P-АДИЧЕСКОЕ ЯДРО ДИРИХЛЕ И СХОДИМОСТЬ РЯДА ФУРЬЕ НЕПРЕРЫВНЫХ И СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ НА $\mathbb{Z}_p$

М. А. Заренок

Замкнутый шар с центром в точке a радиуса p^γ обозначим через $B[a, p^\gamma]$, а функцию-индикатор множества $A \subset \mathbb{Q}_p^n$ через I_A. Характером φ абелевой топологической группы G называется непрерывный гомоморфизм из абелевой группы G в мультипликативную группу $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Всякий аддитивный характер группы $G = \mathbb{Q}_p$ будет аддитивным характером группы $B[0, p^\gamma]$, $\gamma \in \mathbb{Z}$. Обозначим $\chi_p(x) := \exp(2\pi i \{x\}_p)$, где $\{x\}_p$ – дробная часть числа $x \in \mathbb{Q}_p$. Известно [1] что, произвольный аддитивный характер на $\mathbb{Z}_p$ имеет вид $\chi(x) = \chi_p(kx)$, где $k \in \mathbb{Q}_p$ имеет нулевую целую часть, такие k находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементами фактор группы $\mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p$.

Теорема 1. Справедлива формула $\sum\limits_{|k|_p \le p^N} \chi_p(kx) = p^N I_{B[0,p^{-N}]}(x)$.

Определение 1. Ядром Дирихле степени N будем называть функцию $D_N : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}$, определяемую равенством $D_N(x) = \sum\limits_{|k|_p \le p^N} \chi_p(kx) = p^N I_{B[0,p^{-N}]}(x).$

Определение 2. Средней по Стеклову от функции $f(t) : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}$ называется функция $(A_\delta f)(t) = \dfrac{1}{\mu(B[0,\delta])} \int_{\mathbb{Z}_p} f(\tau) I_{B[t,\delta]}(\tau) d\tau, \delta > 0.$

Определение 3. Частичной суммой ряда Фурье функции $f(t) : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}$ будем называть функцию $(S_N f)(x) = \sum\limits_{|k| \le p^N} c_k \chi_p(kx),$ где $c_k = \int_{\mathbb{Z}_p} f(t) \overline{\chi_p(kt)} dt.$

Теорема 2. Частичная сумма ряда Фурье является средним по Стеклову.

Доказательство.

$$(S_N f)(x) = \sum_{|k| \le p^N} c_k \chi_p(kx) = \sum_{|k| \le p^N} \left(\int_{\mathbb{Z}_p} f(t) \overline{\chi_p(kt)} dt \right) \chi_p(kx) =$$

$$=\int_{\mathbb{Z}_p}\left(\sum_{|k|_p\le p^N} f(t)\overline{\chi_p(kt)}\chi_p(kx)\right)dt=\int_{\mathbb{Z}_p} f(t)\left(\sum_{|k|_p\le p^N}\chi_p(-kt)\chi_p(kx)\right)dt=$$

$$=\int_{\mathbb{Z}_p} f(t)\left(\sum_{|k|_p\le p^N}\chi_p(k(x-t)\right)dt=\int_{\mathbb{Z}_p} f(t)p^N I_{B[0,p^{-N}]}(x-t)dt=$$

$$=p^N\int_{\mathbb{Z}_p} f(t)I_{B[x,p^{-N}]}(t)dt=p^N\int_{I_{B[x,p^{-N}]}} f(t)dt=L_f(x,p^{-N}). \qquad \triangleleft$$

Теорема 3. Для любой функции $f(x)\in L_1(\mathbb{Z}_p)$ средние по Стеклову $(A_\delta f)(t)$ являются локально постоянными функциями. Имеет место сходимость средних по Стеклову по норме $L_1(\mathbb{Z}_p)$, а значит и частичных сумм ряда Фурье.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon>0$. Пусть $x,y\in\mathbb{Z}_p$ такие, что $|x-y|_p<\delta$ из чего следует, что $I_{B[x,\delta]}(t)=I_{B[y,\delta]}(t)$ для любого $t\in\mathbb{Z}_p$. Тогда

$$|(A_\delta f)(x)-(A_\delta f)(y)|=\left|\frac{1}{\mu(B[0,\delta])}\int_{\mathbb{Z}_p} f(\tau)(I_{B[x,\delta]}(\tau)-I_{B[y,\delta]}(\tau))\right|=0.$$

Это означает, что средние по Стеклову $(A_\delta f)$ являются локально постоянными функциями, и в частности равномерно непрерывными.

Покажем, что $\rho(f(t),(A_{p^{-N}}f)(t))\to 0$ в $L_1(\mathbb{Z}_p)$, при $N\to\infty$. Имеем

$$\rho(f(t),(A_{p^{-N}}f)(t))=\int_{\mathbb{Z}_p}\left|f(t)-p^N\int_{B[t,p^{-N}]} f(\tau)d\tau\right|dt=$$

$$=\int_{\mathbb{Z}_p}\left|p^N\int_{B[t,p^{-N}]} f(t)d\tau-p^N\int_{B[t,p^{-N}]} f(\tau)d\tau\right|dt\le p^N\int_{\mathbb{Z}_p}\int_{B[t,p^{-N}]}|f(t)-f(\tau)|\,d\tau dt=$$

$$\overset{\tau-t=s}{=} p^N\int_{\mathbb{Z}_p}\int_{B[0,p^{-N}]}|f(t)-f(t+s)|\,dsdt=p^N\int_{B[0,p^{-N}]}\int_{\mathbb{Z}_p}|f(t)-f(t+s)|\,dtds.$$

Так как $f(t)\in L_1(\mathbb{Z}_p)$, то при достаточно малых s имеет место следующее неравенство $\int_{\mathbb{Z}_p}|f(t)-f(t+s)|\,dt<\varepsilon$. Тогда $p^N\int_{B[0,p^{-N}]}\int_{\mathbb{Z}_p}|f(t)-f(t+s)|\,dtds<\varepsilon p^N\int_{B[0,p^{-N}]}ds<\varepsilon.$ Таким образом $\rho(f(t),(A_{p^{-N}}f)(t))\to 0$ при $N\to\infty.\triangleleft$

Определение 4. Максимальной функцией Харди - Литтлвуда называется функция $\mathcal{M}:L_1(\mathbb{Z}_p)\to\mathbb{C}$ определяемая формулой

$$(\mathcal{M}f)(x)=\sup_{\delta\to 0}\left\{\frac{1}{\mu(B[x,\delta])}\int_{B[x,\delta]}|f(t)|\,dt\right\}.$$

Лемма 1 (Харди - Литтлвуда). Если $f(x)\in L_1(\mathbb{Z}_p)$, тогда $\forall\alpha>0$ $(\mathcal{M}f)(x)$ удовлетворяет неравенству $\mu(\{(\mathcal{M}f)(x)>\alpha\})\le c\frac{\|f\|_{L_1}}{\alpha}$.

Доказательство. Пусть $A=\{x\in\mathbb{Z}_p:(\mathcal{M}f)(x)>\alpha\}$, тогда для любого $x\in A$ существует $B_x:=B[x,p^{-N_x}]\subseteq\mathbb{Z}_p$ такой, что $\frac{1}{\mu(B_x)}\int_{B_x}f(t)dt>\alpha.$

Обозначим через $B=\cup_{x\in A}B_x$. Очевидно, что $A\subset B$. Из регулярности меры Хаара следует, что существует множество $A^*\subseteq A$ такое, что A^* - компактно и имеет место неравенство $(1-\epsilon)\mu(A)\le\mu(A^*)$, где ϵ фиксированное число и $0<\epsilon<1$. Тогда из покрытия $\{B_x\}_{x\in A}$, которое также является и покрытием A, можно выделить конечное подпокрытие $\bigsqcup_{k=1}^{n}B_{x_k}\supseteq A$, которое можно выбрать дизъюнктным в силу того, что в $\mathbb{Q}_p$ два шара всегда либо не пересекаются, либо один содержится в другом [1]. Имеет место неравенство $\mu(B_x)<\frac{1}{\alpha}\int_{B_x}f(t)dt.$ Тогда с учетом $\bigsqcup_{k=1}^{n}B_{x_k}\subseteq\mathbb{Z}_p$ и предыдущей формулы имеем

$$(1-\varepsilon)\mu(A)\le\mu(A)\le\sum_{k=1}^{n}\mu(B_{x_k})<\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\int_{B_{x_k}}f(t)dt\le\frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{Z}_p}f(t)dt=\frac{1}{\alpha}\|f\|_{L_1}.$$

Из чего следует, что $\mu(\{(\mathcal{M}f)(x)>\alpha\})\le\frac{\|f\|_{L_1}}{\alpha(1-\epsilon)}.\lhd$

Теорема 4. Если $f(x)\in L_1(\mathbb{Z}_p)$, то средние по Стеклову $(A_{p^{-N}}f)(x)$ сходятся к $f(x)$ для почти всех $x\in\mathbb{Z}_p$, значит, сходятся почти всюду частичные суммы ряда Фурье.

Доказательство. Имеем

$$|(A_{p^{-N}}f)(x)-f(x)|=\left|p^{-N}\int_{B[x,p^{-N}]}\big(f(t)-f(x)\big)dt\right|\le p^{N}\int_{B[x,p^{-N}]}|f(t)-f(x)|dt.$$

Отметим, что если $f\in C(\mathbb{Z}_p)$, то для заданного $x\in\mathbb{Z}_p$ è $\varepsilon>0$ существует шар $B[x,p^{-N}]$ такой, что $|f(x)-f(t)|<\varepsilon$ для любой точки

$t \in B[x, p^{-N}]$, следовательно $p^{-N} \int_{B[x,p^{-N}]} |f(x) - f(t)|\, dt < \varepsilon$. Откуда следует, что для любой точки непрерывности функции выполняется

$$\lim_{N\to\infty} p^N \int_{B[x,p^{-N}]} |f(x) - f(t)|\, dt = 0.$$

Определим на $L_1(\mathbb{Z}_p)$ оператор $\mathcal{L}$ следующим образом $(\mathcal{L}f)(x) = \lim_{N\to\infty} p^N \int_{B[x,p^{-N}]} |f(t) - f(x)|\, dt.$ Далее несложно видеть, что имеет место неравенство $(\mathcal{L}f)(x) \le (\mathcal{M}f)(x) + |f(x)|$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Существует непрерывная функция $\varphi \in L_1(\mathbb{Z}_p)$ такая, что $\|f - \varphi\|_{L_1} < \varepsilon$. В качестве функции φ, например, можно взять функцию $(A_\delta f)(t)$. Заметим, что для непрерывной функции $\mathcal{L}\varphi(x) = 0$. Далее преобразуем предыдущее неравенство с учетом этого факта $(\mathcal{L}f)(x) = \mathcal{L}(f - \varphi + \varphi)(x) \le \mathcal{L}(f - \varphi)(x) + (\mathcal{L}\varphi)(x) \le \mathcal{M}(f - \varphi)(x) + |f(x) - \varphi(x)|$. Тогда $\forall \alpha > 0$ $\{(\mathcal{L}f)(x) > \alpha\} \subset \{\mathcal{M}(f - \varphi)(x) > \alpha/2\} \cup \{|f(x) - \varphi(x)| > \alpha/2\}$. Используя утверждение леммы Харди - Литтлвуда и неравенство Чебышева для $|f - \varphi|$ получаем $\mu(\{(\mathcal{L}f)(x) > \alpha\}) \le 2\dfrac{\|f - \varphi\|_{L_1}}{\alpha(1-\epsilon)} + 2\dfrac{\|f - \varphi\|_{L_1}}{\alpha} \le \dfrac{C\varepsilon}{\alpha}$.

Предыдущее неравенство верно для любого $\varepsilon > 0$, следовательно $\mu(\{(\mathcal{L}f)(x) > \alpha\} = 0$. Заметим, что это равенство верно для любого $\alpha > 0$ это значит, что $(\mathcal{L}f)(x) = 0$ почти всюду. $\triangleleft$

Определение 5. Глобальным модулем непрерывности функции $f(t): \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}$ будем называть функцию $\omega_f(\delta) = \sup_{t\in\mathbb{Z}_p}\{|f(s) - f(t)| : |s - t|_p \le \delta\}$. Также будем считать, что $\omega_f(0) = 0$.

Лемма 2. Если $f(x) \in C(\mathbb{Z}_p)$, то $\lim_{\delta\to+0} \omega_f(\delta) = 0$.

Теорема 5. Пусть $f(x) \in C(\mathbb{Z}_p)$, тогда частичные суммы ряда Фурье сходится равномерно на $\mathbb{Z}_p$.

Доказательство.

$$|f(x) - (S_N f)(x)| = \left| f(x) - p^N \int_{B[x,p^{-N}]} f(t)dt \right| = \left| f(x) p^N \int_{B[x,p^{-N}]} dt - p^N \int_{B[x,p^{-N}]} f(t)dt \right| =$$

$$= \left| p^N \int_{B[x,p^{-N}]} (f(x) - f(t))dt \right| \le \sup_{t\in\mathbb{Z}_p}\{|f(x) - f(t)| : |x - t|_p < p^{-N}\} \left| p^N \int_{B[x,p^{-N}]} dt \right| = \omega_f(p^{-N}).$$

Так как $f(x) \in C(\mathbb{Z}_p)$, то $\omega_f(p^{-N}) \to 0$ при $N \to \infty$, значит и $|f(x) - (S_N f)(x)| \to 0$ при $N \to \infty$. Что и требовалось доказать.

Литература

1. *Радына А.Я., Радына Я.М., Радына Я.В.* Пачаткі неархімедавага аналізу. Мінск: БДУ, 2010.
2. *Schikhof W.H.* Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1984.
3. *de Reyna J.A.* Pointwise convergence of Fourier Series. Springer, 2002.