$$\dot{\phi} = 1 - 2rcos\phi - r^2(1/4 + 1/2cos\phi 2\phi - ksin4\phi - mcos4\phi). \qquad (5)$$

Здесь $r, \phi-$полярные координаты. В декартовых координатах x, y правые части системы (6) являются кубическими полиномами, а особая точка $O(0,0)$ системы (6) - фокус. Кубическая система в общем случае, обозначим ее S, имеет 14 коэффициентов (параметров). Если сложить правые части системы S и системы (6), то получим возмущенную систему (6). При малых значениях параметров системы S из фокуса системы (6) при ее возмущении могут рождаться малоамплитудные предельные циклы. Максимально возможное число таких циклов называется цикличностью фокуса невозмущенной системы. Кратностью фокуса невозмущенной системы называется порядок ее первой ненулевой постоянной Ляпунова.

Теорема 1. *Цикличность фокуса системы равна $r+1, r-$ ранг матрицы коэффициентов линейных частей постоянных Ляпунова $L_i, i = 1, ...k-1$ возмущенной системы, $k-$кратность фокуса невозмущенной системы.*

Теорема 2. *Кратность фокуса $O(0,0)$ системы (6) равна 10.*

Теорема 3. *Цикличность фокуса $O(0,0)$ системы (6) равна 10.*

Рассматриваем теперь систему (6) как систему с переключением относительно оси Ox, то есть систему (6), если $y \geq 0$ и ее же, если $y < 0$. При этом имеется в виду, что верхняя и нижняя части системы независимы относительно возмущений, то есть систем S_1при значениях $y \geq 0$ и S_2 при значениях $y < 0$. Системы S_1, S_2 в сумме имеют 28 независимых параметров . Постоянные Ляпунова системы с переключением вычисляются по формуле $L_i = u_{1,i}(\pi) - u_{2,i}(-\pi)$, где $u_{1,i}(\phi), u_{2,i}(\phi)-$ коэффициенты решений $r = c + \sum\limits_{i=2}^{\infty} c^i u_{1,i}(\phi), r = c + \sum\limits_{i=2}^{\infty} c^i u_{2,i}(\phi)$ соответственно верхней и нижней систем, $u_{1,i}(0) = 0, u_{2,i}(0) = 0$. Обзор литературы по кубическим системам с переключением см., например, в статье [1], в которой рассмтривается система с 18 малоамплитудными предельными циклами, по 9 вокруг двух фокусов.

Теорема 4. *Порядок фокуса $O(0,0)$ системы (6) с переключением равен 20.*

Теорема 5. *Цикличность фокуса $O(0,0)$ системы (6) с переключением равна 20.*

Литература

1. Yu, Pei; Han, Maoan; Zhang, Xiang *Eighteen limit cycles around two symmetric foci in a cubic planar switching polynomial system.* //Journal of Differential Equations 275 (2021). P. 939–959.

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ЦЕНТРА КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КУКЛЕСА

Садовский А.П.[1], **Гринь А.А.**[2], **Детченя Л.В.**[2], **Чергинец Д.Н.**[1]

[1]Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
sadovskii@bsu.by; cherginetsdn@gmail.com
[2]Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, Гродно, Беларусь
detchenya_lv@grsu.by; grin@grsu.by

В работе исследуется условие центра, отсутствующее в работе Куклеса [1]. Данное условие выражено в терминах коэффициентов преобразования, приводящего систему Куклеса к системе с симметрией относительно оси OY.

Рассмотрим систему Куклеса

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -x + Y(x, y), \qquad (1)$$

где $Y(x, y) = Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3$.

При

$$K = -\frac{5A^4 + A^3C + 16A^2B^2 + 16B^4}{9A^2 + 16B^2}, \ L = \frac{A\left(6A^4 + 3A^3C + 14A^2B^2 + 16B^4\right)}{4B\left(9A^2 + 16B^2\right)},$$

$$N = -\frac{6A^5 + 3A^4C + 50A^3B^2 + 36A^2B^2C + 80AB^4 + 64B^4C}{36A^2B + 64B^3},$$

$$A^3C^2 + 4C\left(A^2 - AB + 2B^2\right)\left(A^2 + AB + 2B^2\right) + 4A\left(A^4 + 4A^2B^2 + 5B^4\right) = 0,$$

$$M = -\frac{A\left(6A^3 + 3A^2C + 22AB^2 + 16B^2C\right)}{2\left(9A^2 + 16B^2\right)}, \tag{2}$$

положение равновесия $O(0,0)$ системы (1) является центром.

Если

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial x}{\partial u}(1 + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} d_k u^k)v + \tfrac{\partial x}{\partial v}(-u + Y(u,v))(1 + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} d_k u^k) = y + \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} e_{2i}x^{2i}, \\ &\tfrac{\partial y}{\partial u}(1 + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} d_k u^k)v + \tfrac{\partial y}{\partial v}(-u + Y(u,v))(1 + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} d_k u^k) = -x, \end{aligned}$$

где

$$x = u + \sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{i} f_{j,i-j}u^j v^{i-j}, \qquad y = v + \sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{i} g_{j,i-j}u^j v^{i-j}, \tag{3}$$

то $O(0,0)$ системы (1) является центром.

Теорема. *При выполнении условий (2) коэффициенты преобразования (3), приводящего систему (1) к системе с симметрией относительно оси OY, удовлетворяют соотношениям:*

$$g_{2,1} = \frac{f_{2,0}^3}{2g_{1,1} - 5f_{2,0}} - \frac{31}{4}f_{2,0}g_{1,1} + \frac{13f_{2,0}^2}{2} + 3g_{1,1}^2 + \frac{2g_{2,0}^2}{3},$$

$$g_{1,2} = \frac{8g_{2,0}^3\left(5f_{2,0} - 2g_{1,1}\right) + 3g_{2,0}\left(9f_{2,0} - 4g_{1,1}\right)\left(-45f_{2,0}g_{1,1} + 54f_{2,0}^2 + 10g_{1,1}^2\right)}{81\left(5f_{2,0} - 2g_{1,1}\right)\left(2f_{2,0} - g_{1,1}\right)},$$

$$g_{3,0} = \frac{8g_{2,0}^3\left(2g_{1,1} - 5f_{2,0}\right) + 3g_{2,0}\left(-351f_{2,0}^2g_{1,1} - 54f_{2,0}g_{1,1}^2 + 594f_{2,0}^3 + 40g_{1,1}^3\right)}{162\left(5f_{2,0} - 2g_{1,1}\right)\left(2f_{2,0} - g_{1,1}\right)},$$

$$64g_{2,0}^4\left(5f_{2,0} - 2g_{1,1}\right) + 48g_{2,0}^2\left(12f_{2,0} - 5g_{1,1}\right)\left(3f_{2,0} - 2g_{1,1}\right)^2 +$$
$$+ 243\left(3f_{2,0} - 2g_{1,1}\right)^3\left(g_{1,1} - 2f_{2,0}\right)^2 = 0.$$

Литература

1. Куклес И.С. *О некоторых случаях отличия фокуса и центра* // Докл. АН СССР. 1944. Т. 42. № 5. С. 208–211.