$$\Phi^{\pm}(x)=\frac{\Phi_*^{\pm}(x)}{(a^2-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}-\varepsilon}}\ (\varepsilon>0),\ \Phi_*^{\pm}(x)\in H_\lambda, \tag{26}$$

соответствует решение φ уравнения (1), определяемое по формуле (10), в которой следует заменить $l(x)$ на функцию

$$\frac{(a^2-x^2)^{\frac{1-\alpha}{2}}}{1-e^{-\alpha\pi i}}\left(\Phi^+(x)+\Phi^-(x)\right).$$

При сделанных предположениях φ принадлежит классу (4).

Из равносильности в соответствующих классах (1) и (24) вытекает

Теорема. Пусть f удовлетворяет условию (3), A, B — условию (2). Если $\Delta(x)\neq 0$ на $[-a; a]$, то краевая задача (24) имеет в классе (26) единственное решение.

Если $\Delta(x)\equiv 0$ и $\Delta_1(x)\equiv 0$ на $[-a; a]$, то краевая задача (24) имеет в классе (26) бесконечно много решений, зависящих от произвольной четной или нечетной функции.

Решения задачи (24) находятся по формуле (25), где $\varphi(t)$ — соответствующее решение уравнения (1).

Замечание. Из п. 1, 2 вытекает, что уравнение (1) (и равносильная ему задача (24)) является нётеровым (и даже фредгольмовым) тогда и только тогда, когда

$$\Delta(x)\equiv A(x)A(-x)-B(x)B(-x)\neq 0,\ x\in[-a; a].$$

Список литературы

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
2. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М., 1977.
3. Карапетянц Н. К., Самко С. Г. // Изв. АН АрмССР. Математика. 1970. Т. 5. № 5. С. 441.
4. Küczma M. Functional equations in a single variable. Warszawa, 1968.

Поступила в редакцию 20.02.86.

УДК 517.988.8; 517.983

П. П. ЗАБРЕЙКО, Т. А. МАКАРЕВИЧ

ПРИНЦИП НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ И ТЕОРЕМА Л. В. ОВСЯННИКОВА

Известная теорема Л. В. Овсянникова и ее многочисленные обобщения внесли большой вклад в решение проблемы о разрешимости задачи Коши для дифференциальных уравнений, однако она стоит несколько в стороне от классических принципов неподвижной точки разрешимости операторных уравнений. В настоящей статье показывается, что теорема Л. В. Овсянникова является следствием одного варианта принципа сжимающих отображений в псевдометрических (К-метрических) пространствах. Предлагаемый вариант принципа сжимающих отображений основан на естественном обобщении понятия спектрального радиуса на не обязательно линейные операторы, действующие в упорядоченных линейных пространствах.

1. Пусть Ω — произвольное множество, $\mathbf{F}(\Omega)$ — пространство всех вещественных функций на Ω с обычными линейными операциями и порядком, в $\mathbf{F}(\Omega)$ определена естественная (поточечная) сходимость; пусть $\mathbf{K}(\Omega)$ — конус неотрицательных функций из $\mathbf{F}(\Omega)$.

Допустим, что оператор Q определен на некотором подмножестве из $\mathbf{K}(\Omega)$, содержащем 0, и принимает на этом множестве значения из $\mathbf{K}(\Omega)$. Нас будет интересовать вопрос о множестве $\Sigma(Q)$ элементов $z\in\mathbf{K}(\Omega)$, для которых ряд Неймана

$$S(Q)z = \sum_{n=1}^{\infty} Q^n z \qquad (1)$$

сходится поточечно в $\mathbf{F}(\Omega)$. Ясно, что это множество является подмножеством $\mathbf{K}(\Omega)$, на котором определены все итерации Q^n $(n=1, 2, \ldots)$ оператора Q. Положим

$$r(Q)z = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{Q^n z}; \qquad (2)$$

этот оператор ниже называется обобщенным спектральным радиусом Q. Из классического критерия Коши сходимости рядов вытекает

Лемма 1. *Справедливы включения*

$$\{z\in\mathbf{K}(\Omega) : r(Q)z<1\}\subset\Sigma(Q)\subset\{z\in\mathbf{K}(\Omega) : r(Q)z\leqslant 1\}. \qquad (3)$$

Пусть теперь X — некоторое множество и $d: X\times X\to\mathbf{F}(\Omega)$ — некоторая псевдометрика, т. е. отображение, удовлетворяющее свойствам: $d(x, y)\geqslant 0 (x, y\in X)$; $d(x, y)=0$ в том и только в том случае, когда $x=y$; $d(x, y)=d(y, x)$ $(x, y\in X)$; $d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)$ $(x, y, z\in X)$; пусть псевдометрическое пространство (X, d) секвенциально полно.

Рассмотрим действующий в X оператор A. Будем говорить, что он удовлетворяет условию Липшица, если для него справедливо неравенство

$$d(Ax, Ay)\leqslant Qd(x, y) \quad (x, y\in X), \qquad (4)$$

где Q — некоторый оператор в $\mathbf{K}(\Omega)$. Нас будет интересовать разрешимость в X операторного уравнения

$$x=Ax. \qquad (5)$$

Более точно, нас будут интересовать начальные приближения $x_0\in X$, для которых последовательные приближения

$$x_{n+1}=Ax_n \quad (n=0, 1, 2, \ldots) \qquad (6)$$

будут сходиться (их предел, в силу (4), является решением уравнения (7)). Справедлива основная

Теорема 1. *Пусть (X, d) — секвенциально полное псевдометрическое пространство, A — действующий в нем оператор, удовлетворяющий условию Липшица* (4). *Пусть для некоторого $x_0\in X$ выполняется неравенство*

$$r(Q)d(x_0, Ax_0)<1. \qquad (7)$$

Тогда уравнение (5) *имеет в X, по крайней мере, одно решение x_*, которое является пределом последовательных приближений* (6); *это решение единственно на множестве*

$$\mathbf{M}(x_0)=\{x\in X : r(Q)d(x, x_0)<1\}. \qquad (8)$$

2. Проиллюстрируем возможность использования теоремы 1 для доказательства теоремы о разрешимости задачи Коши для дифференциальных уравнений в условиях Л. В. Овсянникова.

Допустим, что нам задано семейство банаховых пространств E_s $(0\leqslant s<1)$, для которых выполнены условия

$$E_\sigma\subset E_s \ (\sigma>s), \quad \|x\|_s\leqslant\|x\|_\sigma \ (\sigma>s, x\in E_\sigma). \qquad (9)$$

Пусть X — пространство функций, определенных на $[0, T]$, и X_δ — совокупность функций из $[0, 1]$, для которых $\|x(t)\|_s<\infty$ $(0\leqslant t\leqslant\delta(s)$, $0\leqslant s<1)$, где δ — некоторая функция из $[0, 1]$ в $[0, T]$.

Множество X_δ является линейным пространством; его можно рассматривать как K-нормированное пространство, если в качестве Ω взять множество $\Omega=\{\omega=(s, t) : 0\leqslant t\leqslant\delta(s), 0\leqslant s<1\}$ и в качестве K-нормы — функцию

$$\|x\|_\omega=\|x(t)\|_s \ (\omega=(t, s)); \qquad (10)$$

нетрудно видеть, что пространство секвенциально полно

Ниже нам понадобится оператор

$$Qz(t, s) = c\min_{\sigma>s}(\sigma-s)^{-\alpha}\int_0^t z(\tau, \sigma)\,d\tau. \qquad (11)$$

Лемма 2. *Пусть $z_0(t, s)=m(1-s)^{-\beta}$ и либо $\alpha<1$ и $\delta(s)=T$, либо $\alpha=1$ и $\delta(s)=(ce)^{-1}(1-s)$. Тогда $r(Q)z_0(t, s)=0$ в первом случае и $r(Q)z_0(t, s)=ce(1-s)^{-1}t$ — во втором.*

Доказательство леммы следует из почти очевидных равенств $Q^k z_0(t, s) = mc^k \frac{(k\alpha+\beta)^{k\alpha+\beta}}{\alpha^{k\alpha}\beta^\beta(k+1)!}(1-s)^{-k\alpha-\beta}t^{k+1}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ и определения обобщенного спектрального радиуса оператора Q.

Допустим теперь, что задана функция $f(t, x):[0, T]\times E_0 \to E_0$, непрерывная по t в X_s при $x \in X_\sigma$ $(\sigma > s)$, причем выполнены условия

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_s \leqslant c(\sigma - s)^{-\alpha}\|x_1 - x_2\|_\sigma \quad (0 \leqslant s < \sigma < 1) \tag{12}$$

и

$$\|f(t, x)\|_s \leqslant m(x)(1-s)^{-\beta} \quad (0 \leqslant s < 1). \tag{13}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),\ x(0) = x_0 \quad (x_0 \in \bigcap_{0 \leqslant s < 1} E_s). \tag{14}$$

Эта задача сводится к исследованию операторного уравнения (5) с оператором

$$Ax(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau, x(\tau))\,d\tau; \tag{15}$$

этот оператор, очевидно, удовлетворяет условию (4), в котором Q определен равенством (11). Тем самым, из теоремы 1 и леммы 2 следует

Теорема 2. *Задача Коши (14) при $\alpha < 1$ имеет единственное в X_δ решение, определенное на всем $[0, T]$. Задача Коши (14) при $\alpha = 1$ имеет, по крайней мере, одно решение, определенное на $[0, T_*]$, где $T_* = \min\{T, (ce)^{-1}\}$; это решение единственно на множестве функций*

$$\mathbf{M}(x_0) = \{x(t) \in X_\delta:\ \sup_{1 \leqslant s < 0} \|x(t) - x_0\|_s (1-s)^\beta < \infty\}.$$

Таким образом, утверждение теоремы 2 в случае $\alpha = 1$ является одним из обобщений классической теоремы Л. В. Овсянникова (см. [2—8]).

Список литературы

1. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенные методы решения операторных уравнений. М., 1969.
2. Yamanaka T. // Comment. Math. Univ. St. Paul. 1960. V. 9. P. 7.
3. Овсянников Л. В. // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163. № 4. С. 819.
4. Treves J. K. Ovsjannikov theorem and hyperdifferential operators // Notas. Math. (Mimeographed Notes). 1968. Т. 46.
5. Treves J. K. // Trans. Amer. Soc. Math. 1970. V. 150. P. 77.
6. Овсянников Л. В. // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200. № 4. С. 789.
7. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. М., 1977.
8. Радыно Я. В. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 8. С. 1412.

Поступила в редакцию 17.04.86.

УДК 519.1

И. Э. ЗВЕРОВИЧ

СТЕПЕННОЕ МНОЖЕСТВО ДЕРЕВА

Рассматриваются конечные, неориентированные графы без петель и кратных ребер. Неопределяемые понятия можно найти в [1]. Степенным множеством D_G графа G называется множество степеней вершин G [2]. Известны условия реализуемости [3] и однозначной реализуемости [4] пары (S, p), где

$$S = \{k_1, \ldots, k_n\},\ 0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_n,\ n \geqslant 1 \tag{1}$$

и $p \geqslant 1$, графом G порядка p с $D_G = S$. Эти условия легко проверяются. Известны также условия реализуемости множества S деревом [2]: (1) реализуется деревом тогда и только тогда, когда $k_1 = 1$.

В этой статье доказано, что задача древесной реализуемости пары (S, p) NP-полна и описаны все пары (S, p) с единственной реализацией — деревом.