SFP-системы и изменив лишь семантические действия, определяющие алгоритмы преобразования входной информации, просто и быстро построить такие подсистемы, как анализатор, схематизатор и линеаризатор. Средства работы с рекурсивными функциями языка СР/ТРАН также упростили процесс реализации системы.

Список литературы

1. Backus J.// Communications of the ACM. 1978. V. 21. № 8. P. 613.
2. Зубович К. А.// Проблемы создания и совершенствования технических и программных средств э. в. м. широкого применения. Минск. 1982. С. 54.
3. Манна З.// Кибернетический сб. Новая серия. М. 1978. Вып. 15. С. 38.
4. Backus J.// Lecture Notes in Computer Science. 1981. V. 107. P. 1.
5. Дробушевич Г. А., То Туан, Зубович К. А.// Программирование. 1984. № 3. С. 84.

Поступила в редакцию 11.09.85.

УДК 517.938

Б. С. КАЛИТИН

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ КОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВ

1. Пусть $(X, \boldsymbol{R}, \pi)$ — динамическая система [1, 2], заданная на локально компактном метрическом пространстве (X, d) с расстоянием $d: X \times X \to \boldsymbol{R}$. Пусть M и Y — два положительно инвариантных подмножества X, из которых M компактно, а Y замкнуто и содержит M. Положим $B(M, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(M, x) < \varepsilon\}$; $\bar{B}(M, \varepsilon)$ — замыкание $B(M, \varepsilon)$ и $S(M, \varepsilon) = \bar{B}(M, \varepsilon) \setminus B(M, \varepsilon)$. Обозначим через $\gamma^+(x)$, $\gamma^-(x)$ и $\gamma(x)$ соответственно положительную полутраекторию, отрицательную полутраекторию и траекторию движения xt, $x: t \mapsto xt$, $\forall x \in X$, и пусть $L^+(x)$ означает множество всех ω-, а $L^-(x)$ — множество всех α-предельных точек для $x \in X$. Напомним (см. [1, 2]), что множество N из X называют положительно инвариантным, отрицательно инвариантным или инвариантным, если соответственно выполняются равенства: $N\boldsymbol{R}_+ = N$, $N\boldsymbol{R}_- = N$ или $N\boldsymbol{R} = N$. Кроме того, M называется [2]:

(а)-устойчивым относительно Y, если

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0): \gamma^+(B(M, \delta) \cap Y) \subset B(M, \varepsilon);$$

(б)-асимптотически устойчивым относительно Y, если оно устойчиво относительно Y и область его притяжения $A_Y(M) = \{x \in Y \mid L^+(x) \subset M\}$ является окрестностью M в Y;

(в)-глобально асимптотически устойчивым относительно Y, если оно асимптотически устойчиво относительно Y и $A_Y(M) = Y$. (В современной литературе устойчивость относительно Y иногда называют Y-устойчивостью.)

2. Приведем теперь ряд утверждений, касающихся качественной теории проблем относительной устойчивости компактных множеств. Соответствующие этому результаты являются продолжением исследований устойчивости компактных множеств, выполненных в [1, 3, 4].

Лемма 1. Если M устойчиво относительно Y, то $\forall\, \gamma(x) \subset Y$ — пересечение $L^-(x) \cap M = \varnothing$. (Здесь и всюду в дальнейшем $\varnothing$ — пустое множество.)

Лемма 2. Если M неустойчиво относительно Y, то всякая окрестность U множества M в Y обладает тем свойством, что $U \setminus M$ содержит отрицательную полутраекторию. Более точно, существует компактная окрестность $\bar{B}(M, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, для которой $\forall\, \varepsilon_1 \in\,]0, \varepsilon]$ существуют последовательности (x_n), $x_n \in Y$, и (t_n), $t_n \geqslant 0$, такие, что $x_n \to x \in M$, $x_n t_n \to y \in S(M, \varepsilon) \cap Y$ при $n \to +\infty$, причем $\gamma^-(y) \subset (\bar{B}(M, \varepsilon_1) \setminus M) \cap Y$.

Доказательство. Пусть M не является Y-устойчивым. Тогда

$\exists\, \varepsilon > 0$ и последовательности (x_n), $x_n \in B(M, \varepsilon) \cap Y$, $d(x_n, M) \to 0$ и (t_n), $t_n \geqslant 0$, такие, что

$$d(x_n t, M) < \varepsilon \text{ при } 0 \leqslant t < t_n \text{ и } x_n t_n \in S(B, \varepsilon) \cap Y. \qquad (1)$$

Так как M компактно, то можно считать $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы $\bar{B}(M, \varepsilon)$ было компактным множеством [1]. Поэтому, не нарушая общности дальнейших рассуждений, считаем, что сходится последовательность (y_n), $y_n = x_n t_n$. В силу замкнутости Y из того, что $y_n \to y$, следует включение: $y \in Y \cap S(M, \varepsilon)$. Кроме того, так как $M\boldsymbol{R}_+ = M$, то $t_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$.

Покажем, что $\gamma^-(x) \subset \bar{B}(M, \varepsilon) \setminus M$. Действительно, во-первых, заметим, что в силу положительной инвариантности M и условия $d(y, M) = \varepsilon$ следует, что $\gamma^-(y) \cap M = \varnothing$. Предположим противное, т. е. $\exists\, \tau < 0$, для которого $y\tau \notin \bar{B}(M, \varepsilon)$. Выберем число μ так, чтобы $0 < \mu < 0{,}5 \times \times\, d(B(M, \varepsilon), y\tau)$. Тогда по аксиоме непрерывности динамических систем можно указать число $\nu = \nu(\mu) > 0$ такое, что из неравенства $d(y, y_n) < \nu$ (при всех $n \geqslant N \in \boldsymbol{N}$) следовало бы соотношение $d(y\tau, y_n\tau) < \mu$.

Указанный номер N можно, очевидно, считать настолько большим, чтобы из условия $t_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$ вытекало бы неравенство $0 < \tau + t_n$. $\forall\, n \geqslant N$.

Теперь, используя неравенство треугольника, получаем $d(y_n\tau, B(M, \varepsilon)) \geqslant d(y\tau, B(M, \varepsilon)) - d(y_n\tau, y\tau) \geqslant d(y\tau, B(M, \varepsilon)) - \mu$ $\forall\, n \geqslant N$, т. е. $d(y_n\tau, B(M, \varepsilon)) \equiv d(x(\tau + t_n), B(M, \varepsilon)) > 0$ $\forall\, n \geqslant N$, что при $t = \tau + t_n$ противоречит соотношениям (1). Следовательно, $\gamma^-(y) \subset \subset \bar{B}(M, \varepsilon) \setminus M$.

Наконец, покажем, что $\gamma^-(y) \subset Y$. На самом деле, пусть $z \in \gamma^-(y)$, т. е. $z = y\tau$ для некоторого момента $\tau < 0$.

В силу аксиомы непрерывности для любой последовательности (ε_n), $\varepsilon_n > 0$, сходящейся к нулю, можно указать последовательность чисел $\delta_n = \delta_n(\varepsilon_n, \tau) > 0$ такую, что $d(y, x) < \delta_n \Rightarrow d(y\tau, x\tau) < \varepsilon_n$. Так как $y_n \to y$, то по числу δ_n можно указать номер $N = N(n) \in \boldsymbol{N}$, для которого $d(y, y_m) < \delta_n$ $\forall\, m \geqslant N$. По построению имеем $d(y\tau, y_n\tau) \to 0$ при $n \to +\infty$. Но $y_N\tau \equiv x_N(\tau + t_N)$. Поэтому так как $t_n \to +\infty$, то при достаточно большом $m \geqslant N$ $0 < \tau + t_m < t_m$, что в силу (1) означает включение $x_m(\tau + t_m) = y_m\tau \in Y$. Отсюда в силу замкнутости Y и следует, что $y\tau \in Y$. Таким образом, в силу произвольности выбора числа $\tau < 0$ получаем: $\gamma^-(y) \subset Y$.

Ясно, что приведенные рассуждения остаются справедливыми и при любом значении $\varepsilon_1 \in \,]0, \varepsilon]$, что и завершает доказательство леммы 2.

Теорема 1. Множество M асимптотически устойчиво относительно Y тогда и только тогда, когда существует окрестность W множества M в Y такая, что $(W \setminus M) \cap Y$ не содержит отрицательных полутраекторий.

Доказательство. Пусть W окрестность M в Y и $(W \setminus M) \cap Y$ не содержит отрицательных полутраекторий. Тогда по лемме 2 множество M является Y-устойчивым, т. е. выполняется (а). Пусть при этом $\varepsilon > 0$ настолько малое, что $\bar{B}(M, \varepsilon) \cap Y \subset W$. Покажем, что $B(M, \delta) \cap Y \subset \subset A_Y(M)$. Действительно, поскольку $\overline{\gamma^+(x)} \subset \bar{B}(M, \varepsilon)$, то $\forall\, x \in \in B(M, \delta) \cap Y$ множество $L^+(x)$ непусто и инвариантно [1, 2]. Кроме того, по построению $L^+(x) \subset \bar{B}(M, \varepsilon) \subset W$, а значит, $L^+(x) \setminus M$ не содержит отрицательных полутраекторий. Последнее, согласно инвариантности $L^+(x)$, означает, что $L^+(x) \subset M$, т. е. $B(M, \delta) \cap Y \subset A_Y(M)$. Таким образом, достаточность требований теоремы доказана.

Обратно, пусть M является Y-асимптотически устойчивым, т. е. выполняются (а) и (б). Выберем число $\Delta > 0$ меньше чем δ так, чтобы $\bar{B}(M, \Delta)$ было компактным подмножеством $A_Y(M)$ и покажем, что в качестве окрестности W можно взять $B(M, \Delta) \cap Y$. На самом деле, пусть, напротив, множество $(B(M, \Delta) \setminus M) \cap Y$ содержит некоторую отрицательную полутраекторию $\gamma^-(x)$. Тогда поскольку $\gamma^-(x) \subset B(M, \Delta)$, то

$\overline{\gamma^-(x)}$ компактно, а значит, множество $L^-(x)$ непусто компактно инвариантно и принадлежит Y в силу того, что Y замкнуто. Далее, по построению $L^-(x) \setminus M \subset A_Y(M)$ и поэтому $\forall y \in L^-(x) \setminus M$ имеем: $d(yt, M) \to 0$ при $t \to +\infty$, а поскольку $L^+(y)$ замкнуто, $L^+(y) \cap M \neq \varnothing$. Однако $L^+(y) \subset L^-(x)$, что соответствует условию $L^-(x) \cap M \neq \varnothing$. Последнее, согласно лемме 1, противоречит Y-устойчивости M, что и завершает доказательство теоремы 1.

Теорема 2. Окрестность H множества M в Y является областью притяжения асимптотически устойчивого относительно Y множества M в том и только в том случае, когда выполняются два условия:

1) $\forall x \in H$ $L^+(x)$ — компактное подмножество H;

2) $\forall x \in H \setminus M$ множество $L^-(x) \cap H$ не содержит компактных инвариантных подмножеств.

Доказательство. Пусть выполнены требования 1), 2). Тогда, по теореме 1, множество M является Y-асимптотически устойчивым. Пусть $x \in H$. Тогда из 1) следует, что $L^+(x)$ компактно и содержится в H, так как Y замкнуто. Легко видеть, что в силу 2) и инвариантности множества предельных точек $L^+(x) \subset M$ (см., например, доказательство теоремы 1). Таким образом, $H = A_Y(M)$.

Обратно, пусть M является Y-асимптотически устойчивым и H — его область притяжения относительно Y. В этом случае ясно, что 1) выполняется, поскольку M компактно. Предположим, что 2) не выполняется. Тогда для некоторого элемента $x \in X \setminus M$ существует компактное инвариантное подмножество N, принадлежащее $L^-(x) \cap H$. Следовательно, $\forall y \in N$ имеем: $y \in H$, а значит, $L^+(y) \subset M$. Отсюда в силу замкнутости множеств предельных точек $L^+(y) \subset L^-(x)$ и, в частности, $L^-(x) \cap M \neq \varnothing$, что по лемме 1 противоречит Y-устойчивости M.

Таким образом, условие 2) также выполняется. Из доказанного утверждения следует

Теорема 3. Множество M является глобально асимптотически устойчивым относительно Y тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) $\forall x \in Y \setminus M$ — множество $L^+(x)$ компактно;

2) $\forall x \in Y \setminus M$ — множество $L^-(x) \cap Y$ не содержит компактных инвариантных подмножеств.

Замечание. Приведенные исследования можно распространить путем соответствующих модификаций на дискретные динамические системы [1], а также на динамические системы с многомерным временем [5].

Список литературы

1. Сибирский К. С. Введение в топологическую динамику. Кишинев, 1970.
2. Bhathia N. P., Sregö G. P. Stability Theory of Dynamical Systems. Berlin, 1970.
3. Kalitine B.// R.A.I.R.O. Automatique / Systems Analysis and Control. 1982. V. 16, № 3. P. 275—286.
4. Калитин Б. С.// Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 2. С. 187.
5. Гайшун И. В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Минск, 1983.

Поступила в редакцию 31.01.85.

УДК 519.1

П. В. ГЛЯКОВ, М. М. КОВАЛЕВ, В. М. КОТОВ

СЕРИЯ ГРАДИЕНТНЫХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ О РАЗБИЕНИИ ДЕРЕВА

Рассмотрим следующую задачу. Пусть $T = (V, E)$ — дерево с множеством вершин V и множеством ребер E. На множестве вершин и ребер заданы функции $c: V \to R_+$, $w: E \to R_+$, которые определяют вес вершины и стоимость ребра соответственно. Разбиением P дерева T назо-