

Белорусский государственный университет

**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по учебной работе и  
образовательным инновациям

О.Н. Здрок

«02» декабря 2021 г.

Регистрационный № УД – 10438/уч.

*МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ  
КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКИ*

**Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности:**

**1-31 03 07 Прикладная информатика (по направлениям)**

Направление специальности:

1-31 03 07-01 Прикладная информатика (программное обеспечение компью-  
терных систем)

2021 г.

Учебная программа составлена на основе типового учебного плана G31-1-030/пр-тип. от 01.07.2021 и учебных планов БГУ G31-1-034/уч. от 23.07.2021, G31-1-023/уч.ин. от 09.08.2021.

**СОСТАВИТЕЛИ:**

С. В. ШОЛТАНЮК, старший преподаватель кафедры компьютерных технологий и систем Белорусского государственного университета

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

А. М. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ, заведующий отделом интеллектуальных информационных систем Объединенного института проблем информатики НАН Беларуси, кандидат технических наук

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**


Кафедрой компьютерных технологий и систем Белорусского государственного университета

(протокол № 4 от 26.10.2021);

Научно-методическим Советом БГУ

(протокол № 2 от 30.11.2021)

Заведующий кафедрой



Казачёнок В.В.

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

### Цели и задачи учебной дисциплины

**Цель** учебной дисциплины – ознакомить студентов с математическими методами графического представления разнообразных объектов, особенностями их моделирования и визуализации, обусловленными свойствами самих объектов, их расположением и сферами применения полученных изображений.

### Задачи учебной дисциплины:

1. Закрепить ранее изученные и изучить новые математические модели основных геометрических объектов, их взаиморасположения и взаимодействия;
2. Изучить основные преобразования геометрических пространств, широко используемые при моделировании и визуализации компьютерной графики;
3. Сформировать навыки решения типовых задач в области компьютерной графики.

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к модулю «Компьютерная графика» компонента учреждения образования.

**Связи** с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Дисциплина «Математические методы компьютерной графики» тесно связана с такими дисциплинами как «Аналитическая геометрия», «Алгебра и теория чисел», «Математический анализ». Методы, излагаемые в данном курсе, используются в дисциплине «Программирование компьютерной графики».

### Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Математические методы компьютерной графики» должно обеспечить формирование следующих универсальных, базовых профессиональных и специализированных компетенций:

#### **универсальные** компетенции:

- УК-1. Владеть основами исследовательской деятельности, осуществлять поиск, анализ и синтез информации;
- УК-5. Быть способным к саморазвитию и совершенствованию в профессиональной деятельности;
- УК-6. Проявлять инициативу и адаптироваться к изменениям в профессиональной деятельности;

**базовые профессиональные** компетенции:

БПК-1. Применять аппарат дифференциального и интегрального исчисления, методы аналитической геометрии и линейной алгебры для построения математических моделей и решения прикладных задач;

**специализированные** компетенции:

СК-2. Применять полученные теоретические и практические навыки для решения задач компьютерной графики в профессиональной деятельности.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

**знать:** типы компьютерной графики; основные математические модели геометрических объектов; методы и алгоритмы определения их расположения относительно друг друга и наблюдателя; особенности визуализации геометрических объектов и их свойств (цвета, освещения, прозрачности);

**уметь:** строить математические модели геометрических объектов; выбирать и применять методы и алгоритмы визуализации для решения типовых задач вычислительной геометрии и компьютерной графики;

**владеть:** основными методами и алгоритмами моделирования и визуализации геометрических объектов.

### **Структура учебной дисциплины**

Дисциплина изучается во 2 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Математические методы компьютерной графики» отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 216 часов, в том числе 102 аудиторных часа, из них: лекции – 68 часов, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Форма текущей аттестации – экзамен.

# СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

## Раздел 1. Введение в компьютерную графику

### Тема 1.1. Введение в компьютерную графику

Определение и основные задачи компьютерной графики. Место компьютерной графики в современной информатике. Области применения компьютерной графики. История развития компьютерной графики. Интерактивная компьютерная графика. Виды компьютерной графики.

## Раздел 2. Математические основы компьютерной графики

### Тема 2.1. Моделирование элементарных геометрических объектов

Элементарные объекты: прямая, отрезок прямой, луч, полигон, полиэдр. Алгоритмы определения свойств и взаимного расположения объектов на плоскости и в пространстве. Алгоритмы генерирования случайных полигонов.

### Тема 2.2. Аффинные преобразования

Линейное преобразование, его основные свойства. Матрица линейного преобразования. Аффинные преобразования. Простейшие аффинные преобразования: перенос, поворот, масштабирование, вращение. Методы расчёта матриц сложных преобразований.

### Тема 2.3. Проективные преобразования

Системы координат в компьютерной графике. Классификация проекций. Типы параллельных проекций. Свойства параллельных проекций. Типы центральных (перспективных) проекций. Свойства центральных проекций. Точки схода. Однородные координаты. Проективные алгоритмы сложных преобразований.

## Раздел 3. Основные алгоритмы вычислительной геометрии

### Тема 3.1. Базовые растровые алгоритмы

Введение в растеризацию кривых. Изображение отрезка с целочисленными координатами концов. Алгоритм DDA-линии (цифровой дифференциальный анализатор). Алгоритм Брезенхема. Алгоритм Кастла-Питвея. Изображение окружностей. Изображение эллипсов.

### Тема 3.2. Построение выпуклой оболочки

Алгоритмы построения выпуклой оболочки для статически заданного конечного множества точек плоскости, для последовательно поступающих точек плоскости. Алгоритмы Джарвиса, Грэхема, Эндрю, Чена, QuickHull. Анализ сложности алгоритмов.

### **Тема 3.3. Триангуляция**

Триангуляция полигона: метод хорд, метод диагоналей. Триангуляция множества точек плоскости. Жадный алгоритм. Триангуляция Делоне. Структуры данных для представления триангуляции. Классификация алгоритмов построения триангуляции Делоне. Итеративные алгоритмы: простой итеративный, с индексированием поиска треугольников, с кэшированием поиска треугольников. Анализ сложности алгоритмов.

### **Тема 3.4. Алгоритмы удаления невидимых рёбер и граней**

Отсечение отрезков. Алгоритм Сазерленда-Козна. Алгоритмы отсечения полигонов. Алгоритм Робертса (для выпуклого полиэдра), его модификация (для невыпуклого полиэдра). Алгоритм Аппеля. Алгоритм Варнока. Алгоритм Вейлера-Азертонна. Алгоритм художника. Алгоритм с использованием z-буфера. Специальный алгоритм удаления невидимых граней выпуклых тел. Анализ сложности алгоритмов.

### **Тема 3.5. Алгоритмы геометрической оптики**

Пересечение луча с поверхностью. Отражение и преломление луча. Лучевые методы построения оптических эффектов: тень, отражение, преломление. Геометрические и вычислительные особенности оптических эффектов.

## **Раздел 4. Математические модели поверхностей и объектов**

### **Тема 4.1. Приближение кривых и поверхностей**

Интерполяция линий и поверхностей методом Лагранжа, методом наименьших квадратов. Кривые и поверхности Безье. Сплайны. В-сплайны. Сопряжение приближённых кривых и поверхностей.

### **Тема 4.2. Визуализация поверхностей в пространстве**

Классификация поверхностей. Методы изображения поверхностей. Построение каркаса для каркасной поверхности. Изображение прозрачного и непрозрачного каркаса. Метод z-буфера построения точечной поверхности. Моделирование кинематических поверхностей.

### **Тема 4.3. Модели цвета и освещения**

Цвет как характеристика восприятия света зрением человека. Аддитивная цветовая модель RGB. Субтрактивная цветовая модель CMY и ее модификация CMYK. Абстракции «цветовое пространство», «куб цветов». Палитры. Стандартные цветовые пространства и преобразования между ними. Проблема ограниченности точного перевода цвета между моделями RGB и CMY. Модели HSB и HSL и их геометрическая интерпретация.

### **Тема 4.4. Моделирование освещённости и цвета поверхностей**

Типы источников света. Фоновое освещение. Отражение направленных лучей от источников света. Диффузное и зеркальное отражение направленного луча.

Функции закрашки: однотонная закрашка, метод Гуро, метод Фонга. Анализ сложности алгоритмов закрашки.

#### **Тема 4.5. Моделирование трехмерных тел**

Классификация методов трёхмерного моделирования. Описание трехмерных тел способами дробления объема: с помощью вокселей и с помощью деревьев кратности 8 и 2. Моделирование тел методом конструктивной геометрии. Поверхностные модели трехмерных тел.

### **Раздел 5. Фрактальная графика**

#### **Тема 5.1. Фрактальная графика**

Фрактальная геометрия. Приложения фрактальной графики. Реализация фрактальной графики в системах компьютерной математики.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования

Но- мер раз- дела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количе- ство ча- сов УСР	Форма контроля зна- ний
		Лекции	Практи- ческие занятия	Семинар- ские занятия	Лабора- торные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>1</b>	<b>Введение в компьютерную гра- фику</b>							
1.1	Введение в компьютерную графику	2						
<b>2</b>	<b>Математические основы компью- терной графики</b>							
2.1	Моделирование элементарных гео- метрических объектов	6			4			
2.2	Аффинные преобразования	8			2		1	Отчёт
2.3	Проективные преобразования	10			4		1	Отчёт, коллоквиум
<b>3</b>	<b>Основные алгоритмы вычисли- тельной геометрии</b>							
3.1	Базовые растровые алгоритмы	2			1			
3.2	Построение выпуклой оболочки	2			1			
3.3	Триангуляция	6			3		1	Контрольная работа
3.4	Алгоритмы удаления невидимых рё- бер и граней	4			2			
3.5	Алгоритмы геометрической оптики	6			4			



1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>4</b>	<b>Математические модели поверхностей и объектов</b>							
4.1	Приближение кривых и поверхностей	6			4			
4.2	Визуализация поверхностей в пространстве	4			2			Коллоквиум
4.3	Модели цвета и освещения	2						
4.4	Моделирование освещённости и цвета поверхностей	4			2			
4.5	Моделирование трёхмерных тел	4			1		1	Контрольная работа
<b>5</b>	<b>Фрактальная графика</b>							
5.1	Фрактальная графика	2						
	<b>Всего</b>	<b>68</b>			<b>30</b>		<b>4</b>	

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Перечень основной литературы

1. Никулин, Е. А. Компьютерная графика. Модели и алгоритмы: учебное пособие / Е. А. Никулин. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2021. — 708 с.
2. Никулин, Е. А. Компьютерная графика. Оптическая визуализация: учебное пособие / Е. А. Никулин. — Санкт-Петербург: Лань, 2021. — 200 с.

### Перечень дополнительной литературы

1. Васильков, Д.М. Геометрическое моделирование и компьютерная графика: вычислительные и алгоритмические основы [Электронный ресурс]: курс лекций / Д. М. Васильков. — Минск: БГУ, 2011. — Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/27612>.
2. Вычислительная геометрия. Алгоритмы и приложения = Computational Geometry: Algorithms and Applications. / М. Берг [и др.]. — М.: ДМК-Пресс, 2016. — 438 с.
3. Никулин, Е.А. Компьютерная графика. Фракталы: учебное пособие для вузов / Е.А. Никулин. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2021. — 100 с.: ил. — Текст: непосредственный.
4. Павлидис, Т. Алгоритмы машинной графики и обработки изображений. / Т. Павлидис — М.: Радио и связь, 1986. — 395 с.
5. Побегайло, А. П. Применение кватернионов в компьютерной геометрии и графике [Электронный ресурс] / А. П. Побегайло. — Минск: БГУ, 2019. — Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/241677>.
6. Препарата, Ф. Вычислительная геометрия: Введение = Computational Geometry An introduction. / Ф. Препарата, М. Шеймос — М.: Мир, 1989. — 478 с.
7. Размыслович, Г. П. Геометрия и алгебра. В 5-ти частях. Ч. 1: Матрицы, определители, системы линейных уравнений: пособие для студентов факультета прикладной математики и информатики / Г.П.Размыслович — Минск: БГУ, 2010. — 73с.
8. Размыслович, Г. П. Геометрия и алгебра: пособие для студентов фак. прикладной математики и информатики. В 5 ч. Ч. 2. Векторные пространства / Г.П.Размыслович. — Минск: БГУ, 2013. — 56 с.
9. Роджерс, Д. Математические основы машинной графики: Пер. с англ. / Д. Роджерс, Дж. Адамс. — М.: Мир, 2001. — 604 с., ил.
10. Таранчук, В. Б. Современные средства Wolfram MATHEMATICA и их применение при преподавании компьютерной графики [Электронный ресурс] / В. Б. Таранчук, В. А. Куликович // Сетевое научное издание "Информационные ресурсы, системы и технологии". — 2015. — Режим доступа: <http://irsit.ru/article462>.

11. Фокс, А. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве: Пер. с англ. / А. Фокс, Пратт М. — М.: Мир, 1982. — 304 с., ил.

### **Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки**

Контроль работы студента проходит в следующих формах:

- Устные: отчёты на лабораторных занятиях, которые могут оцениваться на основе полноты ответа, глубины понимания отдельных терминов и темы занятия в целом, а также эффективности и рациональности найденных способов решения задач.
- Письменные: коллоквиумы, контрольные работы. Они оцениваются на основе полноты ответа, владения отдельными терминами и темами заданий в целом, способностью применять наиболее подходящие способы решения поставленных задач.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Математические методы компьютерной графики» учебным планом предусмотрен экзамен.

При формировании итоговой оценки используется рейтинговая оценка знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая оценка предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний и текущей аттестации в рейтинговую оценку:

- отчёты на лабораторных занятиях – 30%,
- контрольные работы – 70%.

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов. Вес оценки по текущей успеваемости составляет 40%, экзаменационной оценки – 60%.

### **Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов**

#### **Тема 2.2. Аффинные преобразования (1 ч.)**

Аффинные преобразования. Простейшие аффинные преобразования: перенос, поворот, масштабирование, вращение. Методы расчёта матриц сложных преобразований.

(Форма контроля – отчёт).

#### **Тема 2.3. Проективные преобразования (1 ч.)**

Параллельные и центральные проекции. Моделирование сложных проективных преобразований.

(Форма контроля – отчёт).

### **Тема 3.3. Триангуляция (1 ч.)**

Методы и алгоритмы триангуляции полигона и множества точек на плоскости.

(Форма контроля – контрольная работа).

### **Тема 4.5. Моделирование трёхмерных тел (1 ч.)**

Моделирование тел методом конструктивной геометрии. Поверхностные модели трёхмерных тел.

(Форма контроля – контрольная работа).

## **Примерная тематика лабораторных занятий**

### **Лабораторное занятие № 1.**

Алгоритмы определения свойств и взаимного расположения объектов на плоскости и в пространстве.

### **Лабораторное занятие № 2.**

Алгоритмы генерирования случайных полигонов.

### **Лабораторное занятие № 3.**

Аффинные преобразования. Простейшие аффинные преобразования: перенос, поворот, масштабирование, вращение. Методы расчёта матриц сложных преобразований.

### **Лабораторное занятие № 4.**

Типы параллельных проекций. Свойства параллельных проекций. Типы центральных (перспективных) проекций. Свойства центральных проекций.

### **Лабораторное занятие № 5.**

Проективные алгоритмы сложных преобразований.

### **Лабораторное занятие № 6.**

Введение в растеризацию кривых. Изображение отрезка с целочисленными координатами концов. Алгоритм DDA-линии (цифровой дифференциальный анализатор). Алгоритм Брезенхема. Алгоритм Кастла-Питвея. Изображение окружностей. Изображение эллипсов.

Алгоритмы построения выпуклой оболочки для статически заданного конечного множества точек плоскости, для последовательно поступающих точек плоскости. Алгоритмы Джарвиса, Грэхема, Эндрю, Чена, QuickHull. Анализ сложности алгоритмов.

### **Лабораторное занятие № 7.**

Триангуляция полигона: метод хорд, метод диагоналей. Триангуляция множества точек плоскости. Жадный алгоритм. Триангуляция Делоне.

### **Лабораторное занятие № 8.**

Итеративные алгоритмы триангуляции.

Отсечение отрезков. Алгоритм Сазерленда-Козна.

### **Лабораторное занятие № 9.**

Алгоритмы отсечения полигонов.

Пересечение луча с поверхностью. Отражение и преломление луча.

#### **Лабораторное занятие № 10.**

Лучевые методы построения оптических эффектов: тень, отражение.

#### **Лабораторное занятие № 11.**

Лучевые методы построения оптических эффектов: преломление.

Интерполяция линий методом Лагранжа.

#### **Лабораторное занятие № 12.**

Интерполяция линий и поверхностей методом Лагранжа, методом наименьших квадратов. Кривые и поверхности Безье.

#### **Лабораторное занятие № 13.**

Сплайны. В-сплайны. Сопряжение приближённых кривых и поверхностей.

Построение каркаса для каркасной поверхности. Изображение прозрачного и непрозрачного каркаса.

#### **Лабораторное занятие № 14.**

Метод z-буфера построения точечной поверхности. Моделирование кинематических поверхностей.

Типы источников света. Фоновое освещение. Отражение направленных лучей от источников света. Диффузное и зеркальное отражение направленного луча.

#### **Лабораторное занятие № 15.**

Функции закрашки: однотонная закрашка, метод Гуро, метод Фонга. Анализ сложности алгоритмов закрашки.

Классификация методов трёхмерного моделирования. Описание трехмерных тел способами дробления объема: с помощью вокселей и с помощью деревьев кратности 8 и 2.

### **Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины**

При организации образовательного процесса используется *практико-ориентированный подход*, который предполагает:

- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

### **Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа с целью изучения материала учебной дисциплины предполагает работу с конспектом лекций и рекомендованной учебной литературой. Теоретические сведения закрепляются выполнением серии

упражнений по соответствующей теме, при выполнении которых следует руководствоваться методическими разработками, размещенными в электронной библиотеке университета.

### **Примерный перечень вопросов к экзамену**

#### **Раздел 1. Введение в компьютерную графику**

1. Определение и основные задачи компьютерной графики.
2. Место и области применения компьютерной графики.
3. Виды компьютерной графики.

#### **Раздел 2. Математические основы компьютерной графики**

1. Алгоритмы определения взаимного расположения объектов на плоскости и в пространстве.
2. Алгоритмы генерирования случайных полигонов.
3. Основные свойства линейных и аффинных преобразований.
4. Матрицы линейных и аффинных преобразований, методы их расчёта.
5. Простейшие аффинные преобразования.
6. Системы координат в компьютерной графике.
7. Параллельные проекции, их свойства.
8. Центральные проекции, их свойства.
9. Проективные алгоритмы сложных преобразований.

#### **Раздел 3. Геометрические задачи визуализации**

1. Растеризация отрезка.
2. Растеризация кривых линий.
3. Алгоритмы построения выпуклой оболочки, анализ их сложности.
4. Триангуляция полигона и множества точек на плоскости. Анализ сложности алгоритмов триангуляции.
5. Алгоритмы удаления невидимых рёбер и граней, анализ их сложности.
6. Лучевые методы построения оптических эффектов.

#### **Раздел 4. Математические модели поверхностей и объектов**

1. Методы интерполяции кривых и поверхностей, их приложения в компьютерной графике.
2. Методы аппроксимации кривых и поверхностей, их приложения в компьютерной графике.
3. Методы изображения каркасных поверхностей.
4. Методы изображения точечных поверхностей.
5. Моделирование кинематических поверхностей.
6. Цветовые модели.
7. Стандартные цветовые пространства и преобразования между ними.
8. Типы источников света и освещения. Особенности отражения световых лучей.
9. Функции закраски, анализ сложности алгоритмов закраски.
10. Методы трёхмерного моделирования.

#### **Раздел 5. Фрактальная графика**

1. Фрактальная геометрия, приложения фрактальной графики.

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Алгебра и теория чисел	Кафедра высшей математики	Нет	Внесение изменений не требуется (протокол № 4 от 26.10.2021)
Математический анализ	Кафедра высшей математики	Нет	Внесение изменений не требуется (протокол № 4 от 26.10.2021)
Методы вычислений	Кафедра вычислительной математики	Нет	Внесение изменений не требуется (протокол № 4 от 26.10.2021)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ  
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на \_\_\_\_ / \_\_\_\_ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
\_\_\_\_\_ (протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 202\_ г.)

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета

\_\_\_\_\_