающей границей, так как, попадая на этот уровень, процесс с вероятностью единица начинает увеличиваться. Вместе с тем более естественно полагать, что нижней границей изменения цены лежащего в основе финансового актива может быть не нуль, а некоторое значение, которое может существенно от нуля отличаться. Поэтому можно также рассмотреть более общий процесс [3], который с практической точки зрения удобно представить в виде (предложено в [4])

$$dS_t = k(\theta - S_t) dt + \sqrt{2kD \frac{S_t + x}{\theta + x}} dW(t), \quad S_t > -x, \quad (3)$$

где параметры модели имеют следующий смысл: x – параметр, определяющий нижнюю отражающую границу процесса S_t ; $\theta = E\{S\}$, $D = Var\{S\}$ (для стационарного, т. е. установившегося, режима); $k > 0$ – коэффициент, определяющий скорость перехода к стационарному режиму.

Отличие этой модели от модели (2) легко увидеть, если переобозначить $k = \beta$, $\alpha = k\theta$, $\sigma = \sqrt{2kD/(\theta + x)}$. Форма такого представления удобна, потому что модель задается параметрами, имеющими ясный физический смысл.

Заметим, что в [4] использование этой модели при статистическом анализе доходностей ценных бумаг казначейства США для долгосрочных (от 10 до 30 лет) облигаций за период с октября 1993 по октябрь 1996 г. дало следующий результат: при средней доходности около 7 % уровень отражающей границы был около 2 %. Отсюда видно, что если финансовая производная основывается на доходности облигаций, то имеет смысл при определении ее стоимости использовать модель (3). Подробный сравнительный анализ вероятностных свойств моделей (2) и (3) содержится в [5].

Введем следующие обозначения:

$V(S, \tau)$ – стоимость финансовой производной в момент t , если наблюдаемое значение цены лежащего в основе финансового актива в этот момент времени $S_t = S$, а срок до его погашения $\tau = T - t$. T – дата погашения лежащего в основе финансового актива. $V(S, \tau) = 0$ для всех $S \leq 0$;

$Y(S, q) = \int_0^{\infty} V(S, \tau) e^{-q\tau} d\tau$ – преобразование Лапласа функции $V(S, \tau)$ по

переменной τ . Согласно свойствам функции стоимости $V(S, \tau)$ считаем, что $Y(S, q) = 0$, $\partial Y(S, q)/\partial S = 0$ и $\partial^2 Y(S, q)/\partial S^2 = 0$ для всех $S \leq 0$;

$$Z(p, \tau) = \int_{-x}^{\infty} V(S, \tau) e^{-p(S+x)} dS = e^{-px} \int_0^{\infty} V(S, \tau) e^{-pS} dS;$$

$$z(p, q) = \int_{-x}^{\infty} Y(S, q) e^{-p(S+x)} dS = e^{-px} \int_0^{\infty} Y(S, q) e^{-pS} dS;$$

$$V_0(S) = V(S, 0); \quad z_0(p) = \int_{-x}^{\infty} V_0(S) e^{-p(S+x)} dS = e^{-px} \int_0^{\infty} V_0(S) e^{-pS} dS.$$

Таким образом, функция $V(S, \tau)$ стоимости финансовой производной может быть найдена как обратное преобразование Лапласа функции $Z(p, \tau)$ по переменной p .

Используя обычный прием, можно получить следующие результаты для случая, когда при отсутствии арбитража цена лежащего в основе финансового актива изменяется согласно модели (3). Пусть финансовой производной является портфель, состоящий частично из банковского счета и частично из указанного финансового актива. Тогда в отсутствие арбитража стоимость такой финансовой производной (ФП) определяется уравнением на частных производных с краевым условием, определяющим его стоимость на дату погашения $V(S, 0) = V_0(S)$:

$$-\frac{\partial V}{\partial \tau} + rS \frac{dV}{dS} + \frac{\sigma^2}{2}(S+x) \frac{d^2 V}{dS^2} = rV(S, \tau).$$

Здесь и далее для краткости обозначено $\sigma^2 = 2kD/(\theta + x)$.

Заметим, что $\int_0^{\infty} \frac{\partial V(S, \tau)}{\partial \tau} e^{-q\tau} d\tau = qY(S, q) - V_0(S)$, поэтому уравнение для функции $Y(S, q)$ имеет вид

$$\frac{\sigma^2}{2}(S+x) \frac{d^2 Y}{dS^2} + rS \frac{dY}{dS} - (q+r)Y(S, q) + V_0(S) = 0. \quad (4)$$

С учетом того, что $Y(S, q) = 0$ и $\partial Y(S, q)/\partial S = 0$ для всех $S \leq 0$, а также

$$\int_{-x}^{\infty} \frac{\partial Y(S, q)}{\partial S} e^{-p(S+x)} dS = pz(p, q) - Y(0, q) = pz(p, q),$$

$$\int_{-x}^{\infty} \frac{\partial^2 Y(S, q)}{\partial S^2} e^{-p(S+x)} dS = p^2 z(p, q),$$

$$\int_{-x}^{\infty} S \frac{\partial Y(S, q)}{\partial S} e^{-p(S+x)} dS = -(1+px)z(p, q) - p \frac{\partial z(p, q)}{\partial p},$$

$$\int_{-x}^{\infty} S \frac{\partial^2 Y(S, q)}{\partial S^2} e^{-p(S+x)} dS = -p^2 \frac{\partial z(p, q)}{\partial p} - (2+px)pz(p, q),$$

уравнение для функции $z(p, q)$ получается в виде

$$\left(rp + \frac{\sigma^2}{2} p^2 \right) \frac{dz}{dp} + (q + 2r + p\sigma^2 + rpx)z(p, q) = z_0(p). \quad (5)$$

Симметричная форма однородного уравнения (5) имеет вид

$$\frac{dz}{z} = -\frac{q + 2r + p\sigma^2 + rpx}{rp + \sigma^2 p^2 / 2} dp,$$

что можно записать как

$$\frac{dz}{z} = -\frac{q + 2r}{r} \frac{dp}{p} - \left(\frac{2rx}{\sigma^2} - \frac{q}{r} \right) \frac{dp}{p + 2r/\sigma^2}.$$

Отсюда получаем решение однородного уравнения в форме

$$\ln z = \left(-\frac{q + 2r}{r} \ln p - \left(\frac{2rx}{\sigma^2} - \frac{q}{r} \right) \ln \left(p + \frac{2r}{\sigma^2} \right) \right) + \ln C,$$

т. е. если для краткости положить $a = 2r/\sigma^2 = r(\theta + x)/(kD)$, это выражение можно записать в виде

$$z = C \frac{(p+a)^{-ax+q/r}}{p^{2+q/r}}.$$

Наконец, считая константу C зависимой от p и подставляя выражение для z в таком виде в неоднородное уравнение (5), получим соотношение для определения функции $C(p)$:

$$\frac{dC}{dp} = \frac{a}{r} \frac{p^{+q/r} z_0(p)}{(p+a)^{1-ax+q/r}}.$$

Отсюда непосредственно получаем

$$C(p) = \frac{a}{r} \int_0^p \frac{t^{1+q/r} z_0(t)}{(t+a)^{1-ax+q/r}} dt.$$

Таким образом, решение уравнения (5) имеет вид

$$z(p, q) = \frac{a(p+a)^{-ax}}{rp^2} \int_0^p \left(\frac{(p+a)t}{p(t+a)} \right)^{q/r} \frac{tz_0(t)dt}{(t+a)^{1-ax}},$$

где $a = 2r/\sigma^2 = r(\theta + x)/(kD)$.

Теперь вспомним, что $z(p, q)$ – это преобразование Лапласа от $Y(S, q)$ по S , которое, в свою очередь, является преобразованием Лапласа от $V(S, \tau)$ по τ . Переменная q в выражении для $z(p, q)$ встречается только в показателе подынтегрального выражения. Заметим, что преобразование Лапласа от показательной функции c^q является δ -функцией Дирака, т. е. равна $\delta(\tau + \ln c)$. Поэтому обратное преобразование Лапласа от функции $z(p, q)$ по q имеет вид

$$Z(p, \tau) = \frac{a(p+a)^{-ax}}{rp^2} \int_0^p \delta\left(\tau - \frac{1}{r} \ln \left(\frac{p(t+a)}{(p+a)t} \right)\right) \frac{tz_0(t)dt}{(t+a)^{1-ax}}. \quad (6)$$

При замене переменной интегрирования с t на $u = \frac{1}{r} \ln \left(\frac{p(t+a)}{t(p+a)} \right)$ выражение (6) для $Z(p, \tau)$ преобразуется к виду

$$\frac{a(p+a)^{-ax}}{rp^2} \int_0^\infty \delta(\tau - u) \frac{a^{1+ax} p^2 r (p+a)^{ax} e^{urax}}{[p(e^{ur} - 1) + ae^{ur}]^{2+ax}} z_0 \left(\frac{ap}{p(e^{ur} - 1) + ae^{ur}} \right) du.$$

Согласно свойствам δ -функции при положительном сроке погашения $\tau > 0$ интеграл в выражении (6) легко вычисляется, а обратное преобразование Лапласа функции $z(p, q)$ по переменной q принимает вид

$$Z(p, \tau) = e^{r\tau ax} \left(\frac{a}{p(e^{r\tau} - 1) + ae^{r\tau}} \right)^{2+ax} z_0 \left(\frac{ap}{p(e^{r\tau} - 1) + ae^{r\tau}} \right). \quad (7)$$

Из этих трех сомножителей правой части (7) два первых зависят от x , что отражает влияние свойств модели (3). Естественно, что при $x = 0$ различия между моделями (3) и (2) исчезают и исчезает отличие (7) от результата Терпугова.

Значения параметра x , имеющие практический смысл (т. е. обеспечивающие неотрицательность цены S_t), лежат в интервале $(-\theta, 0)$. Заметим также, что уровень $S_t = -x$ является отражающей границей (см. [4]) только тогда, когда выполняется дополнительное условие $(\theta + x)^2 > D$. При $x = 0$ оно выполняется, когда стандартное отклонение цены актива будет меньше

среднего ее значения (что на практике обычно всегда выполняется). Поэтому существует некоторая “ниша” для применения модели (3) при определении цен финансовых производных, когда $\sqrt{D} - \theta < x < 0$.

Приведем примеры использования описанного подхода для определения цен некоторых финансовых производных. Как известно, функции платежей для фьючерсов и европейских опционов-колл имеют вид соответственно $V_0(S) = S - K$ и $V_0(S) = \max\{0, S - K\}$, где K – цена исполнения контракта. Для преобразований Лапласа этих функций соответственно имеем равенства

$$z_0(p) = \left(\frac{1}{p^2} - \frac{K}{p} \right) e^{-px} \quad \text{и} \quad z_0(p) = \frac{1}{p^2} e^{-p(K+x)}. \quad (8)$$

Подставляя эти функции в (7), получим в случае фьючерсов

$$Z_\Phi(p, \tau) = e^{-B_\Phi} \left[\frac{1}{p^2} \left(\frac{A}{p+A} \right)^{\alpha x} - \frac{Ke^{-r\tau}}{p} \left(\frac{A}{p+A} \right)^{\alpha x+1} \right] e^{\frac{AB_\Phi}{p+A}}, \quad (9)$$

где обозначено $A = ae^{r\tau}/(e^{r\tau} - 1)$, $B_\Phi = ax/(e^{r\tau} - 1)$. и в случае опционов-колл

$$Z_{OK}(p, \tau) = e^{-B_{OK}} \frac{1}{p^2} \left(\frac{A}{p+A} \right)^{\alpha x} e^{\frac{AB_{OK}}{p+A}}, \quad (10)$$

где $B_{OK} = a(x+K)/(e^{r\tau} - 1)$.

Для получения обратного преобразования функций $Z_\Phi(p, \tau)$ и $Z_{OK}(p, \tau)$ можно воспользоваться известными формулами [6] для обратных преобразований

$$\exp\left(\frac{\alpha}{p}\right) - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{S}\right)^{1/2} I_1(2\sqrt{\alpha S}),$$

$$\frac{1}{p^{1+\nu}} \exp\left(\frac{\alpha}{p}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{S}{\alpha}\right)^{\nu/2} I_\nu(2\sqrt{\alpha S}), \quad \nu > -1.$$

Используя эти соотношения, из (9) можно получить стоимость фьючерса

$$V_\Phi(S, \tau) = \frac{1}{A} \int_0^{AS} e^{-t-B_\Phi} \left(\frac{t}{B_\Phi}\right)^{\frac{\alpha x-1}{2}} (1+AS - AK e^{-r\tau} - t) I_{\alpha x}(2\sqrt{B_\Phi t}) dt. \quad (11)$$

Стоимость опциона-колл для $\alpha x > 0$ получается из (10)

$$V_{OK}(S, \tau) = \frac{1}{A} \int_0^{AS} e^{-t-B_{OK}} \left(\frac{t}{B_{OK}}\right)^{(\alpha x-1)/2} (AS - t) I_{\alpha x-1}(2\sqrt{B_{OK} t}) dt. \quad (12)$$

1. Black F., Scholes M. // J. of Political Economy. 1973. Vol. 81. P. 637.
2. Cox J., Ingersoll J., Ross S.A. // Econometrica. 1985. Vol. 53. № 2. P. 385.
3. Medvedev G.A., Cox S.H. // Proceedings of 6-th Intern. AFIR Symposium. Nuremberg, 1996. P. 913.
4. Ilieva N.G. // EURO Working Group on Financial Modelling. 26-th Meeting. Trondheim, 2000. P. 1.
5. Eadem // Proceedings of 10-th Intern. AFIR Symposium. Tromsø, 2000. P. 367.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований: В 2 т. М., 1969. Т. 1.

Поступила в редакцию 14.05.2001.

УДК 519.62

В.В. БОБКОВ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Recursive type numerical algorithms for initial value problem in case of normal form first order ordinary differential systems are proposed. They are based on trygonometrical approximation and are oriented on use of natural steps of numerical observation.



Бобков Владимир Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики. Лауреат Государственной премии БССР в области науки и техники. Основное направление научных исследований – методы численного решения дифференциальных уравнений.

Автор и соавтор около 200 публикаций, в том числе шести монографий и четырех учебных пособий.

Данная работа посвящена проблеме построения методов численного решения начальной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$u'(t) = f(t, u(t)). \quad (1)$$

Главное внимание при этом уделяется возможности повышения точности приближенного решения не столько ценой уменьшения шага сетки численного интегрирования, сколько путем специальной (рекурсивного типа) организации вычислительного процесса с поэтапным учетом достигнутого приближения к искомому решению системы (1).

Для удобства записи исходную задачу Коши рассмотрим в локальной постановке:

$$u'(x) = f(x, u(x)), \quad t \leq x \leq t + \tau, \quad (2)$$

$$u(t) = y. \quad (3)$$

Конструируемые ниже вычислительные алгоритмы станем ориентировать на случай произвольного фиксированного значения τ , величина которого может предопределяться лишь естественными требованиями к шагу наблюдения соответствующего (2), (3) моделируемого реального процесса и не призвана, вообще говоря, служить основным рычагом управления точностью окончательного результата численного интегрирования. Под τ , в частности, можно понимать и сумму нескольких шагов вспомогательной сетки, избранной для построения исходного приближения к искомому решению. Не останавливаясь здесь более детально на проблеме построения стартового приближения $u_0(x)$ к решению задачи (2), (3), отметим лишь, что наряду с упомянутым способом выбора начального приближения с использованием на вспомогательной сетке какого-либо численного метода в качестве $u_0(x)$ можно избрать также и более простую конструкцию, даже типа $u_0(x) = y$ или, скажем,

$$u_0(x) = y + \frac{1 - \exp(-\mu\xi)}{\mu} f, \quad (4)$$

где $f = f(t, y)$, $\mu \geq \|f_u(t, y)\|$, $\xi = x - t$.

О некоторых свойствах приближения вида (4) смотри, например, в работе [1].

Локальная ошибка $\varepsilon_0(x) = u(x) - u_0(x)$, $\varepsilon_0(t) = 0$, начального приближения $u_0(x)$ является, очевидно, решением следующей задачи Коши:

$$\varepsilon_0'(x) = f(x, u_0(x) + \varepsilon_0(x)) - u_0'(x), \quad \varepsilon_0(t) = 0, \quad t \leq x \leq t + \tau. \quad (5)$$

С точки зрения сложности численного решения задача (5) мало отличается от задачи (2), (3). Принципиально более доступной в этом отношении является начальная задача

$$\delta_0'(x) = f(x, u_0(x)) - u_0'(x), \quad \delta_0(t) = 0, \quad t \leq x \leq t + \tau, \quad (6)$$

для приближения $\delta_0(x)$ к $\varepsilon_0(x)$.

В силу (6) функцию $\delta_0'(x)$ можно трактовать (см., например, [2]) как невязку приближенного решения $u_0(x)$ на исходной задаче (2), (3). Значение этой невязки может быть вычислено в любой точке рассматриваемого отрезка. Добавляя $\delta_0(x)$ к $u_0(x)$, можно получить новое приближение $u_1(x)$ к точному решению задачи (2), (3):

$$u_1(x) = u_0(x) + \int_t^x [f(z, u_0(z)) - u_0'(z)] dz, \quad t \leq x \leq t + \tau. \quad (7)$$

Так как (см. (7))

$$u_1'(x) = f(x, u_0(x)), \quad t \leq x \leq t + \tau,$$

то для локальной погрешности $\varepsilon_1(x) = u(x) - u_1(x)$, $\varepsilon_1(t) = 0$, можно записать следующую задачу Коши:

$$\varepsilon_1'(x) = f(x, u_1(x) + \varepsilon_1(x)) - f(x, u_0(x)), \quad \varepsilon_1(t) = 0, \quad t \leq x \leq t + \tau.$$

Тем самым по аналогии с (6) приближение $\delta_1(x)$ к $\varepsilon_1(x)$ можно задавать посредством начальной задачи

$$\delta_1'(x) = f(x, u_1(x)) - f(x, u_0(x)), \quad \delta_1(t) = 0, \quad t \leq x \leq t + \tau,$$

что позволяет (подобно (7)) получить новое приближенное решение

$$u_2(x) = u_0(x) + \delta_0(x) + \delta_1(x)$$

исходной задачи, где

$$\delta_0(x) = \int_t^x [f(z, u_0(z)) - u_0'(z)] dz, \quad (8)$$

$$\delta_1(x) = \int_t^x [f(z, u_1(z)) - f(z, u_0(z))] dz. \quad (9)$$

Продолжая и далее детально рассмотренный процесс построения последовательности приближений к решению задачи (2), (3), можно по аналогии

с предыдущим (см., в частности, (8), (9)) записать следующую процедуру последовательных локальных поправок:

$$u_{i+1}(x) = u_0(x) + \delta_0(x) + \delta_1(x) + \dots + \delta_i(x), \quad i = 0, 1, \dots, \quad (10)$$

$$\delta_j(x) = \int_t^x [f(z, u_j(z)) - f(z, u_{j-1}(z))] dz = \int_t^x \rho_j(z) dz, \quad j = 1, 2, \dots, i. \quad (11)$$

Набор формул (10), (11) должен быть дополнен, конечно, стартовым соотношением (8).

Описанный способ рекурсивного уточнения начального приближения $u_0(x)$ к решению задачи (2), (3) является, очевидно, естественным обобщением широко известного простейшего процесса последовательных приближений Пикара, привлекательного прежде всего свойствами сходимости (см., например, [3, с. 48, 58]). Уровень эффективности численной реализации такого подхода к построению решения исходной задачи в определяющей степени будет зависеть, конечно, от избранного способа приближенного нахождения интеграла с переменным верхним пределом в (11).

Рассмотрим один из возможных вариантов конструирования вычислительных алгоритмов на основе данного подхода.

Для нахождения в аналитической форме приближения к интегралу из (11), а также с целью улучшения свойств сходимости соответствующего процесса приближений и ослабления влияния ошибок округлений воспользуемся возможностями тригонометрической аппроксимации.

Предварительно в каждом из интегралов в равенствах (11) (в том числе, конечно, и в случае (8)) проведем замену переменной интегрирования

$$z = t + \frac{\tau}{2}(1 + \gamma). \quad (12)$$

Тогда будем иметь (в случае (8) – аналогично)

$$\delta_j(x) = \frac{\tau^\beta}{2^{-1}} \int_{-1}^1 \rho_j \left(t + \frac{\tau}{2}(1 + \gamma) \right) d\gamma, \quad j = 1, 2, \dots, i, \quad (13)$$

где (см. (11), (12))

$$\beta = \tau \frac{(x-t)}{\tau} - i, \quad -1 \leq \beta \leq 1. \quad (14)$$

Теперь уже в (13) с учетом (14) можно использовать следующую тригонометрическую замену:

$$\gamma = -\cos \varphi. \quad (15)$$

Тем самым взамен (13) получим равенства

$$\delta_j(x) = \frac{\tau^\alpha}{2_0} \int_0^\alpha \rho_j \left(t + \tau \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \sin \varphi d\varphi = \frac{\tau^\alpha}{2_0} \int_0^\alpha g_j(\varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{\tau^\alpha}{2_0} \int_0^\alpha q_j^*(\varphi) d\varphi, \quad j = 1, 2, \dots, i, \quad (16)$$

где (см. (14), (15))

$$\alpha = \arccos(-\beta) = \arccos(1 - 2(x-t)/\tau), \quad 0 \leq \alpha \leq \pi. \quad (17)$$

Принимая во внимание (16), (17), равенствам (8), (10), (11) можно придать более удобную для записи форму последовательных приближений:

$$u_{i+1}(x) = u_i(x) + \frac{\tau^\alpha}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} q_i^*(\varphi) d\varphi, \quad i = 0, 1, \dots \quad (18)$$

При этом для единообразия в (18) приняты следующие обозначения:

$$q_m^*(\varphi) = f\left(t + \tau \sin^2 \frac{\varphi}{2}, u_n\left(t + \tau \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)\right) \sin \varphi - \\ - f\left(t + \tau \sin^2 \frac{\varphi}{2}, u_{m-1}\left(t + \tau \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)\right) \sin \varphi, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

$$q_0^*(\varphi) = \left[f\left(t + \tau \sin^2 \frac{\varphi}{2}, u_0\left(t + \tau \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)\right) - u_0'\left(t + \tau \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) \right] \sin \varphi. \quad (20)$$

По построению функции $q^*(\nu)$, $i = 0, 1, \dots$, являются нечетными и 2π -периодическими, при этом $q^*(0) = q^*(\pi) = 0$. Поэтому для подынтегральной функции в каждом из равенств (18) (см. также (19), (20)) естественно использовать следующее разложение в ряд Фурье (см., например, [4, с. 219, 227, 229]):

$$q_i^*(\varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} b_{i,j}^* \sin j\varphi, \quad (21)$$

$$b_{i,j}^* = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} q_i^*(\varphi) \sin j\varphi d\varphi. \quad (22)$$

Для приближенного вычисления интеграла в (22) разобьем отрезок интегрирования $[0, \pi]$ на n равных частей точками

$$\alpha_k = k\pi/n, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (23)$$

и представим каждый из интегралов по частичному отрезку длиной π/n квадратурной формулой трапеций. Тогда можно записать (см., например, [5, с. 144]) разложение

$$b_{i,j}^* = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} q_i^*(\alpha_k) \sin j\alpha_k + r_{i,j}, \quad (24)$$

где

$$r_{i,j} = r_{i,j}(n) = -\frac{\pi^3}{12n^2} s_{i,j}''(\eta), \quad s_{i,j}(\varphi) = q_i^*(\varphi) \sin j\varphi, \quad 0 < \eta \leq \pi.$$

Пренебрегая в (24) остаточным членом $r_{i,j}$ рассмотренной составной квадратурной формулы трапеций и сохранив в разложении (21) лишь первые $n-1$ слагаемых, мы приходим к приближенным равенствам

$$q_i^*(\varphi) \approx q_{i,n}^*(\varphi) = \sum_{j=1}^{n-1} b_{i,j,n}^* \sin j\varphi, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (25)$$

где

$$b_{i,j,n}^* = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} q_i^*(\alpha_k) \sin j\alpha_k \approx b_{i,j}^*. \quad (26)$$

Точные соотношения из (25), (26) с учетом (23) совпадают с соответствующими формулами интерполяции синусами (см., например, [4, с. 244]).

Как известно (см., скажем, предыдущую ссылку), такого рода интерполяционный многочлен в случае функций с ограниченной вариацией (см. [4, с. 219]) сходится к заданной функции в каждой точке рассматриваемого отрезка, когда число узлов интерполирования неограниченно возрастает. Этим данная интерполяция выгодно отличается от степенной для случая равностоящих узлов.

Подставив полученное приближенное представление функции $q^*(\varphi)$ (см. (23), (25), (26)) в правую часть (18) и выполнив интегрирование, приходим к следующим рекурсивным формулам:

$$y_{i+1}(x) = y_i(x) + \frac{\tau}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} b_{i,j} (1 - \cos j\alpha). \quad i = 0, 1, \dots \quad (27)$$

Здесь (см. (18)–(22), (26))

$$y_0(x) = u_0(x), \quad y_m(x) = u_m(x), \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$b_{i,j} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} q_i(\alpha_k) \sin j\alpha_k \approx b_{i,j}^*, \quad q_0(\varphi) = q_0^*(\varphi),$$

$$q_m(\varphi) = f\left(t + \tau \sin^2 \frac{\varphi}{2}, y_m\left(t + \tau \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)\right) \sin \varphi -$$

$$- f\left(t + \tau \sin^2 \frac{\varphi}{2}, y_{m-1}\left(t + \tau \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)\right) \sin \varphi, \quad m = 1, 2, \dots$$

С учетом (17) рекурсивные равенства (27) могут быть приведены к виду

$$y_{i+1}(x) = y_i(x) + \frac{\tau}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} b_{i,j} \left(1 - T_j\left(1 - 2\frac{x-t}{\tau}\right)\right), \quad i = 0, 1, \dots,$$

где через $T_j(v)$, $j = 1, 2, \dots, n-1$, обозначены многочлены Чебышева (первого рода), для нахождения которых можно использовать, скажем, рекуррентные формулы

$$T_{m+1}(v) = 2vT_m(v) - T_{m-1}(v), \quad m = 1, 2, \dots, n-2 \quad (T_0(v) \equiv 1, T_1(v) = v).$$

В заключение заметим, что аналогичные построения можно провести и в варианте интерполяции косинусами, если в качестве приближаемой рассмотреть не всю подынтегральную функцию в (16), а аппроксимировать лишь ее первый множитель $g_j(\varphi)$.

1. Бобков В.В. // Вестн. Витеб. ун-та. 2000. № 1(15). С. 78.
2. Бобков В.В. // Диф. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1174.
3. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М., 1990.
4. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М., 1961.
5. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Начала теории вычислительных методов. Интерполирование и интегрирование. Мн., 1983.

Поступила в редакцию 07.05.2001.

П.А. МАНДРИК

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

The method of dual integral equations with L -parameter is offered in theory of the parabolic PDEs (heat conduction equations) with mixed/unmixed boundary conditions on a surface of a researched half-space solid. Method allows determining analytical regularities of time-space development of appropriate temperature fields.



Мандрик Павел Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета прикладной математики и информатики. Основное направление научных исследований – аналитические и численные методы исследования динамических систем, моделируемых начальными и краевыми задачами для дифференциальных уравнений.

Автор и соавтор 70 публикаций, среди которых одна монография, два учебных пособия, одно научно-популярное издание.

На примере осесимметричной двумерной задачи теплопроводности рассмотрены аналитические методы, позволяющие исследовать нестационарные процессы теплопереноса при наличии смешанных граничных условий на поверхности изучаемого изотропного полуограниченного тела. В основе предлагаемого подхода лежат методы сведения исходной дифференциальной задачи к парным интегральным уравнениям в области преобразований Лапласа, парных интегральных уравнений к эквивалентному интегральному уравнению в области изображений Лапласа и, наконец, метод решения последнего.

Пусть требуется решить дифференциальное уравнение

$$\theta_{rr}(r, z, \tau) + r^{-1}\theta_r(r, z, \tau) + \theta_{zz}(r, z, \tau) = a^{-1}\theta_\tau(r, z, \tau), \quad r, z, \tau > 0, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\theta(r, z, 0) = 0 \quad (2)$$

и краевыми условиями ($r = 0$ и $r, z \rightarrow \infty$)

$$\theta_r(0, z, \tau) = 0, \quad (3)$$

$$\theta_r(\infty, z, \tau) = \theta_z(r, \infty, \tau) = 0, \quad (4)$$

где $\theta(r, z, \tau) = T(r, z, \tau) - T_0$ – избыточная температура; r, z – цилиндрические координаты; τ – временная координата; $T_0 = \text{const}$ – начальная температура; $a > 0$ – коэффициент теплопроводности полуограниченного изотропного тела.

В общем случае на поверхности $z = 0$ могут быть заданы смешанные граничные условия третьего рода с поверхностными источниками тепла внутри круга ($0 < r < R$) и вне круга ($R < r < \infty$):

$$\alpha_1\theta(r, 0, \tau) - \lambda\theta_z(r, 0, \tau) = \alpha_1(T_{1c}(r, \tau) - T_0) + q_1(r, \tau), \quad 0 < r < R; \quad (5)$$

$$\alpha_2\theta(r, 0, \tau) - \lambda\theta_z(r, 0, \tau) = \alpha_2(T_{2c}(r, \tau) - T_0) + q_2(r, \tau), \quad R < r < \infty, \quad (6)$$

где $\lambda > 0$ – коэффициент теплопроводности полуограниченного изотропного тела; α_1, α_2 – коэффициенты теплообмена на поверхности $z = 0$ со

средами, имеющими нестационарные температуры $\bar{T}_c(r, \tau)$ и $T_{2c}(r, \tau)$ в соответствующих диапазонах изменения цилиндрической координаты r ; $q_1(r, \tau)$ и $q_2(r, \tau)$ – соответствующие плотности поверхностных источников тепла.

Решение задачи (1)–(6) будем искать с помощью последовательного применения интегральных преобразований Лапласа и Ханкеля [1]

$$\bar{\theta}(r, z, s) = \int_0^{\infty} \theta(r, z, \tau) \exp(-s\tau) d\tau, \quad \operatorname{Re} s > 0, \quad (7)$$

$$\bar{\theta}_H(p, z, s) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \theta(r, z, \tau) \exp(-s\tau) J_0(pr) r dr d\tau, \quad \operatorname{Re} s > 0. \quad (8)$$

В дальнейшем по умолчанию будем предполагать $\operatorname{Re} s > 0$ всякий раз, когда будет встречаться комплексный L -параметр s .

Применяя (8) к уравнению (1), учитывая условия (2)–(4) и используя формулу обращения для интегрального преобразования Ханкеля, можно показать, что

$$\bar{\theta}_H(p, z, s) = \frac{1}{p} \bar{A}(p, s) \exp\left(-z\sqrt{p^2 + \frac{s}{a}}\right), \quad (9)$$

$$\bar{\theta}(r, z, s) = \int_0^{\infty} \bar{A}(p, s) \exp\left(-z\sqrt{p^2 + \frac{s}{a}}\right) J_0(pr) dp, \quad (10)$$

где $J_0(pr)$ – функция Бесселя вещественного аргумента первого рода нулевого порядка [2], $\bar{A}(p, s)$ – вспомогательная аналитическая функция-изображение.

Учитывая вид решения (10) при $z=0$, из смешанных граничных условий (5), (6) после применения к ним преобразования Лапласа приходим к парным интегральным уравнениям с L -параметром

$$\int_0^{\infty} \left(\alpha_1 + \lambda\sqrt{p^2 + \frac{s}{a}}\right) \bar{A}(p, s) J_0(pr) dp = \alpha_1 \left(\bar{T}_{1c}(r, s) - \frac{T_0}{s}\right) + \bar{q}_1(r, s), \quad (11)$$

$$0 < r < R,$$

$$\int_0^{\infty} \left(\alpha_2 + \lambda\sqrt{p^2 + \frac{s}{a}}\right) \bar{A}(p, s) J_0(pr) dp = \alpha_2 \left(\bar{T}_{2c}(r, s) - \frac{T_0}{s}\right) + \bar{q}_2(r, s), \quad (12)$$

$$R < r < \infty,$$

из которых необходимо определить аналитическую функцию-изображение $\bar{A}(p, s)$.

Отметим, что при $s \rightarrow 0$ (что соответствует $\tau \rightarrow \infty$) из уравнений (11), (12) мы приходим к парным стационарным интегральным уравнениям, полученным и исследованным, например, в [3, 4] при решении уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями. Кроме того, заметим, что при $\alpha_1 \rightarrow \infty$, $\alpha_2 \rightarrow \infty$ мы имеем нестационарную задачу Дирихле, а при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ – нестационарную задачу Неймана для изотропного полупространства при несмешанных разрывных граничных условиях соответственно первого и второго родов, которые решаются непосредственно по формулам обращения интегралов Лапласа и Ханкеля.

Здесь мы будем рассматривать только случаи смешанных граничных условий (5), (6), которые приводят к соответствующим парным интегральным уравнениям с L -параметром [5].

Если на поверхности $z=0$ в круге $0 < r < R$ задана функция избыточной температуры $\bar{T}_{1c}(r, \tau) - \bar{T}_0$, а вне круга действует поверхностный тепловой источник плотности $q_2(r, \tau)$, который обменивается теплом по закону Ньютона со средой, имеющей температуру $T_{2c}(r, \tau)$ и коэффициент теплообмена α_2 , то парные интегральные уравнения (11), (12) при $\alpha_1 \rightarrow \infty$, $\alpha_2 \geq 0$ преобразуются к виду

$$\int_0^{\infty} [1 - \bar{g}_1(p, s)] \bar{C}_1(p, s) J_0(pr) dp = \bar{T}_{1c}(r, s) - \frac{T_0}{s}, \quad 0 < r < R, \quad (13)$$

$$\int_0^{\infty} \bar{C}_1(p, s) \sqrt{p^2 + \frac{s}{a}} J_0(pr) dp = \lambda^{-1} \bar{f}_2(r, s), \quad R < r < \infty, \quad (14)$$

$$\text{где } \bar{C}_1(p, s) = \left[1 + \frac{\alpha_2}{\lambda \sqrt{p^2 + \frac{s}{a}}} \right] \bar{A}(p, s),$$

$$\bar{g}_1(p, s) = \frac{\alpha_2}{\lambda \sqrt{p^2 + \frac{s}{a}} + \alpha_2}, \quad \bar{f}_2(r, s) = \alpha_2 \left(\bar{T}_{2c}(r, s) - \frac{T_0}{s} \right) + \bar{q}_2(r, s).$$

Если на поверхности $z=0$ в круге $0 < r < R$ действует поверхностный тепловой источник плотности $q_1(r, \tau)$, который обменивается теплом по закону Ньютона со средой, имеющей температуру $T_{1c}(r, \tau)$ и коэффициент теплообмена α_1 , а вне круга задана функция избыточной температуры $\bar{T}_{2c}(r, \tau) - T_0$, то из (11), (12) при $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \rightarrow \infty$ получаем другую стандартную форму парных интегральных уравнений с L -параметром

$$\int_0^{\infty} [1 - \bar{g}_2(p, s)] \sqrt{p^2 + \frac{s}{a}} \bar{C}_2(p, s) J_0(pr) dp = \lambda^{-1} \bar{f}_1(r, s), \quad 0 < r < R, \quad (15)$$

$$\int_0^{\infty} \bar{C}_2(p, s) J_0(pr) dp = \bar{T}_{2c}(r, s) - \frac{T_0}{s}, \quad R < r < \infty, \quad (16)$$

$$\text{где } \bar{C}_2(p, s) = \bar{A}(p, s), \quad \bar{g}_2(p, s) = -\frac{\alpha_1}{\lambda \sqrt{p^2 + \frac{s}{a}}},$$

$$\bar{f}_1(r, s) = \alpha_1 \left(\bar{T}_{1c}(r, s) - \frac{T_0}{s} \right) + \bar{q}_1(r, s).$$

В общем случае $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$. приходим к парным интегральным уравнениям с l -параметром вида

$$\int_0^{\infty} [1 - \bar{g}(p, s)] \bar{C}(p, s) J_0(pr) dp = \bar{f}_1(r, s), \quad 0 < r < R, \quad (17)$$

$$\int_0^{\infty} \bar{C}(p, s) J_0(pr) dp = \bar{f}_2(r, s), \quad R < r < \infty, \quad (18)$$

$$\text{где } \bar{C}(p, s) = \left(\alpha_2 + \lambda \sqrt{p^2 + \frac{s}{a}} \right) \bar{A}(p, s), \quad \bar{g}(p, s) = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_2 + \lambda \sqrt{p^2 + \frac{s}{a}}}.$$

Таким образом, решение смешанных двумерных осесимметричных задач нестационарной теплопроводности для полупространства при подводе к нему тепла через круг известного радиуса сводится к исследованию стандартных парных интегральных уравнений с L -параметром вида (13), (14), или (15), (16), или (17), (18), из которых требуется определить неизвестные аналитические функции-изображения соответственно $\bar{C}_1(p, s)$, или $\bar{C}_2(p, s)$, или $\bar{C}(p, s)$.

Рассмотрим сейчас метод решения парных интегральных уравнений (13), (14), например, в случае $\bar{f}_2(r, s) = 0$ и $\bar{g}_2(p, s) = 0$, что не нарушает общности, так как, доопределив функцию $\bar{f}_2(r, s)$ нулевым значением на интервале $0 < r < R$, уравнение (14) всегда можно сделать однородным [5], включив известную функцию $\bar{f}_2(r, s)$ в правую часть уравнения (13).

В этом случае интегральные уравнения (13), (14) принимают вид

$$\int_0^{\infty} \bar{A}(p, s) J_0(pr) dp = \bar{T}_{ic}(r, s) - \frac{T_0}{s}, \quad 0 < r < R, \quad (19)$$

$$\int_0^{\infty} \bar{A}(p, s) \sqrt{p^2 + \frac{s}{a}} J_0(pr) dp = 0, \quad R < r < \infty. \quad (20)$$

Введем в рассмотрение новую неизвестную аналитическую функцию $\bar{\varphi}(r, s)$, связанную с функцией $\bar{A}(p, s)$ соотношением

$$\bar{A}(p, s) = \frac{p}{\sqrt{p^2 + \frac{s}{a}}} \int_0^R \bar{\varphi}(t, s) \cos\left(t \sqrt{p^2 + \frac{s}{a}}\right) dt, \quad (21)$$

подстановка которого обеспечивает автоматическое выполнение второго парного уравнения (20) за счет соответствующего разрывного интеграла при $R < r < \infty$ [6].

Подставив (21) в первое парное уравнение (19) и выполнив необходимые преобразования для определения неизвестной аналитической функции-изображения $\bar{\varphi}(r, s)$, приходим к одному интегральному уравнению вида [6]

$$\bar{\varphi}(r, s) - \frac{1}{\pi} \int_0^R \bar{\varphi}(t, s) \bar{K}_1(r, t, s) dt = \bar{F}_1(r, s), \quad 0 < r < R, \quad (22)$$

где

$$\bar{K}_1(r, t, s) = \frac{\sin\left((t-r)\sqrt{\frac{s}{a}}\right)}{t-r} + \frac{\sin\left((t+r)\sqrt{\frac{s}{a}}\right)}{t+r},$$

$$\bar{F}_1(r, s) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{\left[\bar{T}_{ic}(r, s) - \frac{T_0}{s}\right] \mu \cos\left(\sqrt{\frac{s}{a}}(r^2 - \mu^2)\right)}{\sqrt{r^2 - \mu^2}} d\mu.$$

Рассмотрим метод определения неизвестной аналитической функции $\bar{\varphi}(r, s)$ из интегрального уравнения с L -параметром (22) в случае $\bar{T}_{ic}(r, s) = \frac{T}{s} \mp \frac{T_0}{s}$. Суть метода (подобно [7, 8]) состоит в том, что аналитическая функция $\bar{\varphi}(t, s)$ представляется функциональным рядом

$$\bar{\varphi}(t, s) = \frac{1}{s} \exp\left(-R_s \sqrt{\frac{s}{\nu \alpha}}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) (\sqrt{s})^n, \quad (23)$$

а аналитическое ядро $\bar{K}_1(r, t, s)$ рядом

$$\bar{K}_1(r, t, s) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m(t, r) (\sqrt{s})^m,$$

где

$$C_m(t, r) = \frac{\sin\left(m \frac{\pi}{2}\right)}{m!} \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^m \left[(t+r)^{m-1} + (t-r)^{m-1} \right]. \quad (24)$$

Тогда из уравнения (22) после определенных преобразований для определения функциональных коэффициентов $\varphi_n(t)$ получаем рекуррентную формулу

$$\varphi_n(t) = \frac{2}{\pi} (T_c - T_0) D_n(R, t) + \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^n \int_0^R C_m(\xi, t) \varphi_{n-m}(\xi) d\xi, \quad 0 < t < R, \quad (25)$$

где

$$D_n(R, t) = \frac{1}{n!} \left(\frac{R}{\sqrt{a}}\right)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{t}{R}\right)^j \cos\left(j \frac{\pi}{2}\right), \quad \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}.$$

Можно доказать, что функциональные коэффициенты $\varphi_n(t)$, определяемые формулой (25), могут быть записаны в явном виде

$$\varphi_n(t) = 2(T_c - T_0) (\sqrt{a})^{-n} \sum_{i=0}^n b_{n,i} R^{n-i} t^i, \quad 0 < t < R, \quad (26)$$

где числовые коэффициенты $b_{n,i}$ определяются рекуррентно по формуле

$$b_{n,i} = \frac{1}{n! \pi} \binom{n}{i} \cos\left(i \frac{\pi}{2}\right) + \left[1 + (-1)^i\right] \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{j! \pi} \binom{j-1}{i} \sin\left(j \frac{\pi}{2}\right) \sum_{k=0}^{n-j} \frac{1}{j+k-i} b_{n-j,k},$$

причем очевидно, что $b_{n,i} = 0$ для нечетных значений индекса i .

Подставив выражение $\varphi_n(t)$ из (26) в (23) и воспользовавшись формулами (21), (10), находим искомое решение в области изображений.

Отметим, что решение аналогичных смешанных задач математической физики возможно и в случае рассмотрения иных тел и способов задания смешанных граничных условий. Так, например, в работах [9, 10] определены закономерности развития двумерных нестационарных температурных полей в неограниченной изотропной пластине при смешанных на окружности граничных условиях на одной из ее поверхностей и любых несмешанных граничных условиях на другой ее поверхности; метод решения нестационарной задачи нагрева полупространства через бесконечно длинную полосу на его поверхности предложен в работе [11], а через кольцевую область – в работе [12]; модель изотропного непрозрачного полупространства при тепловом потоке, характерном для лазерного источника тепла, изучена в [13].

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., 1967.
2. Ватсон Г. Н. Теория Бесселевых функций. М., 1949. Ч. 1.
3. Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л., 1977.
4. Sneddon I. Mixed boundary value problems in potential theory. Amsterdam, 1969.

5. Козлов В.П., Мандрик П.А. Системы интегральных и дифференциальных уравнений с L -параметром в задачах математической физики и методы идентификации тепловых характеристик. Мн., 2000.
6. Козлов В.П., Юрчук Н.И., Мандрик П.А. // ИФЖ. 1998. Т. 71. № 4. С. 734.
7. Они же // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1999. № 2. С. 37.
8. Мандрик П.А. // Диф. уравнения. 2001. Т. 37. № 2. С. 238.
9. Козлов В.П., Юрчук Н.И., Мандрик П.А. // ИФЖ. 1999. Т. 72. № 3. С. 555.
10. Мандрик П.А. // ИФЖ. 2000. Т. 73. № 5. С. 902.
11. Он же // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 1. С. 75.
12. Он же // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: Тез. докл. междунар. конф., Минск, Беларусь, 15–19 февр. 2001 г. Мн., 2001. С. 107.
13. Козлов В.П., Мандрик П.А. // ИФЖ. 2000. Т. 73. № 3. С. 637.

Поступила в редакцию 12.03.2001.

УДК 517.983 + 517.984

А.Б. АНТОНЕВИЧ, В.И. БАХТИН, А.В. ЛЕБЕДЕВ

О ДВОЙСТВЕННОСТИ ПО ЛЕЖАНДРУ МЕЖДУ СПЕКТРАЛЬНЫМ РАДИУСОМ И T -ЭНТРОПИЕЙ

The formula for the spectral radius of arbitrary weighted shift operators acting in L^p spaces is established. The formula contains as a component a new dynamic invariant – T -entropy (the mathematical analogue to the thermodynamical entropy). It is proved that the logarithm of the spectral radius and T -entropy are linked by the Legendre transform.



Антоневич Анатолий Борисович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа. Основное направление научных исследований – теория функциональных операторов и порожденных ими операторных алгебр.

Автор 200 публикаций, в том числе пяти монографий, двух учебников.

Бахтин Виктор Иванович – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики и математической физики. Основное направление научных исследований – асимптотический анализ стохастических и динамических систем.

Автор 45 публикаций.

Лебедев Андрей Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математических методов теории управления. Основное направление научных исследований – теория функциональных операторов и порожденных ими операторных алгебр.

Автор 80 публикаций, в том числе трех монографий.

Спектральный радиус и термодинамика. При решении разнообразных математических и физических проблем возникает необходимость ис-

следования спектральных свойств операторов, действующих в пространствах $F(X)$ функций на множестве X , вида

$$([aT]f)(x) = a(x)f(\gamma(x)), \quad f \in F(X), \quad (1)$$

где γ – заданное отображение множества X в себя (описывающее динамику процесса), $(Tf)(x) = f(\gamma(x))$, $f \in F(X)$ – эволюционный оператор, $a(x)$ – некоторая функция и $(af)(x) = a(x)f(x)$ – оператор, задающий “влияние среды” (в частности, в статистической физике используются функции a вида $a = e^\varphi$, где φ – фазовый потенциал исследуемой системы). В “чисто математических” задачах оператор aT обычно называют *взвешенным композиционным оператором*, или оператором *взвешенного сдвига*.

С физической точки зрения наибольший интерес представляют равновесные состояния и предельные характеристики системы. С такими характеристиками и связаны спектральные свойства оператора aT . Так, в статистической физике величина $\ln r(aT)$ есть *термодинамический потенциал* системы. В математике необходимость подсчета спектрального радиуса возникает как в связи с проблемами разрешимости различных классов уравнений и устойчивости их решений, так и в других задачах, в частности в теории случайных процессов, функция $\ln r(aT)$ играет роль *производящей функции* для кумулянтов предельной случайной величины.

Напомним, что для термодинамических систем справедлив следующий закон, связывающий основные термодинамические величины:

$$F(\beta) = U(\beta) - TS(\beta), \quad (2)$$

где T – абсолютная температура, $\beta = \frac{1}{kT}$, k – постоянная Больцмана, F – потенциал Гельмгольца (совпадающий с произведением термодинамического потенциала на абсолютную температуру), U – внутренняя энергия системы, S – энтропия.

Кроме того, известно, что $S(\beta)$ выпукло зависит от β и известен вариационный принцип “природа стремится к максимуму энтропии” (при фиксированной внутренней энергии системы).

В настоящей статье получена формула для спектрального радиуса произвольного оператора взвешенного сдвига aT , действующего в пространствах типа L^p . Установленный результат (теорема 2), по сути, является “чисто математическим” аналогом закона (2). При этом использован введенный и исследованный авторами в [1] *новый* “чисто математический” объект – *T-энтропия* (определяемая в терминах *динамической* системы (см. определение 4), обобщающая понятие термодинамической энтропии. Доказано, что $\ln r(aT)$ является преобразованием Лежандра от *T-энтропии*. Необходимо подчеркнуть, что *T-энтропия* не совпадает с известным в теории динамических систем понятием *энтропии*, восходящим к соответствующему объекту теории информации.

Вычисление спектрального радиуса. Краткая история. Пусть $A \subset L(B)$ – подалгебра алгебры $L(B)$ линейных непрерывных операторов, действующих в банаховом пространстве B , изометрически изоморфная

$C(X)$ для некоторого компакта X ; $T \in L(B)$ – некоторый обратимый изометрический оператор, удовлетворяющий условию $TAT^{-1}=A$. Оператор aT , $a \in A$, мы будем называть (абстрактным) *оператором взвешенного сдвига* (с обратимым сдвигом T и весом a). В такой форме может быть получено описание различных операторов взвешенного сдвига, действующих в конкретных банаховых пространствах (см., например, [2]).

Автоморфизм $\hat{T}: A \rightarrow A \dots (\hat{T}(a) = TaT^{-1})$ каноническим образом порождает гомеоморфизм $\gamma: X \rightarrow X$, такой, что $\hat{T}(a) = a \circ \gamma$. В частности, это означает, что $Ta = (a \circ \gamma)T$. Для таких операторов взвешенного сдвига известна следующая формула для вычисления спектрального радиуса $r(aT)$:

$$\ln r(aT) = \max_{\mu \in M_\gamma} \int_X \ln |a| d\mu, \quad (3)$$

где M_γ – множество всех вероятностных γ -инвариантных мер на X .

Гипотеза о справедливости формулы (3) была высказана А.Б. Антоневи-чем и для ряда конкретных ситуаций доказана, например, в [3, 4], где также осуществлено соответствующее явное описание множества M_γ . В общей форме (для произвольного гомеоморфизма γ) формула была доказана А.В. Лебедевым [5] и А.К. Китовером [6]. Приложения формулы (3) к вычислению спектральных радиусов разнообразных операторов взвешенного сдвига приведены в [2].

В ситуации, когда γ – *необратимое* отображение, известные на данный момент результаты, касающиеся соответствующих формул спектрального радиуса, можно разбить на два класса. В первый класс входят результаты, относящиеся к ситуации, когда операторы взвешенного сдвига действуют в пространствах типа $C(X)$ или $L^\infty(X)$. В этом случае формула (3) сохраняет свой вид (см., например, [7]). Во второй класс входят результаты, относящиеся к операторам в пространствах типа $L^p(X)$, $1 < p < \infty$. Здесь до настоящего времени формулы спектрального радиуса были получены только для отображений γ очень специального вида. Оказалось, что они имеют *качественно иную* природу; в них добавляются новые компоненты – различные динамические характеристики γ . Для непрерывного растягивающего k -листного накрытия γ многообразия X в работах Ю.Д. Латушкина и А.М. Стёпина [8, 9] была вскрыта связь между спектральным радиусом оператора взвешенного сдвига, порожденного отображением γ , и топологическим давлением, ассоциированным с γ . Тем самым в силу известного вариационного принципа для топологического давления [10], включающего в себя в качестве компонент интеграл и *энтропию*, был найден вариационный принцип для спектрального радиуса в исследуемой ситуации. В работах А.В. Лебедева и О.В. Маслака [11] с помощью введения новых топологических инвариантов для преобразования γ компакта X был получен ряд оценок для спектрального радиуса, найдено новое доказательство результата Латушкина–Стёпина и показано, что формула (3) и результат Латушкина–Стёпина являются в некотором смысле предельными возможными случаями – в более общей ситуации полученные формулы несправедливы.

Вопрос об общей формуле спектрального радиуса для операторов взвешенного сдвига в пространствах типа $L^p(X)$ и о том, какие компоненты должна содержать эта формула, оставался по-прежнему открытым.

В данной работе такая формула найдена.

2. Основные объекты. Аксиоматика

Модельный пример. Начнем с модельного примера, поясняющего естественность вводимых далее объектов.

Пусть (\bar{X}, Σ, ν) – пространство с вероятностной мерой ν и γ есть измеримое, сохраняющее меру отображение X в себя, т. е. $\nu(\gamma^{-1}\omega) = \nu(\omega)$ для любого $\omega \in \Omega$ (заметим, что это условие, в частности, влечет за собой равенство $\nu(\gamma(X)) = 1$). Рассмотрим пространство $L^p(X, \nu)$, $1 < p < \infty$ и алгебру A операторов умножения на функции $a \in L^\infty(X, \nu)$. Зададим оператор сдвига T , порожденный отображением γ , формулой

$$(Tf)(x) = f(\gamma(x)), \quad f \in L^1(X, \nu). \quad (4)$$

Оператор aT будем называть оператором *взвешенного сдвига* (с весом a). Из (4) следует, что

$$Ta = (a \circ \gamma)T, \quad a \in A. \quad (5)$$

Отметим, что на алгебре $L^\infty(X, \nu)$ отображение (4) задает *эндоморфизм*, т. е. $T(a \cdot b) = T(a) \cdot T(b)$, $a, b \in L^\infty(X, \nu)$. Пусть ξ – разбиение X , образованное прообразами γ , т. е.

$$\xi = \{\gamma^{-1}(y)\}_{y \in X}.$$

Через $\xi(x)$ мы обозначим элемент ξ , содержащий x . Рассмотрим *каноническое фактор-пространство* $(\bar{X}_\xi, \Sigma_\xi, \nu_\xi)$, соответствующее разбиению ξ , и множество *канонических условных мер* $\nu^x(y)$, где $\tau = \xi(x)$ для некоторого x . Эти объекты определяются равенством

$$\int_X f(x) d\nu(x) = \int_{X_\xi} d\nu_\xi(\tau) \int_\tau f(y) d\nu^\tau(y), \quad f \in L^1(X, \nu)$$

(детали см., например, в [12], п. 1.5).

На пространстве $L^\infty(X, \nu)$ зададим оператор E *условного математического ожидания* формулой

$$(Ea)(x) = \int_{\gamma^{-1}(\tau)} a(y) d\nu^{\tau(x)}(y), \quad (6)$$

определенной для почти всех x .

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\|(aT)^n\|_{L^p(X, \nu)} = \left\| E^n \left(\prod_{k=0}^{n-1} |a| \circ \gamma^k \right) \right\|_{L^p(X, \nu)}^{1/p}, \quad (7)$$

и задача о вычислении спектрального радиуса оператора aT сводится к вычислению предела

$$r(aT) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| E^n \left(\prod_{k=0}^{n-1} |a| \circ \gamma^k \right) \right\|_{L^p(X, \nu)}^{1/p^n}.$$

Аксиоматика. Рассмотрения, приведенные в начале раздела, делают естественным введение ряда объектов, позволяющих аксиоматически описать операторы взвешенного сдвига в пространствах типа L^p .

Напомним прежде всего, что если A – полупростая коммутативная банахова алгебра с единицей, то преобразование Гельфанда задает изоморфизм этой алгебры с некоторой подалгеброй алгебры $C(X)$ непрерывных функций на пространстве X максимальных идеалов A . Мы будем отождествлять A с ее образом при преобразовании Гельфанда. Известно (см. [7]) следующее описание эндоморфизмов таких алгебр:

Если $F: A \rightarrow A$ – эндоморфизм полупростой коммутативной алгебры A с единицей, то существуют открыто-замкнутое подмножество $Y \subset X$ и непрерывное отображение $\gamma: Y \rightarrow X$, такие, что

$$(Fa)(x) = \chi(x)a(\gamma(x)), \quad a \in A, \quad x \in X,$$

где χ – характеристическая функция множества Y .

В частности, если $F(1) = 1$, то $Y = X$ и

$$(Fa)(x) = a(\gamma(x)). \tag{8}$$

Пусть теперь F – некоторый эндоморфизм алгебры $C(X)$ вида (8), где $\gamma: X \rightarrow X$ отображение на и E – некоторый положительный левый обратный к F (т. е. $E(a) > 0$, если $a > 0$), удовлетворяющий условию $\|E\| \leq 1$ (ясно, что при этом $\|E\| = 1$). Теперь пример, рассмотренный ранее, и сделанные замечания делают естественными следующие определения.

Определение 1. Пусть $A \subset L(B)$ – подалгебра алгебры $L(B)$ линейных непрерывных операторов, действующих в банаховом пространстве B , изометрически изоморфная $C(X)$ для некоторого компакта X ; F – некоторый эндоморфизм A вида (8) и E – некоторый фиксированный положительный левый обратный к F (т. е. $E(a) > 0$, если $a > 0$), удовлетворяющий условию $E(1) = 1$.

Определение 2. Будем говорить, что оператор $T \in L(B)$ является (абстрактным) оператором сдвига, порожденного F , и aT , $a \in A$, является (абстрактным) оператором взвешенного сдвига (в пространстве типа L^p , $1 < p < \infty$), если

1) выполняется равенство (5),

$$2) \left\| (aT)^n \right\|_{L(B)} = \left\| E^n \left(\prod_{k=0}^{n-1} |a|^p \cdot \gamma^k \right) \right\|_{C(X)}^{\frac{1}{p}}. \tag{9}$$

Замечания. 1) Модельный пример вкладывается в общую схему, и в общей схеме сложность вычисления спектрального радиуса та же самая, что и в модельном примере (ср. (9) и (7)).

2) Если γ – гомеоморфизм (т. е. F – автоморфизм), то $E(a) = a \circ \gamma^{-1}$ и формула (9) имеет более простой вид

$$\left\| (aT)^n \right\|_{L(B)} = \left\| \prod_{k=0}^{n-1} |a| \cdot \gamma^k \right\|_{C(X)}. \tag{10}$$

Именно по этой формуле и вычислялась норма $\left\| (aT)^n \right\|$ при выводе вариационного принципа (3).

2. Формула спектрального радиуса оператора взвешенного сдвига

Через M мы обозначим совокупность всех борелевских вероятностных мер на X , а через M_γ – множество всех γ -инвариантных мер из M .

Определение 3. Пусть $\mu \in M$. Конечное борелевское разбиение $D = \{D_1, \dots, D_n\}$ пространства X назовем μ -правильным, если каждый его элемент имеет внутренние точки, а у его границы есть окрестности сколь угодно малой меры μ .

Определение 4. T -энтропией $\tau(\mu)$ меры $\mu \in M$ относительно заданного оператора E , введенного в определении 2, называется число

$$\tau(\mu) = \inf_{n, D} \frac{\tau_n(\mu, D)}{n},$$

$$\text{где } \tau_n(\mu, D) = \sup_{m \in M} \sum_{D \in D} \mu(D) \ln \frac{E^{*n} m(D)}{\mu(D)}. \quad (11)$$

Здесь инфимум берется по μ -правильным разбиениям D . Считается, что если $\mu(D) = 0$, то соответствующее множеству D слагаемое в (11) обращается в нуль независимо от значения $E^{*n} m(D)$.

Теорема 1 [1]. 1) $\tau(\mu) < 0$ для любой меры $\mu \in M$.

2) Если γ – гомеоморфизм, то $\tau(\mu) = 0$ для любой меры $\mu \in M$.

3) $\tau(\mu)$ является вогнутой и полунепрерывной сверху функцией на M .

Теорема 2. (Вариационный принцип). Для спектрального радиуса оператора aT , введенного в определении 2, справедлива формула

$$\ln [r(aT)] = \max_{M_*} \left(\int_X \ln |a| d\mu + \frac{\tau(\mu)}{p} \right). \quad (12)$$

Замечания. 1) В силу утверждения 2) теоремы 5 в случае, если γ – гомеоморфизм, данная формула переходит в формулу (3).

2) Пусть $\varphi = \ln |a|$, $\lambda(\varphi) = \ln [r(aT)]$, тогда формула (12) означает, что $\lambda(\varphi)$ есть преобразование Лежандра от функции $\tau(\mu)$.

3) Формула (12) вскрывает разделение при вычислении спектрального радиуса на статическую составляющую (первое слагаемое в правой части зависит только от веса a) и динамическую составляющую (второе слагаемое зависит только от сдвига γ).

4) При $p \rightarrow \infty$ формула (12) переходит в формулу (3), и тем самым для пространства типа $C(X)$ и $L^\infty(X)$ восстанавливается формула (3) для произвольного γ .

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь.

1. Антоневиц А.Б., Бахтин В.И., Лебедев А.В. // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44. № 6. С. 7.

2. Антоневиц А.Б., Лебедев А.В. // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. Т. 47. № 5. С. 915.

3. Антоневиц А.Б. // Диф. уравнения. 1975. Т. 11. № 9. С. 1550.

4. Он же // Сиб. мат. журн. 1979. Т. 20. № 3. С. 467.

5. Лебедев А.В. // УМН. 1979. Т. 39. Вып. 5. С. 247.

6. Китовер А.К. // Функцион. анализ и его прил. 1979. Т. 13. Вып. 1. С. 70.

7. Ло Серинь Алиу. Операторы взвешенного сдвига в некоторых банаховых пространствах функций: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Мн., 1981.
8. Латушкин Ю. Д. // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 45. № 6. С. 1241.
9. Латушкин Ю. Д., Стенин А. М. // Функцион. анализ и его прил. 1988. Т. 22. № 4. С. 86.
10. Walters P. // Amer. J. Math. 1975. Vol. 97. № 4. P. 937.
11. Lebedev A., Maslak O. // Spectral and Evolutionary problems. Simferopol, 1998. P. 26.
12. Мартин Н., Инглэнд Дж. // Математическая теория энтропии. М., 1988.

Поступила в редакцию 11.05.2001.

УДК 539.3; 622.83

М.А. ЖУРАВКОВ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАКРОТРЕЩИН В ПОРОДНЫХ МАССИВАХ

The most of modern theories of fracture are based on the consideration of progress of one macrocrack under various kinds of external loading. These theories usually don't consider macrocracks origin ways. The body is assumed to have macrodefects in beginning. These theories can be used for solution tasks about fracture of geomaterials, because geomaterials have enough microdefects, which even under low stress can leader to appear of macrocrack. But it should be noted, some peculiarities of application of these theories for geomaterials. For example, during finding of conditions and character of crack increase it should be took into consideration inhomogeneous of geomaterials, relative scales both body and crack, possible ways of loading and as result special type of fracture conditions. It should be separated types of geomaterials in depend on their properties and stages of macrocracks increase. The solution of these problems and approximate analysis one of macrocracks origin ways briefly has be stated in this paper.



Журавков Михаил Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики и робототехники механико-математического факультета. Область научных интересов – методы математического и компьютерного моделирования в механике деформируемого твердого тела и геомеханике, геомониторинговые системы. Опубликовал более 200 научных трудов, из них семь монографий. Автор четырех изобретений.

Внешнее воздействие на твердое тело может привести к его механическому разрушению. Предельными случаями разрушения являются идеально хрупкое, при котором тело разделяется на части без остаточных деформаций, и идеально вязкое, при котором неограниченно уменьшается хотя бы один из линейных размеров тела. На практике обычно предельные случаи не реализуются. Поэтому под хрупким и вязким разрушением понимают разделение тела на части соответственно без заметных или при ярко выраженных остаточных деформациях. В отдельный тип имеет смысл выделить разрушение при предельном накоплении микрповреждений. Все эти три типа разрушения на финальной стадии обычно сопровождаются образованием макротрещин вследствие неоднородности напряженно-деформированного состояния.

Первые два случая реализуются при достижении одной из компонент тензора напряжений в некотором элементе горного массива критической величины (предела текучести, предела прочности). При этом разрушение

элемента области от влияния трещины происходит почти мгновенно. Учитывая структурные особенности материала и способ приложения внешней нагрузки, можно указать разрушившийся элемент массива и возможные направления развития трещин (они обычно параллельны площадкам максимальных растягивающих напряжений).

Вместе с тем реальные объекты обычно разрушаются при сравнительно малых напряжениях. Данное обстоятельство объясняется накоплением повреждений, вызванных напряженно-деформированным состоянием (длительное нагружение, циклическое нагружение), воздействием внешней среды, структурой самого материала массива и т. д. Таким образом, развитие разрушений с течением времени можно считать результатом сложного взаимодействия ряда процессов, развертывающихся во времени. В этом случае вследствие неоднородности напряженно-деформированного состояния финальным этапом разрушения элемента также является образование макротрещин.

После образования макротрещины происходит разгрузка некоторого объема материала. Соответственно встают вопросы: *будут ли образовавшиеся трещины развиваться в других элементах массива и при каких условиях и вызовет ли это развитие разрушение массива в целом.* Для ответа на эти вопросы требуется решить две задачи: об условиях развития трещин и о характере этого развития (устойчивом или неустойчивом).

Приближенный анализ возникновения макротрещин в условиях роста поврежденности материала

Повреждения материала можно разделить на рассеянные дефекты – малые по размерам и встречающиеся во множестве в единице объема, и крупные магистральные трещины, появляющиеся обычно в финале процесса разрушения. Проанализируем процесс накопления рассеянных повреждений. Прежде всего необходимо отметить, что накопление повреждений является случайным процессом. Подобное положение побуждает к поискам путей описания поврежденности, допускающих простое сопоставление с опытными данными и рассмотрение различных прикладных задач. Этого можно достигнуть, если ввести некоторую априорную характеристику поврежденности, которая будет устанавливать сравнение теории с экспериментом.

В простейшем варианте поврежденность можно описать некоторым скаляром $1 > \psi > 0$ [1]. В начальном состоянии при отсутствии поврежденности $\psi = 1$; с течением времени функция ψ убывает. Функцию ψ , по сути дела, можно интерпретировать как «сплошность».

В принципе ψ можно дать статистическое толкование. Поэтому изменение сплошности ψ можно описать некоторым кинетическим уравнением; последнее согласно представлениям статистической физики имеет структуру

$$\frac{d\psi}{dt} = F(\psi, \dots), \quad (1)$$

где F зависит от ψ и некоторых других переменных, существенных для данного процесса.

Остановимся на простейшем случае, полагая, что процесс разрушения прежде всего зависит от уровня напряженного состояния. Как характеристика напряженного состояния, существенно влияющая на длительную

прочность, обычно выступает некоторое эквивалентное напряжение σ_3 . Можно рассмотреть наиболее простое (но во многих приложениях удовлетворительное) выражение для σ_3 [3]

$$\sigma_3 = \sigma_{\max}, \quad (2)$$

где σ_{\max} – максимальное растягивающее напряжение.

Функция ψ характеризует сплошность материала; отношение σ_{\max}/ψ можно интерпретировать как некоторое эффективное напряжение.

Примем, что скорость роста поврежденности определяется эффективным напряжением, т. е. для (1) получим

$$\frac{d\psi}{dt} = F\left(\frac{\sigma_{\max}}{\psi}\right). \quad (3)$$

Остановимся для простоты на случае степенной зависимости

$$\frac{d\psi}{dt} = -A\left(\frac{\sigma_{\max}}{\psi}\right)^n, \quad (4)$$

где $A > 0$, $n > 0$ – постоянные (A – коэффициент, n – показатель трещинообразования).

Замечание. Степенную зависимость следует интерпретировать не как физическую закономерность, а лишь как удобную во многих случаях аппроксимацию.

Интегрируя (4) при начальных условиях ($\psi = 1$ при $t = 1$), получаем

$$1 - \psi^{n+1} = A(n+1) \int_0^t \sigma_{\max}^n dt. \quad (5)$$

В случае, когда напряжение постоянное и равно σ_0 , из уравнения (5) следует

$$1 - \psi^{n+1} = A(n+1)\sigma_0^n t.$$

Считая, что в момент разрушения t сплошность $\psi = 0$, то

$$t = \frac{1}{A(n+1)\sigma_0^n}. \quad (6)$$

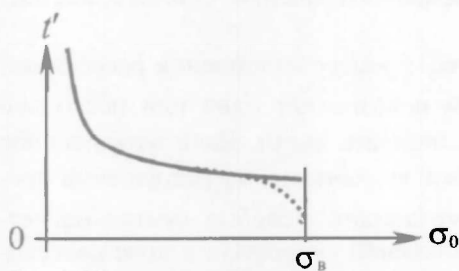


Рис. 1. Кривая зависимости времени хрупкого разрушения от напряжения σ_0 . Пунктиром нанесен действительный ход кривой

Сопоставляя время t с экспериментальным временем разрушения, можно определить постоянные A и n для данного материала при данных условиях (рис. 1).

Если поле напряжений – однородное, то повреждения нарастают равномерно по объему и по достижении напряжением своего критического значения разрушение происходит мгновенно.

Если же напряженное состояние тела неоднородное, то при анализе процесса разрушения тела необходимо различать две стадии. На первой стадии (*стадии скрытого разрушения*) $0 < t < t_1$ в каждой точке тела сплошность $\psi > 0$. В момент $t = t_1$ в некоторой точке (или области) тела возникает местное разрушение; рассеянные микротрещины сливаются, возникают макротрещины; процесс накопления рассеянных микроповреждений становится не-

устойчивым. В дальнейшем разрушение протекает сравнительно быстро и идет преимущественно вследствие роста магистральных трещин.

Строгий анализ возникновения и развития магистральных трещин произвести крайне трудно. Однако в первом приближении заключительную стадию разрушения тела можно описать, сохранив и при $t > t_1$ схему рассеянного разрушения путем введения движущегося *фронта разрушения*.

Итак, пусть в момент $t > t_1$ разрушение захватывает область V_2 ; последняя отделена от остальной области V_1 , где $\psi > 0$, поверхностью Σ – *фронтом разрушения*. На поверхности Σ имеем $\psi = 0$, следовательно,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} = 0, \quad (7)$$

где u – координата по нормали к фронту. Учитывая зависимости (4) и (5), из (7) получаем уравнение движения фронта разрушения:

$$\frac{du}{dt} = - \frac{(\sigma_{\max}^n)_{\Sigma}}{\left(\frac{\partial}{\partial u} \int_0^t \sigma_{\max}^n dt \right)_{\Sigma}}. \quad (8)$$

Индекс Σ означает, что необходимо брать значения соответствующих величин на фронте.

В случае однородного напряженного состояния знаменатель правой части уравнения (8) обращается в нуль и фронт разрушения распространяется мгновенно. Для неоднородного напряженного состояния скорость du/dt конечна.

Распространение фронта приводит к полному разрушению тела в момент $t = t'$. Интервал $t_1 < t < t'$ условимся называть *стадией распространения разрушения*.

Рассмотрение фронта разрушения дает представление о кинетике заключительной стадии разрушения. При этом, однако, утрачивается возможность анализа некоторых качественных особенностей картины разрушения. Остановимся на одном способе приближенного анализа развития магистральных трещин.

Пусть при некотором значении $\psi = \psi_0$ процесс накопления рассеянных повреждений становится неустойчивым и возникает одна или несколько магистральных трещин (иногда можно полагать $\psi_0 = 0$). Если напряженное состояние однородное, то при достижении ψ значения ψ_0 разрушение происходит практически мгновенно, ибо возникшие в слабых местах магистральные трещины распространяются с большой скоростью в поле рассеянных повреждений, находящемся на границе устойчивости.

В неоднородном поле критическое значение ψ_0 достигается в момент t_1 чаще всего на некотором участке границы тела. Здесь образуется одна или несколько изолированных трещин (очагов разрушения), которые в последующем распространяются в глубь тела.

В зависимости от способности материала к пластическим деформациям напряжения в вершине трещины могут быть оценены величиной σ_T (пластичность сохранена) или величиной $k\sigma_{\max}$, где σ_{\max} – номинальное растягивающее напряжение в районе вершины трещины, а k – некоторый эффективный коэффициент интенсивности напряжений (материал охрупчен).

В первом случае напряжение в вершине трещины $\sigma_{\dots} = \sigma_T$ независимо от уровня поврежденности. Разрушение в вершине трещины происходит при $\psi = \text{const}$, т. е. имеет место соотношение (7), если под u понимать расстояние по линии распространения трещины. Тогда согласно кинетическому уравнению (4) можно полагать, что $\partial\psi/\partial t = \text{const}$. Так как время распространения трещины относительно мало, можно принять, что в окрестности вершины трещины поле повреждений приближенно характеризуется полем ψ_1 , соответствующим моменту времени t_1 . В вершине же трещины происходит быстрое нарастание повреждений до критического значения ψ_0 . Если принять, что градиент $\partial\psi/\partial u$ пропорционален сплошности $\psi_1 - \psi_0$, тогда из (7) получаем

$$\frac{du}{dt} = \frac{k}{\psi_1 - \psi_0}, \quad (9)$$

где k – некоторая постоянная, определяемая из опытов. Так как ψ_1 известная функция от u , то из (9) имеем

$$\int_0^u (\psi_1 - \psi_0) du = k(t - t_1). \quad (10)$$

Если разрушение тела происходит при некотором значении $u = u_*$, из (10) находится соответствующее время разрушения.

Во втором случае напряжение в вершине трещины равно $k\sigma_{\text{max}}$. Согласно (4) в вершине трещины значение $\partial\psi/\partial t$ пропорционально σ_{\dots}^n . При прежних предположениях относительно $\partial\psi/\partial u$ из (7) получаем

$$\frac{du}{dt} = \frac{k_1 \sigma_{\text{max}}^n}{\psi_1 - \psi_0}, \quad (11)$$

где k_1 – некоторая постоянная. Отсюда вытекает, что

$$\int_0^u \frac{\psi_1 - \psi_0}{\sigma_{\text{max}}^n} du = k_1(t - t_1). \quad (12)$$

Понятие сплошности ψ или поврежденности ω ($\omega = 1 - \psi$) [4] можно относить как ко всему телу, так и к некоторому конкретному направлению. В случае, например, сложного нагружения уровень поврежденности удобно характеризовать вектором ψ_v , причем равенство всех его компонент ведет к полному разрушению материала. Если же нулю равны одна или две компоненты, то разрушение неполное, т. е. материал потерял способность сопротивляться растяжению на площадках, перпендикулярных соответствующим направлениям, вдоль которых компоненты сплошности равны нулю.

Таким образом, зная либо векторное, либо скалярное поле уровня поврежденности и его зависимость от времени, можно определить место возникновения и направление развития магистральной трещины в теле. Однако в реальности уровень поврежденности горного массива зависит от множества условий, все из которых учесть невозможно. Также учитывая вероятностную природу понятия сплошности, можно лишь приблизительно указать возможное место возникновения трещины в горном массиве. Для получения же возможного направления развития трещины, кроме анализа напряженного состояния, также нужно учитывать структурные особенности как всего массива, так и его элементов.

Распространение одиночной трещины в породных массивах

Для практических расчетов интересен следующий пример, к которому можно свести множество реальных случаев развития трещины в породном массиве.

Рассмотрим область породного массива, ослабленную одиночной трещиной, и примем следующие допущения: изменения параметров внешнего нагружения считаем медленными и в каждый момент времени постоянными, т. е. задачу решаем как квазистатическую, трещину принимаем пренебрежимо тонкой, а тело – много большим по сравнению с размерами трещины. Рассмотрим случай силового нагружения, когда приложенную нагрузку считаем постоянной и приложенной либо на бесконечности, либо на берегах трещины. Нагрузкой на бесконечности можно моделировать напряженно-деформированное состояние всего породного массива, а нагрузкой на берегах – локальные изменения НДС в окрестности трещины.

Тогда коэффициенты интенсивности напряжений в случае трех типов трещин имеют вид [5]:

$$\begin{aligned} K_I &= q\sqrt{\pi L} + P/\sqrt{\pi L} - \text{трещина нормального отрыва,} \\ K_{II} &= \tau_2\sqrt{\pi L} + Q_2/\sqrt{\pi L} - \text{трещина плоского сдвига,} \\ K_{III} &= \tau_1\sqrt{\pi L} + Q_1/\sqrt{\pi L} - \text{трещина продольного сдвига,} \end{aligned} \quad (13)$$

где τ_1 и Q_1 – соответственно касательное напряжение на бесконечности и величина сил, приложенных на берегах трещины в случае антиплоской деформации, τ_2 и Q_2 – то же самое в случае плоской деформации, q и P – соответственно растягивающее напряжение на бесконечности и расклинивающая сила, приложенная на берегах трещины в случае плоской деформации.

Условие начала роста трещины запишем в виде [5]:

$$K_I^2 + K_{II}^2 + K_{III}^2 / (1 - \nu) = \text{const} = C.$$

Подставляя полученные значения для коэффициентов интенсивности напряжений, получим:

$$A/L + L \cdot B + S = 1, \quad (14)$$

$$\text{где } A = \frac{1}{\pi C} \cdot \left(\frac{Q_1^2}{1-\nu} + Q_2^2 + P^2 \right), \quad B = \frac{\pi}{C} \cdot \left(\frac{\tau_1^2}{1-\nu} + \tau_2^2 + q^2 \right), \\ S = \frac{1}{C} \left(2Pq + \frac{2\tau_1 Q_1}{1-\nu} + 2\tau_2 Q_2 \right).$$

Решая уравнение (14) относительно L , получим:

$$L = \frac{-(S-1) \pm \sqrt{(S-1)^2 - 4AB}}{2A}.$$

Таким образом, в пространстве параметров нагружения поверхность L , описывающая переход трещины в подвижно-равновесное состояние, состоит из двух ветвей – L_1 и L_2 . Условие устойчивого роста трещины в общем случае имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial L} \left[(1-\nu)(K_I^2 + K_{II}^2) + K_{III}^2 \right] < 0.$$

В данной задаче это условие выписывается следующим образом:

$$L < \sqrt{A/B}.$$

Поверхность L_* разделяет области устойчивого и неустойчивого развития трещины и расположена между поверхностями L_1 и L_2 .

Таким образом, поверхность L_1 отвечает устойчивому росту трещины, а поверхность L_2 – неустойчивому развитию трещины, в данном случае соответствующему глобальному разрушению (распространение трещины до бесконечности).

Процесс развития трещины в пространстве параметров нагружения может быть описан следующим образом. Пусть $L = L_0$ – длина начальной трещины и пусть осуществляется некоторый процесс нагружения, под которым понимается изменение параметров A, B . В плоскости (A, B) процессу нагружения соответствует некоторая изображающая точка. Когда эта точка попадет на одну из поверхностей L_1 или L_2 , то трещина перейдет в подвижно-равновесное состояние. Если это поверхность L_1 , то разрушение носит катастрофический характер. Если же это поверхность L_2 , то при дальнейшем нагружении возможен устойчивый рост трещины и движение изображающей точки происходит вдоль поверхности L_2 . Случай разгрузки приводит к тому, что изображающая точка, двигаясь в плоскости $L = \text{const}$, возвращается на ось L .

Рассматривая предельные случаи, когда один из параметров A или B равен нулю, получим: если $B=0$, то ветвь L_2 возрастает от нуля до бесконечности и соответственно трещина будет расти устойчиво до бесконечности при увеличении величины A . Таким образом, величина A определяет параметры нагружения, вызывающие устойчивый рост трещины. Если $A=0$, то ветвь неустойчивости убывает с бесконечности до нуля и рост трещины после достижения подвижно-равновесного состояния будет неустойчивым (лавинообразным).

Для иллюстрации этого подхода рассмотрим случай, когда только один из коэффициентов интенсивности напряжений отличен от нуля [6].

Пусть к берегам трещины длины $2L$ в соляном породном массиве приложены сосредоточенные силы P , а на бесконечности тело нагружено растягивающим напряжением q . Вязкость разрушения K_c порядка $0,3 \text{ МПа}/(\text{м})^{1/2}$. Коэффициент интенсивности напряжений вычисляется по формуле (13), и пусть длина разведанной трещины равна $2L = 2$ метра. Рассмотрим возможные отношения между P и q и характер разрушения трещины. Подставляя численные значения, получим отношение между P и q для перехода в подвижно-равновесное состояние:

$$\sqrt{\pi} \cdot 0,3 \cdot 10^6 = q\pi + P, \quad (15)$$

и условие устойчивого роста трещины в виде:

$$\partial K / \partial L < 0 \Rightarrow q\pi - P/L < 0 \quad L < P/q\pi \Rightarrow 1 < P/q\pi.$$

Например, пусть $q = 100 \text{ 000 Па}$, тогда из (15) получаем, что трещина переходит в подвижно-равновесное состояние при $P = 217 \text{ 601 Н}$, причем в области неустойчивого разрушения, так как выполняется условие $1 > P/q\pi$. Если $q = 70 \text{ 000 Па}$, то трещина переходит в подвижно-равновесное состояние при $P = 311 \text{ 801 Н}$, причем в области устойчивого разрушения.

Если изменять параметры нагружения, пока не выполнится условие $qP = K_c^2/4$ (т. е. изображающая точка в пространстве параметров A, B, L достигнет гиперболоида $4AB=1$), то трещина будет расти устойчиво. Если

увеличивать нагрузку на бесконечности, тогда при $q = 72\,161$ Па трещина достигнет длины $2L = 2,346$ м и перейдет в зону неустойчивого разрушения.

Следует отметить, что переход в зону неустойчивого разрушения в данном примере не зависит от длины трещины, а только от отношения между параметрами q , P и K_c .

Таким образом, если влияние границ тела на выражение для коэффициента интенсивности напряжений не зависит (или слабо зависит) от отношения L/L_x между длиной трещины и характерным размером тела, то устойчивость состояния подвижно-равновесной трещины описывается только отношением параметров A и B .

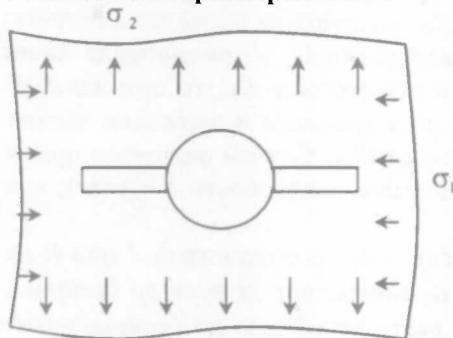


Рис. 2. Схема для решения модельной задачи

Подчеркнем, что переход трещины в область неустойчивого разрушения во многих случаях не приводит к глобальному разрушению тела. Для иллюстрации этого положения можно привести следующий характерный пример [6].

Пусть в бесконечном пространстве имеется цилиндрическая пора с двумя трещинами-отростками, отходящими от нее вдоль диаметра поры, и пусть пространство сжимается на бесконечности напряжением $\sigma_1 > 0$ и растягивается

напряжением $\sigma_2 > 0$ (рис. 2).

Пусть радиус поры равняется R , а длина отростков составляет $L - R$. Тогда из соображений анализа размерностей КИН на концах отростков можно записать в виде

$$K_1 = \sigma_1 \sqrt{2\pi R} \lambda_1(l) + \sigma_2 \sqrt{2\pi R} \lambda_2(l). \quad (16)$$

Здесь $l = L/R$, а $\lambda_1(l)$ и $\lambda_2(l)$ – некоторые функции, определяемые численно. Их примерные значения можно выразить как [7]:

$$\lambda_1(l) = \frac{0,58\sqrt{l-1}}{(l-0,1)^3}, \quad \lambda_2(l) = \sqrt{\frac{l-1}{2}} \cdot \frac{l-0,21}{l-0,76}$$

Вводя соответствующие замены, перепишем (16) в виде:

$$k_1 = p\lambda_1(l) + q\lambda_2(l), \quad p \geq 0, \quad q \geq 0,$$

где $k_1 = K_1/K_c$, $q = \sigma_2 \sqrt{2\pi R}/K_c$, $p = \sigma_1 \sqrt{2\pi R}/K_c$.

При этом связь между независимыми параметрами нагружения для подвижно-равновесной трещины имеет вид:

$$1 = p\lambda_1(l) + q\lambda_2(l) \quad (p \geq 0, \quad q \geq 0, \quad l > 0). \quad (17)$$

Уравнение (17) описывает поверхность S в пространстве l, p, q . Поверхность, разделяющая области устойчивости и неустойчивости, дается уравнением $0 = p\lambda_1'(l) + q\lambda_2'(l)$ и пересекается с поверхностью S по кривой I (рис. 3).

В данном случае неустойчивый рост трещин еще не означает катастрофического разрушения. В самом деле катастрофическому разрушению соответствуют такие параметры p и q , при которых уравнение (17) имеет одно или два решения относительно l . Если же оно имеет три решения, то либо

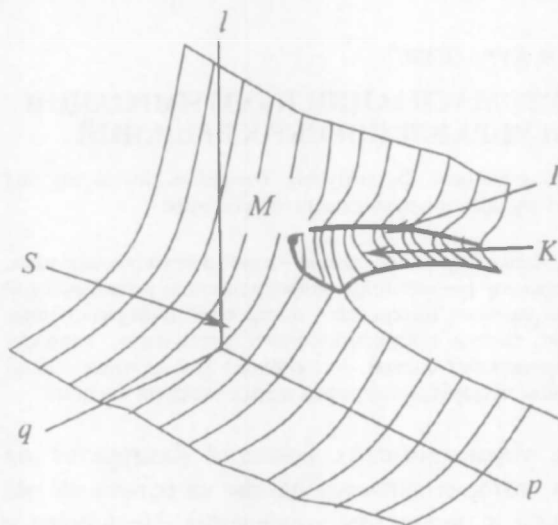


Рис. 3. Поверхность разрушения и ее характерные кривые

подвижно-равновесная трещина устойчива, либо она неустойчиво подрастает до устойчивой длины, либо (при наибольшем значении l) происходит неустойчивое глобальное разрушение. Общий вид поверхности S и линии l приведен на рис. 3. Часть K поверхности S , ограниченная линией l и линией пересечения S с координатной плоскостью l, p , отвечает устойчивому равновесию подвижной трещины, M – точка перехода области однозначности функции $l(p, q)$ в область трехзначности.

Таким образом, при решении задач о разрушении тел с трещинами задача об условиях начала роста трещины является второстепенной, а первостепенной является задача о выделении в пространстве параметров нагружения областей устойчивости и неустойчивости. Причем каждая область неустойчивости должна исследоваться с точки зрения возникновения глобального разрушения при попадании изображающей точки в эту область.

Также следует отметить, что попадание изображающей точки в область устойчивого развития не снимает вопрос о глобальном разрушении тела при неувеличивающейся нагрузке, потому что неучет возможных путей разгрузки приводит к возможности попадания изображающей точки в область неустойчивого развития (это хорошо видно на последнем примере), что соответственно приведет к глобальному разрушению. Таким образом, неучет возможных путей разгрузки приводит к существованию единственной поверхности разрушения.

В подготовке материала большое участие принял аспирант кафедры ТМиР С.В. Павлов.

1. Качанов Л.М. // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 8.
2. Епифанов В.П., Фаустов М.А. // Завод. лаб. 1983. 49. № 6.
3. Johnson A.E., Henderson J., Khan B. Complex-stress, relaxation and fracture of metallic alloys. Edinburgh, 1962.
4. Работнов Ю.Н. // Вопросы прочности материалов и конструкций. М., 1959.
5. Irwin G.R. // Handbuch der Physik. 1958. Vol. 6. S. 551.
6. Германович Л.Н., Черепанов Г.Н. // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 330.
7. Гольдштейн Р.В., Ладугин В.М., Осипенко Н.М. // ФТНРНИ. 1974. № 1. С. 3.

Поступила в редакцию 06.04.2001.

УДК 681.324:519.8

А.Н. КУРБАЦКИЙ

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К АВТОМАТИЗАЦИИ И ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ПРИНЯТИЯ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Theoretical background and engineering methods for analyzing, designing, developing and function optimization of info-technological organization management are presented.



Курбацкий Александр Николаевич – доктор технических наук, профессор, проректор по учебной и информационно-аналитической работе. Область научных интересов – построение информационно-технологических систем организационного управления, корпоративных информационных систем. Автор около 100 научных публикаций, в том числе четырех монографий и трех учебных пособий.

Принятие управленческих решений базируется на информации, которая является одним из основных ресурсов, сырьем и продуктом управления. Не вникая в детали, принятие решений на основе информации можно представить как решение трех основных задач: сбор релевантной информации; организация информации (хранение, распределение, доступ); переработка информации как сырья в информацию как продукт управленческой деятельности. Перечисленные задачи к настоящему времени достигли высокой степени теоретической проработки, их решение обеспечивается применением развитых технических, программных и методических средств. Между тем хотелось бы обратить внимание на важнейшую проблему, решение которой неизбежно на новом витке развития управленческих систем и востребовано уже сегодня. Речь идет о комплексе задач, относящихся к *технологии принятия управленческих решений*. Чтобы понять суть этой проблемы, рассмотрим, как решается сегодня третья – и главная – из сформулированных "информационных" задач. В конечном счете именно она определяет и состав первых двух задач.

Современные системы – информационно-аналитические, поддержки принятия решений – обеспечивают эффективность анализа и обработки информации в смысле *результативности*, т. е. получения качественного решения. Центральный вопрос здесь состоит в том, **как принимать правильные решения** на основе имеющейся информации, исчерпывающей либо неполной.

Теперь обсудим этот вопрос с другой точки зрения: как обеспечить эффективность управленческого процесса в смысле *продуктивности, рентабельности, рациональности*, другими словами, **как правильно принимать решения**, увеличить информативность данных как сырья и коэффициент полезного действия органа управления.

Как правило, современные автоматизированные системы напрямую или косвенно "удешевляют" и ускоряют решения. Но в большинстве случаев повышение рентабельности управления достигается за счет улучшения конечного результата – решения, а не за счет рационализации процесса принятия решения, т. е. технологии.

Одна из центральных наших посылок заключается в том, что на основе математического аппарата теории информации целесообразно и возможно дать количественную оценку ряду понятий: информация, ее ценность и релевантность и др. Даже простые формы теоретико-информационных оценок

позволяют перевести зачастую иллюзорные интуитивные представления о ценности и релевантности информации в плоскость обоснованных заключений. Далее необходимо построить теоретико-информационную модель принятия решений, которая позволила бы в любой момент управленческого процесса ответить на два важнейших вопроса: какое количество информации о решении получено и какое количество информации необходимо и достаточно (требуется получить) для принятия обоснованного решения.

Задача повышения продуктивности и снижения ресурсоемкости процесса управления за счет его внутренних резервов, очевидно, относится к классу оптимизационных. Допустим, нам удалось выразить числом I количество релевантной информации о решении и оценить стоимость c этой информации. При проектировании технологических процессов принятия решений вместо критерия $I \rightarrow \max$ (получить максимально полную информацию, а затем переработать ее в решение) целесообразно использовать критерий

$$\frac{I}{c} \rightarrow \max,$$

где $I = \text{const}$ для конкретной задачи, т. е. получить с минимальными затратами информацию, необходимую и достаточную для принятия обоснованного решения (причем формальный аппарат позволяет априори оценить количество этой информации).

Идея здесь в том, что, не зная еще самой информации, приводящей к решению, на основе априорных знаний и с использованием формальных методов следует определить ее ценность, релевантность и спроектировать оптимальную стратегию сбора и переработки этой информации. Помимо этого, оптимизация в различных формах должна выполняться на всех иерархических уровнях вплоть до отдельных операций обработки информации [1].

Под *процедурой* (или *операцией*) *принятия решения* будем понимать совокупность согласованных действий, выполняемых в целях выработки и принятия управленческих решений.

Действующими факторами $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ *процедуры принятия решения* назовем объективные условия и обстоятельства, непосредственно влияющие на ее исход, т. е. на принимаемое решение. К основным группам действующих факторов мы относим состояние объекта управления, воздействие со стороны вышестоящего органа управления, факторы внешней среды. Далее мы полагаем, что решение принимается и обосновывается по данным анализа значений действующих факторов, а действия, направленные на определение этих значений, составляют основную часть процедуры принятия решений.

Тестом назовем совокупность действий, выполняемых с целью определить значение действующего фактора. Термин "тест" мы используем для краткого именованя совокупности технологических операций, результатом которых является некоторое промежуточное управленческое решение, и это решение формально представляется как значение действующего фактора. Множеству $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ действующих факторов поставим в соответствие множество $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ тестов. Под *стоимостью* $c(v_j)$ теста v_j будем понимать интегральную оценку затрат ресурсов, требуемых для выполнения теста.

Комбинация значений действующих факторов $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ определяет конкретные условия принятия решений и описывает, иначе говоря, *ситуа-*

цию, в которой принимается решение. Установить ситуацию – означает выполнить тесты $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и определить их значения $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Под *стратегией принятия решений* будем понимать описание состава и порядка анализа действующих факторов. По существу, стратегия принятия решений задает способ расходования ресурсов в целях определения ситуации и принятия решения.

По сути, нас интересуют множество альтернативных решений, множество действующих факторов, описание тестов и их стоимость и главное – априори заданное соответствие между ситуациями и решениями.

Одной из наиболее удачных форм представления этих сведений является так называемая *таблица решений*. Исходные данные для проектирования стратегий принятия решений будем представлять в этой форме. Рассмотрим ее более подробно. Не вникая в детали, будем полагать, что для накопления априорных знаний и построения таблиц решений используются два основных подхода: сбор статистических данных и (или) экспертиза.

Допустим, определено множество действующих факторов процедуры принятия решений, получены данные о возможных комбинациях значений действующих факторов (ситуациях), и число этих комбинаций равно K .

Обозначим $U = \{u_1, \dots, u_s, \dots, u_K\}$ конечное множество ситуаций, в которых принимается решение. Положим, для каждой ситуации $u_s \in U$ известна вероятность $p(u_s)$ реализации этой ситуации. Другими словами, $p(u_s)$ есть вероятность определенного "стечения обстоятельств", т. е. комбинации значений действующих факторов. Сумма вероятностей $p(u_s)$ равна единице.

Положим далее, что на основе прошлого опыта или экспертизы установлено, что в ситуации $u_s \in U$ следует принять решение x_i . Пусть $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ представляет собой множество решений, где m – число возможных решений.

Таким образом, имеется отображение $f: U \rightarrow X$ множества ситуаций в множество решений. Это отображение представляется таблицей решений. Ситуации $u_s \in U$ ставятся в соответствие решение $x_i \in X$, а также результаты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ тестов множества $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Результаты тестов представляют значения действующих факторов процедуры принятия решения. Таким образом, ситуации как проявления действующих факторов определяются в таблице решений *комбинациями (или наборами) значений тестов*.

Заметим, что для принятия управленческого решения совокупность известных значений действующих факторов, как правило, является условием необходимым, но недостаточным (в отличие от ряда технических систем, в которых решение принимается автоматически по результатам тестов). Управленческое решение принимается руководящим лицом либо органом, и мотивация этого решения обычно включает дополнительные неформальные соображения.

Один из наиболее эффективных подходов к решению задачи принятия решений предполагает построение *деревьев и диаграмм решений*, в которых тесты определяют узлы, а листья дерева (диаграммы) указывают подмножества ситуаций, в которых принимается одно и то же решение.

Пусть задана решающая функция f , а именно:

а) определено множество $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ возможных вариантов решения;

б) определены действующие факторы процедуры принятия решения и представлены множеством $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ переменных решающей функции; каждая переменная представляет значения действующего фактора, переменной поставлена в соответствие технологическая операция, направленная на установление значения действующего фактора; для каждой технологической операции определена стоимость $c(v_j)$ ее выполнения;

в) сформирована таблица решений, в которой наборы значений $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_n}$ переменных множества V представляют множество U ситуаций; ситуация отражает совокупное состояние объекта управления и факторов внешней среды; указано отображение $f: U \rightarrow X$ множества ситуаций в множество решений.

Таким образом, априори известно, что в некоторой ситуации u_s рекомендуется принять решение x_1 . Следовательно, с точки зрения исследователя задача нахождения формального решения (с целью выработать рекомендации лицу либо органу, принимающему ответственное решение) сводится к распознаванию ситуации. Это означает, что путем выполнения технологических операций и установления значений действующих факторов необходимо выделить ситуацию среди множества других ситуаций. При этом не требуется различать ситуации, в которых принимается одно и то же решение. Характерными признаками (атрибутами) ситуации являются значения действующих факторов, представленные значениями переменных решающей функции.

Задачи выработки стратегии принятия решений можно рассматривать в следующих двух вариантах.

1. Разрабатывается методика нахождения формального решения в реальном режиме времени. Реализация этой методики предполагает создание интерактивной подсистемы, задача которой состоит в том, чтобы при заданных значениях группы действующих факторов выработать рекомендацию, значение какого фактора необходимо определить следующим (т. е. какую технологическую операцию нужно выполнить следующей), с тем чтобы минимизировать стоимость принятия решения. Данную методику целесообразно применять при реализации процедур принятия решений уникального содержания.

2. Разрабатываются методики конструирования деревьев решений. Дерево решений определяет действия оперирующей стороны, а именно состав и порядок выполнения технологических операций во всех заданных в таблице решений ситуациях. Эти методики предназначены для проектирования стратегий принятия решений типовых (массовых) процедур.

Для построения деревьев решений предлагаются две методики.

Первая методика предназначена для конструирования дерева решений в общем случае. При ее реализации строится такое дерево решений, в котором не накладываются ограничения на порядок выполнения тестов. Практически это означает, что узлу дерева решений может ставиться в соответствие любая переменная решающей функции. В результате для различных ситуаций порядок выполнения тестов в общем случае различен. Такое дерево решений отвечает требованиям оптимальности (квазиоптимальности) с точки зрения принятого критерия эффективности, но имеет ряд недостатков при практической реализации стратегий принятия решений в управленческой сфере.

Результатом применения второй методики является так называемое *упорядоченное дерево решений*, в котором выбор следующего теста не зависит от результатов предыдущих тестов. Для выполнения этого условия конструируется дерево решений, в котором узлам одного уровня соответствует один и тот же тест. При реализации стратегии, которую задает такое дерево решений, для нахождения решения в различных ситуациях выполняется различное число тестов, но порядок их выполнения не изменяется. Этот частный случай интересен как в практическом, так и в теоретическом плане.

С практической точки зрения упорядоченные деревья решений просты в реализации, допускают возможность эффективного планирования процесса подготовки и принятия решений и его распараллеливание. В теоретическом плане рассмотрение данного частного случая деревьев решений позволило исследовать более эффективную с точки зрения вычислений технику определения информационных оценок и альтернативный критерий оптимизации. Его применение позволяет находить последовательности выполнения технологических операций не только наиболее информативные, но и доставляющие информацию, наиболее релевантную искомому решению.

Подробное описание теоретико-информационного метода анализа решающих функций, теоретико-информационной модели процедур принятия решений и информационно-технологической модели управления в целом имеется в [1–3].

1. Курбацкий А.Н. Автоматизация обработки документов. Мн., 1999.
2. Курбацкий А.Н., Чеушев В.А. Информационный метод анализа и оптимизации в системах поддержки принятия решений. Мн., 1999.
3. Курбацкий А.Н. Построение информационно-технологических систем. Мн., 2001.

Поступила в редакцию 25.06.2001.

УДК 519.4

В.М. КОТОВ

АСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА С ДЛИНАМИ ДУГ, РАВНЫМИ 1 ИЛИ 2

We present an approximation algorithm with worst-case performance $4/3$ for the special case of the Asymmetric Travelling Salesman Problem in which all weights are either one or two.



Котов Владимир Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой дискретной математики и алгоритмики. Область научных исследований – комбинаторная оптимизация, теория алгоритмов, приближенные алгоритмы.

Автор более 60 научных работ, соавтор учебных пособий.

Хорошо известно, что если $P \neq NP$, то для задачи коммивояжера (TSP) с произвольными весами ребер не существует полиномиального приближенного алгоритма с гарантированной оценкой точности. В случае, когда веса ребер удовлетворяют неравенству треугольника, становится возможным построение полиномиального приближенного алгоритма с гарантированной оценкой точности. Лучшим из алгоритмов является алгоритм Кристофидеса–Сердюкова [1].

Пападимитриу и Янакакис [2], Вишванатан [3] исследовали специальные случаи (TSP), когда веса ребер (дуг) равны 1 или 2.

Вместо задачи коммивояжера с весами ребер (дуг) 1 и 2 мы будем рассматривать задачу коммивояжера на максимум (MTSP) [4–6] с весами 1 и 0. Задача MTSP формулируется следующим образом: в полном взвешенном графе K_n с неотрицательными весами дуг необходимо найти гамильтонов контур с максимальным суммарным весом дуг.

Основная причина подобного сведения состоит в том, что обе задачи (TSP с весами 1 и 2 и MTSP с весами 1 и 0) взаимосвязаны с точки зрения гарантированных оценок.

Действительно, пусть C – матрица весов размера $n \times n$ для TSP с весами 1 или 2. Рассмотрим задачу MTSP с матрицей весов C' , элементы которой вычисляются по правилу $C'_{ij} = 2 - C_{ij}$.

Множество ребер (дуг), построенных алгоритмом для задачи MTSP берется в качестве решения для исходной задачи TSP с весами 1 или 2.

Очевидно, что если приближенный алгоритм для задачи MTSP с весами ребер 1 или 0 имеет гарантированную оценку $1-t$, то он может быть использован для задачи TSP с весами 1 или 2 описанным выше образом, причем его гарантированная оценка будет равна $1+t$.

В работе [7] для асимметричной задачи MTSP был предложен алгоритм с гарантированной оценкой $4/7$, основанный на схеме "разбиение и релаксация".

Определим субтур как подмножество дуг некоторого гамильтонова контура. Этот субтур может быть подмножеством дуг некоторой релаксационной задачи, например задачи о назначении. Понятно, что часть дуг из решения задачи о назначении должна быть удалена, чтобы иметь субтур. Схема "разбиение и релаксация" состоит в следующем.

Вначале строятся решения некоторых релаксационных задач. Эти решения разбиваются на субтуры таким образом, чтобы линейная комбинация этих субтуров представлялась в виде линейной комбинации решений релаксационных задач. Результатом работы схемы является тот из субтуров, суммарный вес которого наилучший.

В работе [3] для асимметричной TSP с весами дуг 1 или 2 был предложен алгоритм, гарантированная оценка которого равна $17/12$. Было показано, что эта задача эквивалентна специальной задаче покрытия вершин графа минимальным числом вершинно непересекающихся путей.

В данной работе предлагается алгоритм для асимметричной MTSP с весами 1 или 0 при условии, что в орграфе существует цикл веса n . Гарантированная оценка алгоритма равна $2/3$. Это значит, что имеется алгоритм для асимметричной TSP с весами 1 или 2, гарантированная оценка которого равна $4/3$.

Описание алгоритма

Пусть имеется асимметричная матрица C размера $n \times n$, значения элементов которой равны 1 или 0. Вес ребра $e=(i, j)$ будет обозначаться как $C(e)$, или C_{ij} . Для набора ребер X величина $c(X)$ будет обозначать суммарный вес ребер из набора X . Через X^{opt} будем обозначать величину оптимального решения задачи MTSP.

Пусть множество дуг A соответствует оптимальному решению задачи о назначении для графа G с матрицей весов C . Не умаляя общности, мы будем рассматривать в A только дуги с весом 1. В соответствии с этими дугами все вершины графа G можно разбить на два класса.

Первый, "красный", класс состоит из вершин, входящих в контуры длины 2, т. е. контуров, состоящих ровно из двух дуг с весом 1. Такие контуры будут называться "красными" контурами.

Второй, "синий", класс состоит из вершин других контуров ("синие" контуры), длина которых больше 2, или незамкнутых маршрутов ("синие" маршруты).

Рассмотрим граф G^A , в котором одна "красная" вершина соответствует одной "красной" вершине в G , а две "синие" вершины соответствуют одной "синей" вершине в G .

Пусть вершина i' в G^A соответствует "красной" вершине i в G , а вершины j', j'' соответствуют "синей" вершине j в G .

Мы введем ребро между двумя "красными" вершинами i' и j' в G^A , если $C_{ij}=1$ или $C_{ji}=1$ в G , и при этом вершины i, j не из одного "красного" цикла.

Мы также введем ребро между "красной" вершиной i' и "синей" вершиной j' (j'') в G^A , если $C_{ij}=1$ ($C_{ji}=1$) в G .

Между двумя "синими" вершинами и между двумя "красными" из одного цикла ребер нет.

Пусть M является паросочетанием в графе G^A , которое покрывает максимальное количество "красных" вершин. Очевидно, что такое паросочетание соответствует максимальному взвешенному паросочетанию в графе G^A , когда ребра между двумя "красными" вершинами имеют вес, равный 2, а ребра между "красной" вершиной и "синей" вершиной имеют вес, равный 1.

В соответствии с графом G^A и паросочетанием M построим граф G^M следующим образом.

Сначала склеиваются пары "синих" вершин в G^A , каждая из которых соответствует одной "синей" вершине исходного графа G .

После этого добавляются ребра из паросочетания M и дополнительные ребра, причем каждое такое дополнительное ребро соединяет пару "красных" вершин из одного цикла.

Понятно, что степень каждой вершины в графе G^M не превосходит 2, поэтому G^M состоит из циклов и цепочек.

Утверждение. Если два ребра в паросочетании M будут смежные после склеивания, то направления соответствующих им дуг в G различны, т. е. одна дуга входящая, а другая – выходящая для соответствующей "синей" вершины.

Существует два вида циклов и два типа цепочек в графе G^M .

Первый тип циклов состоит только из "красных" вершин. Циклы такого вида будут обозначаться как R_{cir} . Цикл такого типа связан с множеством вершин и дуг исходного графа G следующим соотношением.

Лемма 1. Пусть цикл вида R_{cir} состоит из $2k$ вершин. Тогда на этих вершинах существует субтур, состоящий из не менее чем $3k/2$ дуг из множества A или имиджей ребер из паросочетания M .

Доказательство. Обходим цикл R_{cir} в одном из направлений. Пусть S является подмножеством имиджей ребер из M , соответствующих выбранному направлению, а T является подмножеством имиджей ребер из M , не соответствующих выбранному направлению, т. е. имеющих обратное направление. Не умаляя общности, пусть $|S| > |T|$. Тогда $|S| \geq k/2$. Поэтому множество дуг S вместе с соответствующими дугами из каждого "красного" цикла в R_{cir} соответствуют субтуру, количество дуг в котором не меньше $3k/2$.

Первый тип цепочек состоит только из “красных” вершин. Цепочки такого вида будут обозначаться как R_{ch} . Цепочки такого типа связаны с множеством вершин и дуг исходного графа G следующим соотношением.

Лемма 2. Пусть цепочка вида R_{ch} состоит из $2k$ вершин. Тогда существует субтур на этих вершинах, состоящий из не менее чем $4k/3$ дуг из множества A или имиджей ребер из паросочетания M .

Второй тип циклов состоит из “красных” и “синих” вершин. Циклы такого вида будут обозначаться как RB_{cir} .

Лемма 3. Для цикла вида RB_{cir} существует такой набор ребер M' из M , что каждый “красный” цикл, который имеет вершину в рассматриваемом цикле RB_{cir} , смежен одному из ребер M' .

Второй тип цепочек состоит из “красных” и “синих” вершин. Циклы такого вида будут обозначаться как RB_{ch} .

Лемма 4. Для цикла вида RB_{ch} существует такой набор ребер M' из M , что каждый “красный” цикл, который имеет вершину в рассматриваемой цепочке RB_{ch} , смежен одному из ребер M' .

Пусть множество M^A является объединением множеств M' для всех циклов RB_{cir} и цепочек RB_{ch} . Используя решение задачи о назначении A и граф G^M , произведем разбиение вершин графа G на две группы вершин R и RB следующим образом.

Группа R состоит из вершин циклов RB_{cir} и цепочек R_{ch} .

Группа RB состоит из вершин одного “синего” цикла (цепочки) множества A и из вершин “красных” циклов, которые связаны с циклом (цепочкой) ребрами M^A .

Каждая такая группа определяет множество дуг, состоящее из дуг A и дуг, которые являются имиджами ребер M^A , причем концевые точки дуг должны быть в одной группе.

Условие $C(A) > C(X^{opt})$ обеспечивает такое взаимно однозначное соответствие между дугами в A и дугой в оптимальном решении, при котором дуге с весом 1 из оптимального решения соответствует дуга с весом 1 в A .

Поэтому существует соответствие между дугами в группах и дугами в оптимальном решении, когда для каждой группы суммарный вес дуг из A в группе не меньше суммарного веса соответствующих дуг из оптимального решения. Это означает, что можно анализировать каждую группу отдельно.

Лемма 5. Если группа RB состоит из k вершин, а суммарный вес ее дуг из A и M^A равен w , то существует субтур на этих вершинах с суммарным весом не меньше $2w/3$.

Доказательство. Пусть группа состоит из $2k_1$ “красных” вершин и k_2 “синих” вершин, $k = 2k_1 + k_2$. Возможны все ситуации.

1. $k_2 > k_1$.

Если “синие” вершины связаны в цикл, то можно построить субтур с общим суммарным весом $k_1 + k_2$, беря $k_2 - 1$ дуг из “синего” цикла, одну дугу из каждого “красного” цикла и один имидж из M^A между вершинами из одного из “красных” циклов и одной из вершин из “синего” цикла.

Так как общий вес дуг из A в группе равен k , то из условия $k_2 \geq k_1$ следует, что

$$k_1 + k_2 \geq 2(2k_1 + k_2)/3.$$

Если “синие” вершины связаны в цепочки, то можно построить субтур с общим суммарным весом $k_1 + k_2 - 1$, беря $k_2 - 1$ дуг из “синей” цепочки и одну дугу из каждого “красного” цикла.

Так как общий вес дуг из A в группе равен $k-1$, то из условия $k_2 > k_1$ следует, что

$$k_1 + k_2 - 1 > 2(2k_1 + k_2 - 1)/3.$$

2. $k_2 < k_1$.

В этом случае можно построить субтур с суммарным весом $2k_1$, беря одну дугу из каждого "красного" цикла и k_1 имиджей из M^A между каждым "красным" циклом и вершиной из "синего" цикла.

Суммарный вес дуг из A в группе не превышает $2k_1 + k_2$, поэтому из условия $k_2 < k_1$ следует, что

$$2k_1 > 2(2k_1 + k_2)/3.$$

Приведенные леммы обосновывают следующий алгоритм AM для поиска субтура в графе с гарантированной оценкой $2/3$ в случае разбиения вершин графа G на группы R и/или RB .

Алгоритм AM состоит в следующем.

1. Решаем задачу о назначении и строим множество A .
2. Строим G^A и находим паросочетание максимального веса M .
3. Строим G^M и определяем группы R .
4. Находим M^A и определяем группы RB .
5. Строим субтуры для каждой группы.

Лемма 6. Если паросочетание M в G^A покрывает все "красные" вершины, то каждая вершина в G принадлежит R_{cir} или RB .

Теорема. Если $c(X^*) = n$, то существует паросочетание в G^A , которое покрывает все "красные" вершины.

Следствие 1. Если $c(X^{opt}) = n$, то алгоритм AM гарантирует построение субтура с суммарным весом, как минимум, $2n/3$.

Следствие 2. Если $c(X^*) = n$ и все вершины "красные", то алгоритм AM гарантирует построение субтура с суммарным весом, как минимум, $3n/4$.

1. Christofides N. // Technical Report, GSIA. 1976.
2. Papadimitriou C., Yannakakis M. // Math. of Oper. Res. 1993. Vol. 18. P. 1.
3. Vishwanathan S. // Information Processing Letters. 1992. 44. P. 297.
4. Fisher M., Nemhauser G., Wolsey L. // Oper. Res. 1979. Vol. 4. P. 799.
5. Ковалев М.М., Котов В.М. Субоптимальные алгоритмы решения задачи коммивояжера. Деп. в ВИНТИ. № 2403-82. 1982. 31 с.
6. Они же // Изв. АН БССР. 1984. № 4. С. 45.
7. Они же // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1986. № 3. С. 44.

Поступила в редакцию 23.01.2001.

РЕФЕРАТЫ

УДК 53:001 (476) (092)

Барковский Л.М., Алексеева Т.А. **Академик Ф.И. Федоров и развитие физической науки в Белгосуниверситете (к 90-летию со дня рождения)** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 3.

Статья посвящена 90-летию со дня рождения академика Ф.И. Федорова, известного физика-теоретика, профессора Белорусского государственного университета, академика и члена Президиума АН Белоруссии, президента Белорусского физического общества.

В статье излагаются сведения из биографии Ф.И. Федорова и освещаются этапы его научной деятельности.

Библиогр. 14 назв.

УДК 669.0(075.8)

Анишик В.М., Гольцев В.П., Дорожкин Н.Н., Драко В.М., Жукова С.И., Ходасевич В.В., Шепелевич В.Г. **Кафедра физики твердого тела: от рождения до зрелости** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 3.

Изложена теория развития физики твердого тела в Белгосуниверситете. Рассматриваются основные достижения в области физического материаловедения, физики защитных покрытий, моделирования электронной структуры.

Библиогр. 50 назв.

УДК 535.37

Чернявский А.Ф., Попечиц В.И. **Развитие научных исследований в Институте прикладных физических проблем им. А.Н. Севченко Белгосуниверситета** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 3.

Приведены сведения об истории организации и развития Института прикладных физических проблем им. А.Н. Севченко Белгосуниверситета. Представлены основные результаты научно-исследовательской деятельности коллектива института.

УДК 535.37

Воропай Е.С., Гулис И.М. **Кафедра лазерной физики и спектроскопии: от фундаментальных исследований до прикладных разработок** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 3.

Приведен обзор основных направлений и результатов исследований, проводимых на кафедре в области молекулярной спектроскопии, люминесценции (спектроскопия уранилов, эффекты микроокружения в спектроскопии сложных молекул, спектроскопия охлажденных в сверхзвуковой струе органических молекул и ван-дер-ваальсовских комплексов), нелинейной оптики (динамическая голография, четырехволновое смещение). Описаны прикладные разработки (новые препараты для фотодинамической терапии, активные среды для перестраиваемых лазеров, новые типы лазеров, приборы для спектроскопии).

Библиогр. 27 назв.

УДК 577.3

Черснкевич С.П., Самаль А.Б., Зорин В.П., Зорина Т.Е., Семенова Г.П., Коваленко Е.И., Тимошенко А.В., Горудко И.В., Хмельницкий А.И., Молчанов П.Г., Крот В.И., Горбачевич С.К. **Биофизические свойства клеток и модельных биоструктур** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 3.

Приводятся результаты выполненных на кафедре биофизики научных исследований в области клеточной, молекулярной и медицинской биофизики и перспективы их использования.

Библиогр. 68 назв.

УДК 33:517.9

Ковалев М.М. **Исследования по математической экономике в БГУ** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 3.

В статье кратко анализируются достижения ученых БГУ в области математической экономики и теории принятия решений.

Библиогр. 91 назв.

УДК 336.763.055.4

Медведев Г. А. **Определение стоимости финансовых производных, когда случайный процесс цены актива имеет плавающую отражающую нижнюю границу** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 3.

Классическая задача Блэка–Шоулса по определению стоимости финансовых производных решается в предположении, что цена лежащего в основе актива является случайным процессом с нижней отражающей границей. В качестве примера получены соотношения, определяющие стоимости фьючерсов и европейских опционов-колл.

Библиогр. 6 назв.

УДК 519.62

Бобков В. В. **Вычислительные алгоритмы с обратной связью для систем обыкновенных дифференциальных уравнений** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 3.

Для начальной задачи в случае системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка нормального вида предлагаются вычислительные алгоритмы рекурсивного типа, основанные на тригонометрической аппроксимации и ориентированные на использование естественных шагов численного наблюдения.

Библиогр. 5 назв.

УДК 536.24, 517.968

Мандрик П. А. **Аналитическое исследование двумерных задач нестационарной теплопроводности со смешанными граничными условиями** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 3.

На примере осесимметричной двумерной задачи теплопроводности рассмотрены аналитические методы, позволяющие исследовать нестационарные процессы теплопереноса при наличии смешанных граничных условий на поверхности изучаемого изотропного полугораченого тела. В основе предлагаемого подхода лежат методы сведения исходной дифференциальной задачи к парным интегральным уравнениям в области преобразований Лапласа, парных интегральных уравнений к эквивалентному интегральному уравнению второго рода в области изображений Лапласа и, наконец, метод решения последнего.

Библиогр. 13 назв.

УДК 517.983 + 517.984

Антоневич А. Б., Бахтин В. И., Лебедев А. В. **О двойственности по Лежандру между спектральным радиусом и T -энтропией** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 3.

Установлен вариационный принцип вычисления спектрального радиуса для операторов взвешенного сдвига с произвольными сдвигами. В качестве составляющей компоненты принцип содержит новый динамический инвариант – T -энтропию. Доказано, что логарифм спектрального радиуса и T -энтропия связаны преобразованием Лежандра.

Библиогр. 12 назв.

УДК 539.3; 622.83

Журавков М. А. **Распространение макротрещин в породных массивах** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 3.

При рассмотрении задач по изучению условий и характера роста и распространения трещин в геоматериалах следует учитывать характерную для геоматериалов неоднородность, относительные масштабы как тела в целом, так и трещины, возможные пути нагружения и, как следствие, особый вид условий разрушения, разделять типы геоматериалов в зависимости от их свойств и отдельно рассматривать этапы развития макротрещины. Решение этих проблем и приближенный анализ одного из путей возникновения трещин кратко изложены в данной работе.

Библиогр. 7 назв.

УДК 681.324:519.8

Курбацкий А. Н. **Об одном подходе к автоматизации и оптимизации процесса принятия управленческих решений** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 3.

Предлагаются теоретические основы и инженерные методы анализа, проектирования, создания и оптимизации функционирования информационно-технологических систем организационного управления.

Библиогр. 3 назв.

УДК 519.4

Котов В. М. **Асимметричная задача коммивояжера с длинами дуг, равными 1 или 2** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 3.

Предлагается приближенный алгоритм для специального случая асимметричной задачи коммивояжера, когда длины дуг равны 1 или 2. Алгоритм имеет гарантированную оценку, равную $4/3$.

Библиогр. 7 назв.

УКАЗАТЕЛЬ статей, опубликованных в 2001 г.

ФИЗИКА

<i>Агишев И.Н., Мельникова Е.А., Романов О.Г., Толстик А.Л.</i> Бифуркация нарушения симметрии в задаче внутрирезонаторного четырехволнового взаимодействия	1 15
<i>Акимов А.Н., Власукова Л.А., Быковский В.А., Шох В.Ф.</i> Исследование отжига нейтроннолегированного арсенида галлия с помощью селективного травления	1 34
<i>Андреев А.Д., Бельский А.М., Валиев А.А.</i> Аппроксимация начального участка ВАХ высоколегированного МОП-ПТ	2 19
<i>Анищик В.М., Гольцев В.П., Дорожкин Н.Н., Драко В.М., Жукова С.И., Ходасевич В.В., Шепелевич В.Г.</i> Кафедра физики твердого тела: от рождения до зрелости	3 9
<i>Барашков М.В., Комяк А.И., Шашков С.Н.</i> Фазовые переходы в кристалле сульфата натрия	1 23
<i>Барковский Л.М., Алексеева Т.А.</i> Акадмик Ф.И. Федоров и развитие физической науки в Белгосунниверситете (к 90-летию со дня рождения)	3 3
<i>Белоус А.И., Ефименко С.А., Понарядов В.В., Прибыльский А.В.</i> Сравнительный анализ быстродействия биполярного и МОП-транзисторов	2 22
<i>Бирзгал Е.А.</i> Исключение дифференциальной нелинейности времязмерительного тракта при обработке данных по наблюдению осцилляций спина позитрония	2 44
<i>Борздов В.М., Галенчик В.О.</i> Моделирование методом частиц переноса электронов в субмикронном МОП-транзисторе с учетом ударной ионизации	2 16
<i>Воропай Е.С., Гулис И.М.</i> Кафедра лазерной физики и спектроскопии: от фундаментальных исследований до прикладных разработок	3 24
<i>Горбацевич С.К., Михневич С.Ю., Смирнова О.Ю.</i> Растворы бихромофоров со сложным нелинейным амплитудным откликом на световое воздействие	1 19
<i>Демидчик В.И., Корнев Р.В.</i> Антенная модель киральных рассеивателей	2 14
<i>Деркач А.Н., Гранько С.В., Комаров Ф.Ф., Леонтьев А.В., Сузакова Т.Е.</i> Проблемы применения фоторезистивных масок в технологии КМОП-интегральных схем	1 26
<i>Добрянский В.М., Малишевский В.Ф., Францевич Н.Б., Яруничев В.П.</i> Физические свойства оксидов и купратов, синтезированных на основе соединений ZrV_2 и Nb_3Sn	2 34
<i>Зажогин А.П., Червяковский К.И., Булойчик Ж.И., Маслова Г.Т.</i> Количественный экспресс-анализ некоторых биоэлементов крови	2 3
<i>Карват Ч. (Польша).</i> Установка для нанесения слоев методом динамического ионного перемешивания	1 31
<i>Мулярчик С.Г., Шевкун И.М., Зиневич А.А.</i> Учет трехмерных эффектов при расчете сопротивления пассивной области базы биполярного планарного транзистора	2 11
<i>Пилипенко В.А., Анищик В.М., Пономарь В.Н., Пилипенко И.В.</i> Электрофизические и механические свойства дисилицида титана, полученного с применением быстрой термообработки	2 29
<i>Пилипенко В.А., Горушко В.А., Пономарь В.Н., Пилипенко И.В.</i> Фазовый состав и структура дисилицида титана, полученного с применением быстрой термообработки.	1 43
<i>Сачников В.А., Чернявская Э.А., Янукович Т.П.</i> Численное моделирование рассеяния Бриллюэна в оптическом волокне при синусоидальной модуляции сигнала	2 36
<i>Сухвало С.В., Власов В.В., Рудь В.Г.</i> Температурная перестройка фазовой структуры в FeNi-монокристаллах	1 38
<i>Сягло И.С.</i> Уравнения электродинамики в неинерциальных системах отсчета	1 3
<i>Фурс А.Н., Барковский Л.М.</i> Поверхностные электромагнитные волны на границе раздела одноосного кристалла и изотропной среды	1 10
<i>Черенкевич С.Н., Самаль А.Б., Зорин В.П., Зорина Т.Е., Семенова Г.Н., Коваленко Е.И., Тимошенко А.В., Горудко И.В., Хмельницкий А.И., Молчанов П.Г., Крот В.И., Горбацевич С.К.</i> Биофизические свойства клеток и модельных биоструктур	3 33
<i>Чернявский А.Ф., Попечиц В.И.</i> Развитие научных исследований в Институте прикладных физических проблем им. А.Н. Савченко Белгосунниверситета	3 18
<i>Шаршунов Д.В., Соловьев В.С.</i> Изучение формы импульсов фотопроводимости в алмазе типа Па	2 7

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

<i>Антоневич А.Б., Бахтин В.И., Лебедев А.В.</i> О двойственности по Лежандру между спектральным радиусом и Т-энтропией	3 67
<i>Бобков В.В.</i> Вычислительные алгоритмы с обратной связью для систем обыкновенных дифференциальных уравнений	3 57

<i>Демеш Н.Н., Акинфина М.А.</i> О дисперсии сглаженной периодограммы Барглетта..	1 75
<i>Емеличев В.А., Похилько В.Г.</i> Формула радиуса устойчивости парето-оптимального решения векторной задачи на подстановках	1 73
<i>Емельяненко В.И., Батурина Л.Н.</i> Подходы к решению задачи оценки научно-технической деятельности	2 66
<i>Еровенко В.А., Северенчук Н.Б.</i> Существенные спектры операторов взвешенного среднего в банаховых пространствах l_p	1 48
<i>Жук Е.Е., Храмова Е.В.</i> Кластер-анализ многомерных случайных наблюдений по гистограммной оценке плотности распределения вероятностей	2 81
<i>Журавков М.А.</i> Распространение макротрещин в породных массивах	3 73
<i>Зверович Э.И., Фатулаев Б.Ф.</i> О решении краевой задачи типа Карлемана для метаналитических функций в случае круга и дробно-линейного сдвига контура	1 55
<i>Зеневич Д.В.</i> Об устойчивости прогнозирования авторегрессионных временных рядов при наличии ошибок в задании параметров	2 70
<i>Иванов Н.Н., Игнатенко И.И.</i> Задача безотходного гильотинного ориентированного раскроя параллелепипеда на две детали	1 69
<i>Ковалев М.М.</i> Исследования по математической экономике в БГУ	3 44
<i>Котов В.М.</i> Асимметричная задача коммивояжера с длинами дуг, равными 1 или 2	3 86
<i>Кукрак Г.О., Тимохович В.Л.</i> О пределе обратного спектра экспоненциальных пространств	1 51
<i>Курбацкий А.Н.</i> Об одном подходе к автоматизации и оптимизации процесса принятия управленческих решений	3 82
<i>Мандрик П.А.</i> Аналитическое исследование двумерных задач нестационарной теплопроводности со смешанными граничными условиями	3 62
<i>Марковская Н.В.</i> Предельное распределение оценок смешанных моментов высших порядков	2 78
<i>Мартыненко М.Д., Босяков С.М.</i> Поверхности слабых и сильных разрывов в вязкоупругих жидких средах	2 49
<i>Матальцкий М.А., Астахов А.М.</i> Анализ стационарного режима сети с центральной системой и произвольным обслуживанием заявок	1 79
<i>Медведев Г.А.</i> Определение стоимости финансовых производных, когда случайный процесс цены актива имеет плавающую отражающую нижнюю границу	3 52
<i>Образцов В.А., Рябцев А.В.</i> Применение индуктивного алгоритма в задачах распознавания с выборками комбинаторной природы	1 65
<i>Прохорова Р.А., Шевцов И.Л.</i> Об ограниченных решениях слабо нелинейных систем с L^p -дихотомичным линейным приближением	2 53
<i>Репников В.И.</i> О свойствах некоторых функционалов, связанных с линейными дифференциальными системами	2 61
<i>Ружижская Е.А.</i> Стабилизация в большом маятника в верхнем положении	1 60
<i>Соболева Т.В.</i> Вычисление первых двух моментов расширенной периодограммы дискретного действительного устойчивого стационарного случайного процесса	2 73
<i>Труш Н.Н., Цеховая Т.В.</i> Асимптотическое поведение семиинвариантов высших порядков оценки вариограммы	2 75
<i>Чичурин А.В.</i> О специальной линейной системе Шази	2 57
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ	
<i>Гайшун Л.Н., Горячкин В.В., Крахотко В.В.</i> Минимальная реализация вполне разрешимых дискретных стационарных систем	1 88
<i>Корнийчук М.Б.</i> Распределение имплантированных ионов бора, азота и сурьмы в кобальте	1 86
<i>Мандрик П.А.</i> Об одном методе решения парных интегральных уравнений с тригонометрическими функциями в области преобразования Лапласа	1 89
<i>Пашкевич А.В.</i> К условиям эффективности векторной оценки многокритериальной дискретной задачи	2 90
<i>Размыслович Г.П.</i> К проблеме аналитического представления решений сингулярных дифференциальных систем	2 88
<i>Рогач П.П.</i> Об одном статистическом тесте обнаружения структурного изменения в системе одновременных уравнений	1 91
ПАМЯТИ УЧЕНОГО	
Александр Михайлович Бельский	2 93

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

<i>Барковский Л.М., Алексеева Т.А.</i> Академик Ф.И. Федоров и развитие физической науки в Белгосуниверситете (к 90-летию со дня рождения).....	3
<i>Анищик В.М., Гольцев В.П., Дорожкин Н.Н., Драко В.М., Жукова С.И., Ходасевич В.В., Шепелевич В.Г.</i> Кафедра физики твердого тела: от рождения до зрелости	9
<i>Чернявский А.Ф., Попечиц В.И.</i> Развитие научных исследований в Институте прикладных физических проблем им. А.Н. Севченко Белгосуниверситета..	18
<i>Воропай Е.С., Гулис И.М.</i> Кафедра лазерной физики и спектроскопии: от фундаментальных исследований до прикладных разработок.....	24
<i>Черенкевич С.Н., Самаль А.Б., Зорин В.П., Зорина Т.Е., Семенкова Г.Н., Коваленко Е.И., Тимошенко А.В., Горудко И.В., Хмельницкий А.И., Молчанов П.Г., Крот В.И., Горбацевич С.К.</i> Биофизические свойства клеток и модельных биоструктур.....	33

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

<i>Ковалев М.М.</i> Исследования по математической экономике в БГУ	44
<i>Медведев Г.А.</i> Определение стоимости финансовых производных, когда случайный процесс цены актива имеет плавающую отражающую нижнюю границу.....	52
<i>Бобков В.В.</i> Вычислительные алгоритмы с обратной связью для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.....	57
<i>Мандрик П.А.</i> Аналитическое исследование двумерных задач нестационарной теплопроводности со смешанными граничными условиями.....	62
<i>Антоневич А.Б., Бахтин В.И., Лебедев А.В.</i> О двойственности по Лежандру между спектральным радиусом и T -энтропией.....	67
<i>Журавков М.А.</i> Распространение макротрещин в породных массивах.....	73
<i>Курбацкий А.Н.</i> Об одном подходе к автоматизации и оптимизации процесса принятия управленческих решений	82
<i>Котов В.М.</i> Асимметричная задача коммивояжера с длинами дуг, равными 1 или 2.....	86
Рефераты	91
Указатель статей, опубликованных в 2001 г.	95

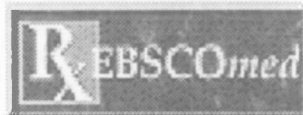
CONTENTS

PHYSICS

<i>Barkovski L.M., Alexeeva T.A.</i> Academician F.I. Fedorov and the development of physical science in Belarussian State University (to the 90 th anniversary)	3
<i>Anishchik V.M., Goltsev V.P., Dorozhkin N.N., Drako V.M., Zhukova S.I., Khodasevich V.V., Shepelevich V.G.</i> Solid-state Physics: from origination to the present day	9
<i>Chernyavsky A.F., Popechits V.I.</i> Research development in the A.N. Sevchenko Institute for Applied Physical Problems of Byelorussian State University	18
<i>Voropay E.S., Gulis I.M.</i> Division of Laser Physics and Spectroscopy: from fundamental research to applied developments	24
<i>Cherenkevich S.N., Samal A.B., Zorin V.P., Zorina T.E., Semenkova G.N., Kovalenko E.I., Timoshenko A.V., Gorudko I.V., Khmelnitsky A.I., Molchanov P.G., Krot V.I., Gorbatshevich S.K.</i> Biophysical properties of cells and model biostructures	33

MATHEMATICS AND INFORMATICS

<i>Kovalev M.M.</i> Mathematical Economics Research in BSU	44
<i>Medvedev G.A.</i> Pricing of financial derivatives when price of underlying asset has lower nonzero reflecting boundary	52
<i>Bobkov V.V.</i> Numerical algorithms with inverse communication for ordinary differential systems	57
<i>Mandrik P.A.</i> Analytical Investigation of Two-dimensional Non-stationary Heat Transfer Problems with Mixed Boundary Conditions	62
<i>Antonevich A.B., Bakhtin V.I., Lebedev A.V.</i> On Legendere duality between spectral radius and T -entropy	67
<i>Zhuravkov M.A.</i> Spread of macrocraks in rocks massifs	73
<i>Kurbatsky A.N.</i> An approach to automatization and optimatization of processes for decision making	82
<i>Kotov V.M.</i> Asymmetric Travelling Salesman Problem with Distances One and Two	86
Summary	91
Index of articles publised in 2001	95



Фундаментальная библиотека

Белорусского государственного университета

Предлагает ознакомиться с полнотекстовыми базами данных компании EBSCO

База данных по бизнесу и экономике (Business Source Premier) (1984–окт. 2000)

Предлагает большое собрание журналов по экономике и бизнесу, начиная с 1990 года. Содержит:

- ◆ Полный текст более 1320 журналов, включая Harvard Business Review, Academy of Management Review и многие другие научные журналы по управлению, экономике и другим областям бизнеса.
- ◆ Рефераты и аннотированные указатели более 2000 деловых журналов, включая The Wall Street Journal.

Медицинская база данных (MEDLINE) (1966–май 2000)

Является ведущей базой данных, посвященной всем областям медицины и биомедицинских исследований. Ведется Национальной медицинской библиотекой США.

Содержит:

- ◆ Полный набор аннотаций Medline, начиная с 1966 года до настоящего момента.
- ◆ Ссылки со статей в Medline, к соответствующим полным текстам статей, напечатанных более чем в 80 ведущих медицинских журналах.
- ◆ Полный текст журналов, начиная с 1990 года.

База данных ежедневных газет (Newspaper Source) (1995–июль 2000)

Содержит более полумиллиона статей из англоязычных газет многих стран мира.

База данных научных журналов (Academic Search Elite) (1984–окт. 2000)

Представляет собой одно из самых полных собраний научных журналов.

В БД входят:

- ◆ Полные тексты более 1230 журналов, среди которых многие издания с 1990 года.
- ◆ Рефераты и аннотированные указатели более 3000 научных журналов, среди которых многие издания с 1984 года.

База данных популярной периодики (Public Library) (1984–июль 2000)

Ориентирована на нужды публичных библиотек и состоит из журналов на общие темы, включая темы бизнеса, политики, здоровья, искусства и культуры. Включает в себя:

- ◆ Полный текст более 1810 журналов, начиная с 1990 года.
- ◆ Рефераты и аннотированные указатели более чем 2780 журналов, начиная с 1984 года.

База данных научно-популярной периодики (Magazine Article Summaries) (1984–окт. 2000)

Представляет собой собрание журналов общего характера, начиная с 1984 года.

Содержит:

- ◆ Полный текст более 400 журналов, среди которых многие издания с 1990 года.
- ◆ Рефераты и аннотированные указатели, включая Magill Book Reviews.

Доступ к базам данных представляется в формате CD/DVD-ROM. Все журналы и другие информационные источники представлены в базах данных на английском языке.

АДРЕС: 220050, г. Минск, пр. Скорины, 4,
каб. 231 (Зал информационного обслуживания)
Время работы: пн., вт., ср., чт.: 9⁰⁰–17⁰⁰. пт.: 9³⁰–16⁰⁰
Тел. 209-50-82