БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям
________________ О.Н. Здрок
«02» июля 2021 г.
Регистрационный № -10182/уч.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальности:

1-31 03 02 Механика и математическое моделирование

Минск, 2021

Учебная программа составлена на основе типового учебного плана № G31-1-025/пр-тип. от 30.06.2021, учебного плана БГУ № G31-1-029/уч., утвержденного 30.06.2021.

СОСТАВИТЕЛИ:

Дмитрий Федорович Базылев – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Сергей Гаврилович Кононов – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Владимир Леонидович Тимохович – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Владимир Владимирович Шлыков – профессор Белорусского государственного педагогического университета, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор;

Геннадий Васильевич Матвеев, доцент кафедры высшей математики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой геометрии, топологии и методики преподавания математики (протокол № 14 от 30.06.2021);

Научно-методическим Советом БГУ

(протокол № 7 от 30.06.2021)

Заведующий кафедрой геометрии, топологии
и методики преподавания математики Д.Ф. Базылев

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

«*Аналитическая геометрия*» является одной из основных дисциплин, которые изучаются студентами-математиками в начале обучения в университете. Понятия и основные факты аналитической геометрии используются при изучении многих математических дисциплин, в первую очередь таких, как «*Дифференциальные уравнения*», «*Алгебра*», «*Математический анализ*».

Цели и задачи учебной дисциплины

Главными **целями** учебной дисциплины «*Аналитическая геометрия*» являются:

- освоение новых по сравнению с элементарной геометрией пространств: многомерных евклидовых, аффинных, проективных и изучение фигур первого и второго порядков в этих пространствах;
- овладение основным методом исследования в аналитической геометрии – методом координат;
- приобретение студентами достаточного объема знаний, навыков и умений в области аналитической геометрии для их использования при изучении других математических дисциплин.

Для достижения этих целей решаются следующие **задачи:**

- Определяется понятие геометрического вектора как класса эквивалентных направленных отрезков. Излагается векторная алгебра, используемая в дальнейшем как основной инструмент построения аналитической геометрии;
- Всесторонне изучаются фигуры первого и второго порядков, являющиеся основными объектами исследования в аналитической геометрии;
- Вводятся основные типы геометрических преобразований и проводится идея рассмотрения различных геометрий как совокупности инвариантов той или иной группы преобразований.

В начале изучения дисциплины с целью сохранения преемственности со школьной геометрией рассмотрение ограничивается трехмерным евклидовым пространством $\mathbb{E}^3$. При этом векторы в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$, прямые на евклидовой плоскости $\mathbb{E}^2$, плоскости и прямые в пространстве $\mathbb{E}^3$ изучаются всесторонне с точки зрения высшей математики. Затем рассматриваются фигуры второго порядка на плоскости $\mathbb{E}^2$ и в пространстве $\mathbb{E}^3$, вводится принципиально новое понятие проективной плоскости и аналогов рассмотренных ранее фигур на проективной плоскости.

Далее рассматриваются аффинные преобразования и движения плоскости $\mathbb{E}^2$ и пространства $\mathbb{E}^3$, широко используемые в настоящее время в различных графических программах компьютерной геометрии.

Заключительная часть аналитической геометрии посвящена многомерным аффинным и евклидовым пространствам. Определяются и изучаются фигуры первого и второго порядков в вещественных аффинных и евклидовых пространствах; аффинные преобразования и движения; аффинная и евклидова геометрия.

В течение всего процесса обучения происходит систематическое изучение геометрических преобразований, проведение теоретико-группового взгляда на геометрию.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «*Аналитическая геометрия*» относится **к модулю «Алгебра и геометрия»** государственного компонента.

Изучение аналитической геометрии в течение всего срока обучения проходит во **взаимосвязи** с изучаемыми параллельно дисциплинами: «*Введение в специальность*», «*Алгебра*», «*Математический анализ*».

В соответствии с образовательным стандартом в результате изучения дисциплины обучающийся должен:

знать:

– векторы в $\mathbb{E}^3$, операции над векторами;

– эллипсы, гиперболы, параболы, эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, их канонические уравнения и свойства;

– понятия n-мерного аффинного и евклидова пространств; аффинные реперы и координаты точек; k-мерные плоскости и фигуры второго порядка, группы геометрических преобразований;

уметь:

– выполнять операции над векторами; записывать общие и параметрические уравнения плоскостей в различных пространствах, определять их взаимное расположение; находить расстояния между плоскостями;

– по общему уравнению фигуры второго порядка в $\mathbb{E}^2$ и $\mathbb{E}^3$ определять ее тип, размеры, расположение относительно системы координат; приводить общее уравнение фигуры второго порядка в аффинном пространстве к нормальному виду;

владеть:

– методом координат при решении основных задач аналитической геометрии.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «*Аналитическая геометрия*» должно обеспечить формирование следующей базовой профессиональной компетенции:

БПК - 9. Применять основные алгебраические и геометрические понятия, конструкции и методы для решения теоретических и прикладных математических задач.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 1 и 2 семестрах очной формы получения высшего образования. Всего на изучение учебной дисциплины «Аналитическая геометрия» отведено 198 часов, в том числе 124 аудиторных часа, из них: лекции – 62 часа, практические занятия –54 часа, управляемая самостоятельная работа –8 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Формы текущей аттестации – экзамен в каждом семестре.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Векторы

Тема 1.1. Введение.

Роль геометрии в математике и ее приложениях. Предмет и методы аналитической геометрии.

Тема 1.2. Понятие вектора.

Направленные отрезки. Векторы как классы эквивалентных направленных отрезков. Длина вектора. Откладывание вектора от точки. Величина угла между векторами. Коллинеарные и компланарные системы векторов.

Тема 1.3. Линейные операции над векторами.

Сложение векторов, свойства операции сложения. Умножение векторов на числа, свойства этой операции. Линейные комбинации векторов.

Тема 1.4. Проекции.

Определения и основные свойства параллельного проектирования на плоскости и в пространстве.

Тема 1.5. Базисы и координаты векторов.

Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Базисы и координаты векторов. Ориентация прямой, плоскости и пространства.

Тема 1.6. Полилинейные операции над векторами.

Скалярное произведение векторов. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов. Формулы преобразования координат векторов.

Раздел 2. Прямые и плоскости

Тема 2.1. Системы координат. Фигуры и уравнения

Аффинные реперы (декартовы системы координат) на прямой, на плоскости и в пространстве. Координаты точки в данном репере. Ортонормированные реперы (прямоугольные декартовы системы координат). Полярные, сферические и цилиндрические системы координат. Формулы преобразования аффинных координат точек. Два основных способа задания фигуры: параметризация фигуры и задание фигуры с помощью уравнения.

Тема 2.2. Прямые на плоскости E^2.

Различные виды уравнений прямой на плоскости. Определение взаимного расположение двух прямых на плоскости по их уравнениям. Пучок прямых. Формулы для вычисления расстояния от точки до прямой и величины угла между прямыми. Геометрический смысл линейного неравенства с двумя неизвестными.

Тема 2.3. Плоскости и прямые в пространстве E^3.

Различные виды уравнений плоскости в пространстве. Определение взаимного расположение двух плоскостей по их уравнениям. Различные виды уравнений прямой в пространстве. Определение взаимного расположение прямых и плоскостей в пространстве по их уравнениям. Формулы для вычисления расстояний от точки до прямой и от точки до плоскости в пространстве. Геометрический смысл линейного неравенства с 3 неизвестными.

Раздел 3. Фигуры второго порядка

Тема 3.1. Эллипс, гипербола, парабола.

Эллипс – различные определения, каноническое уравнение, фокусы, эксцентриситет. Гипербола – определение, каноническое уравнение, фокусы, эксцентриситет, асимптоты. Директрисы эллипса и гиперболы. Парабола –каноническое уравнение, фокус и директриса. Параметрические задания эллипса и гиперболы. Уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах. Касательные к эллипсу, гиперболе, параболе. Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы.

Тема 3.2. Фигуры второго порядка на плоскости E^2.

Общее уравнение фигуры второго порядка на плоскости, приведение его к каноническому виду. Девять типов фигур второго порядка на плоскости.

Тема 3.3. Фигуры вращения. Цилиндрические и конические фигуры.

Фигуры вращения, цилиндрические и конические фигуры в пространстве. Преобразование сжатия пространства и переход от фигур вращения второго порядка к фигурам общего вида. Эллипсоиды вращения, трехосные эллипсоиды. Эллиптические параболоиды. Однополостные и двуполостные гиперболоиды. Цилиндры второго порядка – эллиптический, параболический, гиперболический. Конусы второго порядка.

Тема 3.4. Фигуры второго порядка в пространстве E^3.

Понятие фигуры второго порядка в пространстве. Метод сечений исследования формы пространственной фигуры на примере гиперболического параболоида. Описание фигур второго порядка в пространстве, их канонические уравнения. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида. Плоские сечения пространственных фигур второго порядка.

Раздел 4. Аффинные преобразования и движения

Тема 4.1. Аффинные преобразования плоскости E^2 и пространства E^3.

Определение, примеры и основные свойства аффинных преобразований плоскости и пространства. Линейный оператор, индуцированный аффинным преобразованием. Координатное выражение аффинного преобразования. Геометрический смысл определителя матрицы аффинного преобразования.

Тема 4.2. Движения плоскости E^2 и пространства E^3.

Определение, примеры и основные свойства движений плоскости и пространства. Координатная запись движения. Описание движений плоскости $\mathbb{E}^2$ и пространства $\mathbb{E}^3$.

Раздел 5. Аффинные пространства

Тема 5.1. Определение, примеры и простейшие свойства аффинного пространства.

Понятие аффинного пространства и его простейшие свойства, вытекающие из аксиом. Примеры. Арифметическое аффинное пространство.

Тема 5.2. Плоскости в аффинном пространстве.

Понятие k-мерной плоскости в аффинном пространстве $\mathbf{A}^n$. Начальная точка и направляющее пространство плоскости. Аффинные прямые и гиперплоскости. Пересечение плоскостей, аффинная оболочка множества точек. Аффинно независимые системы точек. Типы взаимного расположения двух плоскостей в аффинном пространстве. Характеристика пары плоскостей.

Тема 5.3. Системы координат в аффинном пространстве. Уравнения плоскостей.

Аффинные реперы и координаты точек в аффинном пространстве. Формулы преобразования координат. Общие и параметрические уравнения плоскости в аффинном пространстве $\mathbf{A}^n$. Определение взаимного расположение двух плоскостей.

Тема 5.4. Аффинные отображения.

Понятие аффинного отображения аффинных пространств. Однородная часть аффинного отображения. Образ плоскости при аффинном отображении. Координатная запись аффинного отображения. Изоморфизм аффинных пространств. Автоморфизмы (аффинные преобразования) аффинного пространства. Аффинно эквивалентные фигуры. Геометрия аффинной группы.

Тема 5.5. Барицентрические линейные комбинации точек и барицентрические координаты.

Барицентрические линейные комбинации точек аффинного пространства. Центр тяжести системы материальных точек. Барицентрические координаты точек относительно аффинно независимой системы точек.

Тема 5.6. Параллелепипеды и симплексы в вещественных аффинных пространствах. Выпуклые фигуры.

n-мерный параллелепипед в вещественном аффинном пространстве и его элементы. n-мерный симплекс в вещественном аффинном пространстве и его элементы. Понятие выпуклой фигуры, примеры. Выпуклая оболочка множества точек.

Тема 5.7. Фигуры второго порядка в вещественных аффинных пространствах.

Фигуры второго порядка (квадрики) в вещественном аффинном пространстве $\mathbf{A}^n$. Пересечение квадрики с прямой. Асимптотические направления. Линии эллиптического, гиперболического, параболического типов на плоскости $\mathbb{E}^2$. Центры квадрик. Диаметральные плоскости квадрики. Диаметры линий второго порядка. Приведение уравнений квадрики к нормальному виду с помощью преобразования координат. Аффинная классификация квадрик в вещественном аффинном пространстве $\mathbf{A}^n$. Аффинная классификация линий второго порядка. Аффинная классификация поверхностей второго порядка.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Иное	Форма контроля знаний
		Лекции	Лабораторные занятия	Семинарские занятия	Практические занятия	Количество часов УСР		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1 семестр								
1	**Векторы**	**14**			**12**	**2**		
1.1	Введение	1						
1.2	Понятие вектора	2						Опрос
1.3	Линейные операции над векторами	2			4			Опрос
1.4	Проекции	2						Опрос
1.5	Базисы и координаты векторов	2			3			Опрос
1.6	Полилинейные операции над векторами	5			5	2		Контрольная работа
2	**Прямые и плоскости**	**11**			**12**	**2**		
2.1	Системы координат. Фигуры и уравнения	3			4			Отчет по индивидуальному заданию
2.2	Прямые на плоскости $\mathbb{E}^2$	4			4			Тест
2.3	Плоскости и прямые в пространстве $\mathbb{E}^3$	4			4	2		Контрольная работа
3	**Фигуры второго порядка**	**9**			**8**			
3.1	Эллипс, гипербола, парабола	3			2			Тест
3.2	Фигуры второго порядка на плоскости $\mathbb{E}^2$	2			2			Отчет по индивидуальному заданию
3.3	Фигуры вращения. Цилиндрические и конические фигуры	2			2			Опрос
3.4	Фигуры второго порядка в пространстве $\mathbb{E}^3$	2			2			Опрос
	Всего за семестр	**36**			**32**	**4**		**Экзамен**

			2 семестр					
4	**Аффинные преобразования и движения**	**9**			**6**	**2**		
4.1	Аффинные преобразования плоскости $\mathbb{E}^2$ и пространства $\mathbb{E}^3$	6			4			Опрос
4.2	Движения плоскости $\mathbb{E}^2$ и пространства $\mathbb{E}^3$	3			2	2		Контрольная работа
5	**Аффинные пространства**	**17**			**16**	**2**		
5.1	Определение, примеры и простейшие свойства аффинного пространства	2						Опрос
5.2	Плоскости в аффинном пространстве	5			6			Опрос
5.3	Системы координат в аффинном пространстве. Уравнения плоскостей	2			4	2		Контрольная работа
5.4	Аффинные отображения	2						Опрос
5.5	Барицентрические линейные комбинации точек и барицентрические координаты	2						Опрос
5.6	Параллелепипеды и симплексы в вещественных аффинных пространствах. Выпуклые фигуры	2			4			Опрос
5.7	Фигуры второго порядка в вещественных аффинных пространствах	2			2			Отчет по индивидуальному заданию
	Всего за семестр	**26**			**22**	4		**Экзамен**
	Всего по учебной дисциплине	**62**			**54**	**8**		

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. *Петрова В.Т.* Аналитическая геометрия. Учебник. – М., Кнорус, 2020. – 426 с.

2. *Кононов С.Г.* Аналитическая геометрия: учебное пособие. – Минск: БГУ, 2014. – 238 с.

3. *Моденов П.С., Пархоменко А.С.* Сборник задач по аналитической геометрии: учебное пособие. – М., Наука, 1976.– 384 с.

4. *Бурдун А.А., Мурашко Е.А., Толкачев М.М., Феденко А.С.* Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии: учебное пособие. – Минск: Университетское, 1989. – 285 с.

Перечень дополнительной литературы

1. *Кострикин А.И., Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие. – М., Наука, 1986. – 303 с.

2. *Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия: учебник. – М., Наука, 1970. – 527 с.

3. *Постников М.М.* Аналитическая геометрия: учебное пособие. – М., Наука, 1973. – 751 с.

4. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия: учебное пособие. – М., Наука, 1979. – 336 с.

5. *Милованов М.В., Тышкевич Р.И., Феденко А.С.* Алгебра и аналитическая геометрия: в 2 ч.: учебное пособие. – Минск: Вышэйшая школа, 1984. – Ч. 1. – 302 с.

6. *Милованов М.В., Толкачев М.М., Тышкевич Р.И., Феденко А.С.* Алгебра и аналитическая геометрия: в 2 ч.: учебное пособие. – Минск: Вышэйшая школа, 1987. – Ч. 2. – 269 с.

4. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник. – М., Наука, 1979. – 512 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Для оценки соответствия достижений и уровня знаний студентов требованиям программы используется следующий диагностический инструментарий:

- контрольные работы;
- устный опрос;
- отчет по индивидуальным заданиям;
- тест.

При оценивании устных ответов учитываются полнота, глубина, обоснованность и точность изложения материала, степень осознанности изученного материала, подтверждение теоретических фактов примерами, грамотность речи.

Оценка за выполнение индивидуальных заданий отражает степень самостоятельности выполнения задания, соответствие теоретическим положениям, творческий подход.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Аналитическая геометрия» учебным планом предусмотрен экзамен в каждом семестре.

При формировании итоговой оценки используется рейтинговая оценка знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая оценка предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний и текущей аттестации в рейтинговую оценку:

- контрольные работы – 40 %;
- отчет по индивидуальным заданиям – 20 %;
- устные опросы – 20%;
- тест – 20%.

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов. Вес оценки по текущей успеваемости составляет 40 %, экзаменационной оценки – 60 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 1.6. Полилинейные операции над векторами (2ч.)

Форма контроля - контрольная работа № 1 (примерный вариант).

1. Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC. Выразите векторы $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.

2. Пусть $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ – правый ортонормированный базис. Даны векторы $\vec{a}=5\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=-3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$. Найдите: 1) координаты вектора $\vec{d}=\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$ в базисе $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$; 2) величину угла между векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$; 3) длину вектора $\vec{c}\times\vec{b}$; 4) смешанное произведение $\vec{b}\vec{c}\vec{d}$.

3. Найдите длину вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, если $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарные векторы такие, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=5$; величины углов между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а также между $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равны $\frac{\pi}{3}$.

4. Объем параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ равен 10. E,F,G – точки пересечения диагоналей граней параллелепипеда, не проходящих через вершину A. Найдите объем пирамиды $AEFG$.

5. ABC – равносторонний треугольник, вписанный в окружность радиуса R, M – точка окружности, отличная от A,B,C. Найдите $|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2$.

Тема 2.3. Плоскости и прямые в пространстве $\mathbb{E}^3$ (2ч.)

Форма контроля - контрольная работа № 2 (примерный вариант).

1. Дана прямая $\Delta:\begin{cases}x=-1+3t,\\ y=2-2t.\end{cases}$

1) Для прямой Δ найдите: направляющий вектор; нормальный вектор; угловой коэффициент; общее уравнение.

2) Напишите уравнения прямых Δ_1 и Δ_2, параллельных Δ и отстоящих от Δ на расстояние $d=\sqrt{13}$.

3) Найдите точку, симметричную точке $M(6,6)$ относительно прямой Δ.

2. Даны точки $A(3,5)$ и $B(-1,-2)$. На прямой $7x-6y+1=0$ найдите точку такую, что площадь треугольника ABC равна 1.

3. Найдите точки пересечения прямой $\begin{cases}6x+2y-z-9=0,\\ 3x+2y+2z-12=0\end{cases}$ координатными плоскостями.

4. Луч света проходит через точку $M_1(1,-1,-1)$ и, отразившись от плоскости $\pi: x-y-z-6=0$, проходит через точку $M_2(-1,2,0)$. Напишите уравнения прямых, содержащих соответственно лучи падающий и отраженный.

Тема 4.2. Движения плоскости $\mathbb{E}^2$ и пространства $\mathbb{E}^3$ (2ч.)

Форма контроля - контрольная работа № 3 (примерный вариант).

1. В какие прямые перейдут координатные оси при повороте плоскости на угол $\dfrac{\pi}{4}$ вокруг точки $M_0(-1,3)$?

2. Найдите инвариантные прямые аффинного преобразования f:

$$f:\begin{cases} x' = y - 9, \\ y' = 9x + 1. \end{cases}$$

Как запишется преобразование в системе координат, в которой координатными осями являются инвариантные прямые?

3. Пусть Oxy – прямоугольная система координат на плоскости. Напишите формулы, задающие композицию двух движений: $f = f_2 \circ f_1$, где f_1 – симметрия плоскости относительно оси Ox, f_2 – симметрия плоскости относительно прямой, проходящей через начало координат и составляющей угол 120° с осью Ox.

4. Докажите, что плоскость $x - y = 0$ пересекает поверхность $2y^2 + z^2 - 2x = 0$ по окружности. Найдите центр и радиус этой окружности.

5. Пусть f_1, f_2, f_3, f_4 – симметрии плоскости $\mathbb{E}^2$ относительно прямых. Композиция этих отображений $f = f_1 f_2 f_3 f_4$ может быть одним из следующих преобразований:

1) *параллельный перенос*;
2) *поворот плоскости вокруг неподвижной точки*;
3) *симметрия относительно прямой*;
4) *скользящая симметрия*;
5) *тождественное отображение*.

Тема 5.3. Системы координат в аффинном пространстве. Уравнения плоскостей (2ч.)

Форма контроля - контрольная работа № 4 (примерный вариант).

1. Напишите параметрические уравнения плоскости, являющейся аффинной оболочкой точек

$A = (1,1,-2,2), B = (-3,1,4,4), C = (-1,2,3,6), D = (0,2,-1,3), E = (-1,0,1,2)$.

2. Даны плоскости $\mathcal{B}^2 = M_0 + W^2$ и $\mathcal{P}^2 = N_0 + U^2$ в аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$.

Здесь $M_0=(2,5,1,5),\ W^2=\langle(1,3,-1,2),(2,4,-3,5)\rangle;$

$N_0=(0,-3,-1,-2),\ U^2=\langle(1,5,3,5),(2,4,-6,1)\rangle.$

Определите взаимное расположение этих плоскостей.

3. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите расстояние от точки $M_0=(8,10,-9,-1)$ до плоскости $\mathcal{B}$, заданной системой уравнений:

$$\mathcal{B}:\begin{cases}4x_1-6x_2++3x_3+5x_4=21,\\ -2x_2+x_3+x_4=3.\end{cases}$$

а также ортогональную проекцию данной точки на плоскость $\mathcal{B}$.

4. Пусть $(O,\vec{c}_1,\dots,\vec{c}_n)$ – ортонормированный репер в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$. Найдите расстояние от начала координат до гиперплоскости, которая отсекает на координатных осях отрезки величиной $b_1,\dots,b_n$.

Примерная тематика практических занятий

1 семестр (номера [3] и [4] соответствуют источникам в перечне основной литературы).

Фигуры и уравнения

Занятие 1.

Фигура *– любое множество точек* Ф *пространства* $\mathbb{E}^3$, *в том числе и пустое. Аналитическая геометрия изучает фигуры с помощью алгебры, используя* ***метод координат***. *Фигура называется* ***плоской***, *если существует плоскость, в которой лежат все точки фигуры.*

Вначале будем рассматривать плоские фигуры, лежащие в плоскости $\mathbb{E}^2$. *Если Oxy – система координат на плоскости, то любая фигура* $\Phi\subset\mathbb{E}^2$ *может быть задана уравнением с двумя неизвестными*:

$$F(x,y)=0. \qquad (1)$$

Здесь F - функция двух вещественных переменных $x,y\in\mathbb{R}$, т.е. некоторое правило, по которому упорядоченной паре вещественных чисел (x,y) из области определения $\mathbf{D}(F)$ функции F ставиться в соответствие число $F(x,y)\in\mathbb{R}$. Тот факт, что (1) – уравнение фигуры Ф означает, по определению, что Ф состоит из всех точек плоскости, координаты которых являются решениями уравнения (1), т.е.

$$\Phi=\{M(c_1,c_2)\in\mathbb{E}^2\mid(c_1,c_2)\text{ - решение (1)}\}.$$

Любое уравнение (1) *задает на плоскости вполне определенную фигуру, однако одна и та же фигура может быть задана различными уравнениями.*

Далее будем решать задачи двух типов: имея уравнение (1), определять (рисовать) соответствующую фигуру и наоборот для данной фигуры составлять уравнение (1), которое ее задает.

Нарисуйте фигуры, которые задаются уравнениями:

1. $x+y-2=0$;
2. $y^2-4y-2x+4=0$;
3. $x^2+y^2+x+y=0$;
4. $xy+2=0$.

Составьте уравнения следующих фигур:

1. вертикальной (горизонтальной) прямой, проходящей через точку $M_0(2,-3)$;
2. произвольной окружности с центром в точке $M_0(x_0,y_0)$ и радиусом $r>0$.
3. точки $M_0(2,-3)$.

Основная задача*. Пусть F_1 и F_1 – точки плоскости, расстояние между которыми равно $2c>0$. Составьте уравнение фигуры, состоящей из всех точек плоскости, для которых сумма расстояний до F_1 и F_1 равна $2a$, $a>c$. Нарисуйте данную фигуру.*

Задание на дом.

1. *Нарисуйте фигуры, которые задаются условиями*:
   1) $(x-2)^2+(y+2)^2=4$;
   2) $|x-2|+|y+2|=2$;
   3) $\max\{|x-2|,|y+2|\}=2$.
2. *Составьте уравнение двоеточия.*
3. *Пусть F_1 и F_1 – точки плоскости, расстояние между которыми равно $2c>0$. Составьте уравнение фигуры, состоящей из всех точек плоскости, для которых разность расстояний до F_1 и F_1 равна $2a$, $a<c$. Нарисуйте данную фигуру.*

Занятие 2.

1. *Проверка домашнего задания.*

2. *Определить полярную систему координат. Записать связь между полярными и декартовыми координатами.* (см. § 6.1 П.С. Моденов, А.С. Пархоменко).

3. *Задачи.*

1) Напишите в полярной системе координат уравнения а) окружности с центром в начале координат; б) вертикальной (горизонтальной) прямой, проходящей через точку $M_0(2,-3)$;

2) Нарисуйте фигуры, заданные уравнениями в полярной системе координат: а) $r=\varphi$; б) $r=\sin n\varphi$; $n=1,2,3,4$.

4. *Определить системы координат в пространстве: декартову прямоугольную, сферическую и цилиндрическую. Записать связь между* *сферическими* (*цилиндрическими*) *и декартовыми координатами.* (см. § 6.2 [3]).

Задание на дом.

1. *Нарисуйте фигуру, которая задается в полярной системе координат уравнением* $r = 2(1 - \cos\varphi)$.

2. *Пусть* F_1 и F_1 – *точки плоскости. Составьте уравнение фигуры, состоящей из всех точек плоскости, для которых отношение расстояний до* F_1 и F_1 *равно* $k > 0$. *Нарисуйте данную фигуру.*

3. *Какая фигура в пространстве в декартовой прямоугольной системе координат задается уравнением* $x^2 + y^2 = z^2$?

Векторы

Занятие 3. В аудитории: [3], № 1; 4; 11; 19; 14… На дом: [3], № 8; 22; 15; …
Занятие 4. В аудитории: [3], № 23; 25; 28; 32; 43… На дом: [3], № 26; 42; 29
Занятие 5. (*скалярное произведение векторов*). [4], № 419; 420; 424; 445; М.П.: 144(!); 148… На дом: [4], № 423; 428; 446; М.П.: 145; 149…
Занятия 6 и 7. (*векторное и смешанное произведения векторов*). В аудитории: [4], № 461; 465; 468; 470; 489; 490; М.П.: 175; 196; 209… На дом: [4], № 467; 472; 474; 491; 501; [3], № 177; 197; 208…
Занятие 8. – контрольная работа по векторам.

Прямые и плоскости

Занятия 9 – 11. (*прямая на плоскости*). В аудитории: [3], № 363; 367; 383; 391; 405; 416; 423; 431; 433; 446; 450; 465; 473… На дом: [3], № 364; 368; 387; 406; 418; 424; 434; 451;457; 460; …
Занятия 12 – 14. (*плоскость и прямая в пространстве*). В аудитории: [3], № 491; 492; 500; 504; 530; 534; 539; 567; 580; 578; 606; 585; … На дом: [3], № 514; 512; 520; 532; 537; 569; 582; 583; 604;621; …
Занятие 15. – контрольная работа по прямым и плоскостям.

Фигуры 2 порядка на плоскости

Занятия 16 – 17. В аудитории: [3], № 759; 760; 769; 805 (1, 6, 8, 10); 807(1,.14). На дом: [3], № 761; 762; 733; 805 (3, 7, 11); 807 и др. (каждому студенту индивидуальное задание).

2 семестр (все номера в заданиях соответствуют источнику [3] в перечне основной литературы).

Фигуры второго порядка в пространстве

В аудитории: № 945, 946, 976, 981, 985, 987, 997, 1001, 1102.
На дом: № 950, 947, 975, 979, 986, 988, 998, 1009, 1071, 1149,1).

Аффинные преобразования и движения

В аудитории: № 1159, 1153, 1163, 1166, 1175, 1187, 1229, 1234, 1102.
На дом: № 1158, 1154, 1171, 1167, 1177, 1188, 1232, 1237.

Занятие 9. Контрольная работа.

Плоскости в аффинных и евклидовых пространствах

Работаем в аффинном (евклидовом векторном, евклидовом точечном) пространстве строк $\mathbb{R}^n$ (n = 4,5,…)

1. Выясните, лежат ли точки A, B, C на одной прямой.

1) $A=(2,1,-2,0), B=(1,-3,-3,1), C=(4,9,0,-2)$;

2) $A=(-1,0,2,2), B=(2,1,0,4), C=(-2,-1,3,0)$.

2. Найдите размерность плоскости $Aff(M_0, M_1, M_2, ...)$, являющейся аффинной оболочкой точек $M_0, M_1, M_2, ...$

1) $M_0=(0,-1,1,2), M_1=(-1,4,0,1), M_2=(-2,1,-3,-1), M_3=(-1,12,2,2)$;

2)

$M_0=(0,1,3,-3), M_1=(-1,0,2,2), M_2=(2,1,0,4), M_3=(-2,-1,3,0), M_4=(-1,1,2,-2)$.

3. Выясните взаимное расположение плоскостей $\mathcal{B}=Aff(A,B,C)$ и $\mathcal{P}=Aff(A_1,B_1,C_1)$:

$A=(2,-1,0,4), B=(-1,2,0,3), C=(3,0,1,1)$,

$A_1=(1,1,1,1), B_1=(8,-4,-4,6), C_1=(-3,3,3,0)$.

Ответ: частично параллельны.

4. Выясните взаимное расположение плоскостей $\mathcal{B}^2=M_0+L(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ и $\mathcal{P}^2=N_0+L(\vec{b}_1,\vec{b}_2)$:

$M_0=(1,1,2,1,0), \vec{a}_1=(2,1,-1,1,3), \vec{a}_2=(-3,-1,2,2,-1)$,

$N_0=(0,2,7,7,4), \vec{b}_1=(-1,2,3,1,1), \vec{b}_2=(1,-1,1,2,1)$.

Ответ: пересекаются в точке $Q_0=(0,1,3,4,2)$.

В аудитории: № 1612, 1614, 1616, 1166, 1630, 1633 первый вектор $(1,2,2,-1)$, 1640, 1644, 1657, 1662, 1666.

На дом: № 1621, 1613, 1615, 1617, 1641, 1646, 1658, 1659, 1673.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используются следующие **подходы и методы:**

- ***эвристический,*** ориентированный на: - осуществление студентами личностно-значимых открытий в процессе подготовки к практическим занятиям по методике преподавания математики; - демонстрацию многообразия решений математических задач, методов, форм, средств и приемов организации учебной деятельности школьников; - творческую самореализацию студентов в процессе создания планов-конспектов уроков и их видеофрагментов; - индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности;

- ***практико-ориентированный,*** предполагающий: - освоение содержание образования через решения практических задач; - приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности; - использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций;
- ***метод группового обучения,*** который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности студентов, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями;

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов

В процессе *самостоятельной работы* по дисциплине «*Аналитическая геометрия»* студент должен выполнять следующие виды внеаудиторной деятельности:

- изучение и конспектирование материала, вынесенного на лекциях и лабораторных занятиях на самостоятельное изучение по источникам основной и дополнительной литературы;
- подготовка к различным формам промежуточной аттестации (практической, лабораторной и контрольной работе, коллоквиуму, зачету, экзамену);
- поиск и изучение понятий и фактов из параллельно читаемых курсов «*Введение в математику»*, «*Алгебра и теория чисел»*, «*Математический анализ»*, необходимых для усвоения дисциплины «*Аналитическая геометрия»*;
- выполнение домашних заданий; самостоятельное выполнение заданий для лабораторных работ;
- подбор необходимой литературы, поиск необходимой информации в сети Интернет.

Критерием оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «*Аналитическая геометрия»*, является уровень усвоения учебного материала, который проверяется и оценивается при выполнении контрольных и лабораторных работ, индивидуальных заданий и при сдаче зачетов и экзаменов.

К *организационным формам* проведения УСР по дисциплине «*Аналитическая геометрия»* относится аудиторная деятельность на практических занятиях. *Видами отчетности* УСР являются: контрольные работы и отчеты по индивидуальным заданиям.

Контроль УСР по дисциплине «*Аналитическая геометрия*» проводится преподавателем, как правило, во время аудиторных занятий и осуществляется в виде:

– экспресс-опроса на аудиторных занятиях;

– контрольной работы;

Учет результатов контроля текущей успеваемости студентов ведется преподавателем. Полученные студентом количественные результаты УСР учитываются как составная часть итоговой оценки по дисциплине в рамках рейтинговой системы.

Примерный перечень вопросов к экзамену
(1 семестр)

1. Эквивалентные направленные отрезки.
2. Понятие вектора. Коллинеарные и компланарные векторы.
3. Операция сложения векторов и ее свойства.
4. Операция умножения векторов на числа и ее свойства.
5. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов.
6. Геометрические критерии линейной зависимости.
7. Алгебраические критерии линейной зависимости.
8. Проекции и их свойства.
9. Базисы. Координаты вектора в данном базисе.
10. Формулы преобразования координат векторов при переходе от одного базиса к другому.
11. Скалярное произведение векторов и его свойства.
12. Векторное произведение векторов и его свойства.
13. Смешанное произведение векторов и его свойства.
14. Критерии компланарности трех векторов.
15. Аффинные реперы. Координаты точки в данном репере. Формулы преобразования координат точек при переходе от одного репера к другому.
16. Формулы преобразования координат точек на плоскости при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой.
17. Различные виды уравнений прямой на плоскости $\mathbb{E}^2$.
18. Определение взаимного расположения двух прямых на плоскости по их уравнениям.
19. Величина угла между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой.
20. Геометрический смысл линейного неравенства с двумя переменными.
21. Плоскость в пространстве $\mathbb{E}^3$. Различные виды уравнений плоскости.
22. Определение взаимного расположения двух плоскостей по их уравнениям.
23. Прямая в пространстве $\mathbb{E}^3$. Различные виды уравнений прямой в $\mathbb{E}^3$.
24. Определение взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве $\mathbb{E}^3$.

25. Расстояние от точки до плоскости и расстояние от точки до прямой в пространстве $\mathbb{E}^3$.
26. Эллипс.
27. Гипербола.
28. Парабола.
29. Фигуры второго порядка на плоскости $\mathbb{E}^2$.
30. Единое определение эллипса, гиперболы и параболы с помощью фокуса и директрисы.
31. Касательные к эллипсу, гиперболе, параболе.
32. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы.
33. Фигуры вращения в пространстве $\mathbb{E}^3$.
34. Цилиндрические и конические фигуры в пространстве $\mathbb{E}^3$.
35. Эллипсоиды.
36. Гиперболоиды.
37. Эллиптические параболоиды.
38. Гиперболические параболоиды.
39. Фигуры второго порядка в пространстве $\mathbb{E}^3$.
40. Плоские сечения пространственных фигур второго порядка.
41. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида.

Примерный перечень вопросов к экзамену

(2 семестр)

1. Понятие аффинного преобразования плоскости $\mathbb{E}^2$ и пространства $\mathbb{E}^3$. Примеры.
2. Отображение, обратное для аффинного преобразования. Группы аффинных преобразований $Aff(\mathbb{E}^2)$ и $Aff(\mathbb{E}^3)$.
3. Образы прямой и плоскости при аффинном преобразовании.
4. Линейный оператор, индуцированный аффинным преобразованием.
5. Простое отношение точек, сохранение простого отношения точек при аффинном преобразовании.
6. Координатная запись аффинного преобразования.
7. Геометрический смысл определителя матрицы аффинного преобразования.
8. Инвариантные точки и инвариантные прямые аффинного преобразования плоскости $\mathbb{E}^2$.
9. Движения плоскости $\mathbb{E}^2$ и пространства $\mathbb{E}^3$. Примеры.
10. Координатная запись движений. Классификация движений плоскости $\mathbb{E}^2$ и пространства $\mathbb{E}^3$.
11. Понятие аффинного пространства. Примеры.
12. Радиус-вектор точек аффинного пространства, биекция аффинного пространства и связанного с ним векторного пространства при фиксировании точки.
13. Аффинные реперы и координаты в аффинном пространстве. Формулы

преобразования координат.

14. Понятие плоскости в аффинном пространстве. Начальная точка и направляющее пространство плоскости.

15. Пересечение плоскостей в аффинном пространстве. Аффинная оболочка множества точек.

16. Сумма плоскостей в аффинном пространстве.

17. Аффинно независимые точки в аффинном пространстве.

18. Взаимное расположение двух плоскостей в аффинном пространстве. Характеристика пары плоскостей.

19. Параметрические и общие уравнения плоскостей в аффинном пространстве.

20. Определение взаимного расположения двух плоскостей по их уравнениям.

21. Барицентрические линейные комбинации точек и барицентрические координаты в аффинном пространстве.

22. Выпуклые фигуры в вещественном аффинном пространстве.

23. Выпуклая оболочка множества точек в вещественном аффинном пространстве.

24. n-мерный параллелепипед в вещественном аффинном и евклидовом пространствах.

25. n-мерный симплекс в вещественном аффинном и евклидовом пространствах.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)*
Дифференциальные уравнения	Дифференциальных уравнений и системного анализа	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 14 от 30.06.2021)
Алгебра	Высшей алгебры и защиты информации	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 14 от 30.06.2021)
Математический анализ	Теории функций	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 14 от 30.06.2021)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

на _____/_____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
______________________________ (протокол № ____ от ________ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

______________________ ________________ ___________________

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

______________________ ________________ ___________________