УДК 517.51

Л. Л. БЕРЕЗКИНА

СРАВНЕНИЕ СТРОК РАЦИОНАЛЬНОЙ ТАБЛИЦЫ ЧЕБЫШЕВА — ГОНЧАРА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ 2π-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Через $C_{2\pi}=\{f(x)\}$ обозначаем пространство непрерывных 2π-периодических функций с обычным определением нормы: $\|f\|=\sup\limits_{-\infty<x<\infty}|f(x)|$.

Пусть $R^T_{n,k}(f)$ есть наилучшее приближение функции $f(x)\in C_{2\pi}$ на действительной оси рациональными тригонометрическими функциями, у которых числитель имеет порядок не выше n и порядок знаменателя не превышает k, т. е.

$$R^T_{n,k}(f)=\inf_{r^T_{n,k}(x)}\|f(x)-r^T_{n,k}(x)\|.$$

Тригонометрической рациональной таблицей Чебышева — Гончара будем называть таблицу, составленную из наилучших приближений

$$\begin{bmatrix} R^T_{0,0}(f), & R^T_{1,0}(f), & \dots, & R^T_{n,0}(f), & \dots \\ R^T_{0,1}(f), & R^T_{1,1}(f), & \dots, & R^T_{n,1}(f), & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R^T_{0,1}(f), & R^T_{1,n}(f), & \dots, & R^T_{n,n}(f), & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Нулевая строка таблицы (1) состоит из наилучших приближений тригонометрическими полиномами, поведение элементов этой строки достаточно хорошо изучено.

В работах В. Н. Русака [1, 2] исследовалась диагональная последовательность таблицы (1) на классах функций, представимых в виде свертки ядра Вейля дробного порядка (сопряженного ядра Вейля) и функции ограниченной вариации.

В данной заметке излагаются результаты о поведении строк таблицы Чебышева — Гончара для индивидуальных целых 2π-периодических функций или 2π-периодических функций, аналитических в некоторой горизонтальной полосе. Через A_k, B_k обозначаем положительные константы, которые, вообще говоря, зависят от k. Если бесконечно малые (α_n) и (β_n) имеют одинаковый порядок, то пишем $\alpha_n\asymp\beta_n$.

Теорема 1. При фиксированном k выполнено соотношение

$$R^T_{n,k}(\exp\sin x)\leqslant\frac{A_k}{(n+1)^{2k}}\,\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\asymp\frac{R^T_{n0}(\exp\sin x)}{(n+1)^{2k}}. \qquad (2)$$

Замечание 1. Результаты, аналогичные соотношению (2), получены и для целых 2π-периодических функций; $\exp\cos x$, $\sin\sin x$, $\cos\sin x$, $\operatorname{sh}\cos x$, $\operatorname{sh}\sin x$, $\operatorname{ch}\sin x$, $\sin\cos x$, $\cos\cos x$, $\operatorname{ch}\cos x$.

Для функций, аналитических в горизонтальной полосе, строки матрицы (1) сравниваются подобным образом.

Теорема 2. При нечетных n и фиксированном k выполнено соотношение:

$$R^T_{n,2k}(\operatorname{arctg}\cos x)\leqslant\frac{B_k}{n^{2k+1}}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^n\asymp\frac{R^T_{n0}(\operatorname{arctg}\cos x)}{n^{2k}}. \qquad (3)$$

Замечание 2. Для аналитических функций $\ln(a+\sin x)$, $\ln(a+\cos x)$, $(a+\sin x)^\alpha$ $(|a|>1)$ получены оценки, аналогичные соотношению (3).

Доказательство приведенных результатов основано на исследовании уклонений функции от специального вида рациональных операторов.

Замечание 3. В случае приближения на конечном отрезке $[-h, h]$ исследование первой строки таблицы вида (1) для некоторых аналитических функций проведено В. Р. Кравчуком [3]. Д. Браесс [4] провел полное исследование строк матрицы наилучших рациональных приближений экспоненты на отрезке $[-1, 1]$.

В заключение выражаю глубокую благодарность В. Н. Русаку за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. Русак В. Н. Докл. АН СССР. 1984. Т. 279. № 4. С. 810.
2. Русак В. Н. // Матем. сб. 1985. Т. 128. (170). Вып. 4. (12). С. 412.
3. Кравчук В. Р. РА-метод и его применение к приближению элементарных функций (Препринт 85.18 / АН УССР. Киев, 1985. С. 7.)
4. Braess Dietrich. On rational approximation of the exponential and the square root functions // Lect. Notes. N. 1105. P. 89.

Поступила в редакцию 03.03.86.

УДК 519.853.5

А. В. ЛУБОЧКИН

МЕТОД ПЕРВОГО ПОРЯДКА РЕШЕНИЯ ВЫПУКЛОЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ СЕПАРАБЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу

$$f(x) = \sum_{j \in J} c_j |x_j - \alpha_j| \to \min, \ Ax = b, \ d_* \leqslant x \leqslant d^*, \tag{1}$$

где $x = x(J) \in R^n$; $b = b(I) \in R^m$; $I = \{1, 2, \ldots, m\}$; $J = \{1, 2, \ldots, n\}$; $c = (c_j \geqslant 0, j \in J)$; $\operatorname{rank} A = m$. Определения плана x, оптимального плана, опоры (ограничений) $J_{\text{оп}}$, опорного плана $\{x, J_{\text{оп}}\}$ традиционны *. Опорный план считается невырожденным, если $d_{*j} < x_j < d_j^*$, $j \in J_{\text{оп}}$; $x_j \neq \alpha_j$, $j \in J_{c\,\text{оп}} = J_c \cap J_{\text{оп}}$, $J_c = \{j \in J: c_j > 0\}$.

Пусть $\{x, J_{\text{оп}}\}$ — начальный опорный план; по нему построим вектор $s = A'u$, где $A'_{\text{оп}} u = c^*_{\text{оп}}$, $A_{\text{оп}} = A(I, J_{\text{оп}})$, $c^*_{\text{оп}} = c^*(J_{\text{оп}})$, $c^* = c^*(J)$, $c^*(J_c^+) = c(J_c^+)$, $c^*(J_c^-) = -c(J_c^-)$, $c^*(J_0) = 0$, $J_0 = J \setminus J_c$, $J_c^+ = \{j \in J_c : x_j \geqslant \alpha_j\}$, $J_c^- = \{j \in J_c : x_j < \alpha_j\}$.

Критерий оптимальности. Соотношения $s_j \leqslant c_j \xi_j$ при $x_j = d_{*j}$; $s_j \geqslant c_j \xi_j$ при $x_j = d_j^*$; $s_j = c_j \xi_j$ при $x_j \neq \alpha_j$, $d_{*j} < x_j < d_j^*$; $|s_j| \leqslant c_j$ при $x_j = \alpha_j$, $d_{*j} < x_j < d_j^*$, $j \in J_{\text{н}} = J \setminus J_{\text{оп}}$, где $\xi_j = \operatorname{sign}(x_j - \alpha_j)$, достаточны, а в случае невырожденности и необходимы, для оптимальности опорного плана $\{x, J_{\text{оп}}\}$ (здесь и далее $\operatorname{sign}(d_{*j} - \alpha_j = 0) = 1$, $\operatorname{sign}(d_j^* - \alpha_j = 0) = -1$).

Предположим, что для $\{x, J_{\text{оп}}\}$ критерий оптимальности не выполняется. Введем параметры метода (положительные числа): ε, μ_1, μ_2. Опишем итерацию метода. Положим вначале $\nu^0(J_{\text{н}}) = 0$, $p^0(J_{\text{н}}) = 0$, $x^0 = x$, $s^0 = s$, $k = 0$.

1. Построим вектор l^k: $l_j^k = d_{*j} - x_j^k$ при $s_j^k < c_j \xi_{*j}$; $l_j^k = d_j^* - x_j^k$ при $s_j^k > c_j \xi_j^*$, $j \in J_{\text{н}}$; $l_j^k = \alpha_j - x_j^k$ при $-c_j \leqslant s_j^k < c_j$, $x_j^k > \alpha_j$; $-c_j < s_j^k \leqslant c_j$, $x_j^k < \alpha_j$, $j \in J_{c\text{н}} = J_c \cap J_{\text{н}}$, $d_{*j} < \alpha_j < d_j^*$; $l_j^k = 0$ в остальных случаях, $j \in J_{\text{н}}$; $l^k(J_{\text{оп}}) = -A_{\text{оп}}^{-1} A(I, J_{\text{н}}) l^k(J_{\text{н}})$, где $\xi_{*j} = \operatorname{sign}(d_{*j} - \alpha_j)$, $\xi_j^* = \operatorname{sign}(d_j^* - \alpha_j)$.

2. Положим: $\nu_j^{k+1} \operatorname{sign} l_j^k$, если $l_j^k \neq 0$; $\nu_j^{k+1} = \nu_j^k$, если $l_j^k = 0$; $p_j^{k+1} = p_j^k + 1$, если $\nu_j^{k+1} \nu_j^k < 0$; $p_j^{k+1} = p_j^k$, если $\nu_j^{k+1} \nu_j^k \geqslant 0$, $j \in J_{\text{н}}$. Подсчитаем шаг Θ^k: $\Theta^k = \min\{1, \Theta^k_{\text{оп}}, \Theta^k_a\}$; $\Theta^k_{\text{оп}} = \min \Theta_j^k$, $j \in J_{\text{оп}}$; $\Theta_j^k = (d_{*j} - x_j^k)/l_j^k$,

---

* Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. Методы линейного программирования. Минск, 1980. Ч. 3.