УДК 512.543

В.В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ, Я.А. ЖУКОВЕЦ

ПСЕВДОКОНЕЧНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ТРЕУГОЛЬНЫЕ ГРУППЫ ТИПА (3, 5, 2)

We consider generalized triangle groups with presentation $G=\langle a,b;a^3=b^5=R^2(a,b)=1\rangle$, where $R(a,b)=a^{k_1}b^{l_1}a^{k_2}b^{l_2}\ldots a^{k_s}b^{l_s}$. The necessary conditions Γ to be pseudo-finite are found. All pseudo-finite groups Γ with $s\le 8$ are found. It is proved, that if 5 divides $L=l_1+\dots+l_s$ or s is even and $s\le 8$ then Γ contains a non-abelian free subgroup.

Говорят, что группа G удовлетворяет альтернативе Титса, если G содержит либо неабелеву свободную подгруппу, либо разрешимую подгруппу конечного индекса. Обобщенной треугольной группой типа (k,l,m) называется группа с копредставлением вида $\Gamma=\langle a,b \mid a^k=b^l=R^m(a,b)=1\rangle$, где $k,l,m\ge 2$, $R(a,b)=a^{k_1}b^{l_1}a^{k_2}b^{l_2}\ldots a^{k_s}b^{l_s}$, $0<k_i<k$, $0<l_i<l$, и слово $R(a,b)$ не является собственной степенью. Розенбергер [1] выдвинул гипотезу, что каждая обобщенная треугольная группа удовлетворяет альтернативе Титса. К настоящему времени эта гипотеза доказана для групп всех типов, за исключением $(2,n,2)$, где $n\le 5$, (3, 3, 2) и (3, 5, 2). Мы рассматриваем группы типа (3, 5, 2).

Ниже мы будем обозначать через $[A]$ – образ матрицы $A\in SL_2(\mathbb{C})$ в $PSL_2(\mathbb{C})$, через $\operatorname{tr} A$ – след матрицы A. Подгруппа $H\subset PSL_2(\mathbb{C})$ называется элементарной, если любые два элемента бесконечного порядка из H имеют общий ненулевой собственный вектор. Неэлементарная подгруппа H из $PSL_2(\mathbb{C})$ содержит неабелеву свободную подгруппу [2]. Там же доказано, что если H порождена двумя элементами $[A]$, $[B]$, то H неэлементарна тогда и только тогда, когда H неприводима, бесконечна и отлична от бесконечной группы диэдра. При этом H является бесконечной группой диэдра в точности тогда, когда хотя бы два из трех чисел $\operatorname{tr} A$, $\operatorname{tr} B$, $\operatorname{tr} AB$ равны нулю. Далее, конечными подгруппами в $PSL_2(\mathbb{C})$ являются: циклические группы, группы диэдра D_n, а также A_4, S_4, A_5. Нетрудно показать, что элемент $[X]\in PSL_2(\mathbb{C})$ имеет порядок $n\ge 2$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} X=2\cos\frac{\pi u}{n}$, где $(u,n)=1$. Гомоморфизм $\rho:\Gamma\to PSL_2(\mathbb{C})$ будем называть существенным, если образы элементов a, b, $R(a,b)$ имеют порядки k, l, m соответственно. Группу Γ будем называть псевдоконечной, если образ $\rho(\Gamma)$ конечен для любого существенного представления ρ.

Пусть $F_n=<g_1,\dots,g_n>$ – свободная группа, $R(F_n)=SL_2(\mathbb{C})^n$ – многообразие представлений F_n в $SL_2(\mathbb{C})$. Для элемента $g\in F_n$ характером Фрике называют функцию $\tau_g: R(F_n)\to\mathbb{C}$, $\tau_g(\rho)=\operatorname{tr}\rho(g)$. Комбинируя результаты [3, 4], легко видеть, что $\mathbb{C}$-алгебра $\mathbb{C}[\tau_g, g\in F_n]$ порождается характерами Фрике $x_i=\tau_{g_i}$, $y_{ij}=\tau_{g_ig_j}$, $z_{ijk}=\tau_{g_ig_jg_k}$, где $1\le i<j<k\le n$. Введем следующий морфизм:

$$\psi: R(F_n)\to\mathbb{A}^t,\ \psi(\rho)=(x_1(\rho),\dots,x_n(\rho),y_{12}(\rho),\dots,y_{n-1,n}(\rho),z_{123}(\rho),\dots,z_{n-2,n-1,n}(\rho)), \tag{1}$$

где $t=n+n(n-1)/2+n(n-1)(n-2)/6$. В [3] доказано, что образ $\psi(R(F_n))$ замкнут в топологии Зарисского в $\mathbb{A}^t$. $\psi(R(F_n))$ называют многообразием характеров представлений F_n в $SL_2(\mathbb{C})$ и обозначают $X(F_n)$. Легко проверить, что $\dim R(F_n)=3n$, а $\dim X(F_n)=3n-3$. Далее, подмножество $R_{irr}\subset R(F_n)$, состоящее из неприводимых представлений, открыто в топологии Зарисского в $R(F_n)$, а его образ $X_{irr}=\psi(R_{irr})$ открыт в $X(F_n)$. Справедливы следующие соотношения между характерами Фрике: $\tau_{w^{-1}}=\tau_w$, $\tau_{uv}=\tau_u\tau_v-\tau_{u^{-1}v}$. Рассмотрим подробнее случай свободной группы $F_2=\langle g,h\rangle$ с двумя образующими. В [5] доказано, что если $w=g^{u_1}h^{v_1}\cdots g^{u_s}h^{v_s}$ – циклически редуцированное слово в F_2 и $x=\tau_g$, $y=\tau_h$, $z=\tau_{gh}$, то $\tau_w=Q_w(x,y,z)$, где $Q_w\in\mathbb{Z}[x,y,z]$ – однозначно определенный полином с целыми коэффициентами, который называют полиномом Фрике элемента w.

Отметим также следующий факт: пара матриц $A,B\in SL_2(\mathbb{C})$ порождает приводимую подгруппу тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} ABA^{-1}B^{-1}=2$, а это равносильно условию

$$(\operatorname{tr} A)^2+(\operatorname{tr} B)^2+(\operatorname{tr} AB)^2-\operatorname{tr} A\operatorname{tr} B\operatorname{tr} AB-4=0. \tag{2}$$

Лемма 1. *Для произвольных чисел* $x_1, x_2, x_3, y_{12}, y_{13}, y_{23}$, $z \in \mathbb{C}$, *таких, что* $h = z^2 - Pz + Q = 0$, *где*

$$P = x_1 y_{23} + x_2 y_{13} + x_3 y_{12} - x_1 x_2 x_3,$$

$$Q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_{12}^2 + y_{13}^2 + y_{23}^2 + y_{12} y_{13} y_{23} - x_1 x_2 y_{12} - x_1 x_3 y_{13} - x_2 x_3 y_{23} - 4,$$

существуют матрицы $A, B, C \in SL_2(\mathbb{C})$ *такие, что* $\operatorname{tr} A = x_1$, $\operatorname{tr} B = x_2$, $\operatorname{tr} C = x_3$, $\operatorname{tr} AB = y_{12}$, $\operatorname{tr} AC = y_{13}$, $\operatorname{tr} BC = y_{23}$, $\operatorname{tr} ABC = z$.

Рассмотрим группу $\Gamma = \left\langle a, b \middle| a^3 = b^5 = R^2(a,b) = 1 \right\rangle$, где $R(a,b) = a^{k_1} b^{l_1} a^{k_2} b^{l_2} \dots a^{k_s} b^{l_s}$, и пусть $Q_R(x,y,z)$ – полином Фрике элемента R. Положим $\alpha = 2\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $K = k_1 + \dots + k_s$, $L = l_1 + \dots + l_s$ и

$$g(z) = Q_R(1, \alpha, z). \tag{3}$$

Если z_0 – корень $g(z)$, то по лемме 1 существуют матрицы $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ такие, что $\operatorname{tr} A = 1$, $\operatorname{tr} B = \alpha$, $\operatorname{tr} AB = z_0$ и $\operatorname{tr} R(AB) = 0$. Тогда $[A]^3 = [B]^5 = R^2([A],[B]) = 1$ и отображение $a \to [A]$, $b \to [B]$ задает представление группы Γ. Обозначим через $G(z_0)$ группу, порожденную $[A]$, $[B]$. Если z_0 не является корнем уравнения

$$z^2 - \alpha z - \alpha^{-2} = 0, \tag{4}$$

то из (2) следует, что группа $G(z_0)$ неприводима. В этом случае $G(z_0)$ с точностью до сопряжения определена однозначно. Несложно убедиться, что $z_1 = 2\cos\frac{2\pi}{15}$, $z_2 = 2\cos\frac{8\pi}{15}$ являются корнями уравнения (4).

Лемма 2. *Полином* $g(z)$, *определенный в (3), не имеет корней, равных* z_1, z_2.

Лемма 3. *Если полином* $g(z)$ *имеет корень, отличный от* $0, 1, \alpha, \alpha^{-1}$, *то группа* Γ *не является псевдоконечной.*

Доказательство лемм 2 и 3 аналогично доказательству лемм 3, 4 в [7].

Теорема 1. *Если группа* Γ *псевдоконечна, то справедливы следующие утверждения:*

1) s *– четно,* $g(z) = \alpha^b \left(z(z-\alpha)\right)^a \left((z-1)(z-\alpha^{-1})\right)^{\frac{s}{2}-a}$, *где* $0 \le a \le \frac{s}{2}$, $b \in \{2a-1, 2a, 2a+1\}$ *; при этом выполнено одно из условий: а)* $K \equiv 0 \pmod 3$ *и* $L \not\equiv 0 \pmod 5$; *б)* $K \not\equiv 0 \pmod 3$ *и* $L \equiv 0 \pmod 5$;

2) s *– нечетно,* $K \not\equiv 0 \pmod 3$, $L \not\equiv 0 \pmod 5$ *и* $g(z)$ *совпадает с одним из полиномов:*

$$\alpha^{2a} h_1(z) \left(z(z-\alpha)\right)^a \left((z-1)(z-\alpha^{-1})\right)^{\frac{s-1}{2}-a}, \quad \alpha^{2a+1} h_2(z) \left(z(z-\alpha)\right)^a \left((z-1)(z-\alpha^{-1})\right)^{\frac{s-1}{2}-a},$$

где $0 \le a \le \frac{s-1}{2}$, $h_1(z) \in \{z, z-\alpha\}$, $h_2(z) \in \{z-1, z-\alpha^{-1}\}$.

Доказательство. Из леммы 3 следует, что

$$g(z) = A_0 z^a (z-1)^b (z-\alpha)^c (z-\alpha^{-1})^d,$$

где $a+b+c+d = s$. Чтобы найти коэффициент A_0, рассмотрим полиномы $P_n(x)$, которые удовлетворяют начальным условиям $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$ и рекуррентному соотношению $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$ для $n > 0$. Если $n < 0$, то положим $P_n(x) = -P_{|n|-2}(x)$. В [6] доказано, что если $w = g^{u_1} h^{v_1} \cdots g^{u_s} h^{v_s} \in F_2$, где $s \ge 1$, – циклически редуцированное слово, и $x = \tau_g$, $y = \tau_h$, $z = \tau_{gh}$, то полином Фрике Q_w имеет вид $Q_w(x,y,z) = M_s(x,y) z^s + \dots + M_0(x,y)$, где $M_s(x,y) = \prod_{i=1}^{s} P_{u_i-1}(x) P_{v_i-1}(y)$.

Следовательно, $A_0 = \prod_{i=1}^{s} P_{k_i-1}(1) P_{l_i-1}(\alpha) = \alpha^h$, где h – количество двоек и троек среди l_i. Положим $A = \begin{pmatrix} \varepsilon^5 & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-5} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \varepsilon^3 & 0 \\ t & \varepsilon^{-3} \end{pmatrix}$, где $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}$. Тогда $\operatorname{tr} A = 1$, $\operatorname{tr} B = 2\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

$\operatorname{tr} AB = t + 2\cos\frac{8\pi}{15}$. В этом случае свободный член полинома $\operatorname{tr} R(A, B)$ равен $2\cos\frac{5K+3L}{15}\pi$, где $K = k_1 + \ldots + k_s$, $L = l_1 + \ldots + l_s$. Имеем равенство $\operatorname{tr} R(A, B) = g(t + 2\cos\frac{8\pi}{15})$ и, сравнивая свободные коэффициенты в его левой и правой части, получаем

$$(-1)^s \left(2\cos\frac{\pi}{5}\right)^{h-b} \left(2\cos\frac{7\pi}{15}\right)^a \left(2\cos\frac{\pi}{15}\right)^b \left(2\cos\frac{2\pi}{15}\right)^c \left(2\cos\frac{\pi}{30}2\cos\frac{13\pi}{30}\right)^d = 2\cos\frac{5K+3L}{15}\pi. \quad (5)$$

Заменив матрицу B на матрицу $B_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-3} & 0 \\ t & \varepsilon^3 \end{pmatrix}$, получим $\operatorname{tr} R(A, B_1) = g(t + 2\cos\frac{2\pi}{15})$. После сравнения свободных коэффициентов получим

$$\left(2\cos\frac{\pi}{5}\right)^{h-b} \left(2\cos\frac{2\pi}{15}\right)^a \left(2\cos\frac{4\pi}{15}\right)^b \left(2\cos\frac{7\pi}{15}\right)^c \left(2\cos\frac{7\pi}{30}2\cos\frac{11\pi}{30}\right)^d = 2\cos\frac{5K-3L}{15}\pi. \quad (6)$$

Подействуем на уравнение (5) автоморфизмом Фробениуса $\varphi : \varepsilon \to \varepsilon^{13}$ поля $\mathbb{Q}(\varepsilon)$, где ε – примитивный корень из единицы степени 30:

$$(-1)^{s+h} \left(2\cos\frac{\pi}{5}\right)^{b-h} \left(2\cos\frac{\pi}{15}\right)^a \left(2\cos\frac{2\pi}{15}\right)^b \left(2\cos\frac{4\pi}{15}\right)^c \left(2\cos\frac{11\pi}{30}2\cos\frac{13\pi}{30}\right)^d = 2\cos\frac{13(5K+3L)}{15}\pi. \quad (7)$$

Для того чтобы $g(z)$ являлся полиномом Фрике элемента R, необходимо, чтобы были верны равенства (5) – (7). Перемножив уравнения (5) и (6), получим

$$\begin{gathered}(-1)^s \left(2\cos\frac{\pi}{5}\right)^{2(h-b)} \left(2\cos\frac{2\pi}{15}2\cos\frac{7\pi}{15}\right)^{a+c} \left(2\cos\frac{\pi}{15}2\cos\frac{4\pi}{15}\right)^b \times \\ \times \left(2\cos\frac{\pi}{30}2\cos\frac{7\pi}{30}2\cos\frac{11\pi}{30}2\cos\frac{13\pi}{30}\right)^d = 2\cos\frac{5K+3L}{15}\pi \cdot 2\cos\frac{5K-3L}{15}\pi.\end{gathered} \quad (8)$$

Несложно доказать следующие тригонометрические равенства:

$$\begin{gathered}2\cos\frac{2\pi}{15}2\cos\frac{7\pi}{15} = \alpha^{-2};\ 2\cos\frac{\pi}{15}2\cos\frac{4\pi}{15} = \alpha^2;\ 2\cos\frac{7\pi}{30}2\cos\frac{13\pi}{30} = \alpha^{-1};\ 2\cos\frac{\pi}{30}2\cos\frac{11\pi}{30} = \alpha; \\ 2\cos\frac{\pi}{15}2\cos\frac{\pi}{30}2\cos\frac{13\pi}{30} = \alpha;\ 2\cos\frac{4\pi}{15}2\cos\frac{7\pi}{30}2\cos\frac{11\pi}{30} = \alpha;\ 2\cos\frac{2\pi}{15}2\cos\frac{11\pi}{30}2\cos\frac{13\pi}{30} = \alpha^{-1}.\end{gathered} \quad (9)$$

С учетом равенств (9) после преобразований равенство (8) примет вид

$$(-1)^s \alpha^{2(h-a-c)} = 2\cos\frac{2K}{3}\pi + 2\cos\frac{2L}{5}\pi. \quad (10)$$

Выражение $2\cos\frac{2K}{3}\pi + 2\cos\frac{2L}{5}\pi$ может принимать значения 4, 1, $\pm\alpha^{\pm 2}$.

Рассмотрим случай четного s. Из (10) следует, что $\alpha^{2(h-a-c)} \in \left\{1, \alpha^2, \alpha^{-2}\right\}$. Значит, $h \in \{a+c, a+c-1, a+c+1\}$. Пусть $h = a + c$. В этом случае равенство (10) возможно лишь в случае $L \equiv 0 \pmod 5$ и $K \not\equiv 0 \pmod 3$. Из (6) следует, что $2\cos\frac{5K-3L}{15}\pi > 0$. Учитывая все условия, получим, что $2\cos\frac{5K+3L}{15}\pi = 2\cos\frac{5K-3L}{15}\pi = 2\cos\frac{13(5K+3L)}{15}\pi = 1$. Сделаем в уравнениях (5) – (7) следующую замену: $a = c + t$, $b = d + k$. После преобразований с использованием (9) эти уравнения примут вид

$$\begin{gathered}\left(2\cos\frac{\pi}{5}2\cos\frac{7\pi}{15}\right)^t \left(2\cos\frac{2\pi}{5}2\cos\frac{\pi}{15}\right)^k = \left(2\cos\frac{\pi}{5}2\cos\frac{2\pi}{15}\right)^t \left(2\cos\frac{2\pi}{5}2\cos\frac{4\pi}{15}\right)^k = \\ = \left(2\cos\frac{2\pi}{5}2\cos\frac{\pi}{15}\right)^t \left(2\cos\frac{\pi}{5}2\cos\frac{2\pi}{15}\right)^k = 1.\end{gathered} \quad (11)$$

Покажем, что равенства (11) одновременно выполняются лишь в случае $t=k=0$. Если $t\geq 0,\ k\geq 0,$ то $\left(2\cos\frac{2\pi}{5}2\cos\frac{\pi}{15}\right)^t\geq 1$ и $\left(2\cos\frac{\pi}{5}2\cos\frac{2\pi}{15}\right)^k\geq 1$. Тогда из последнего равенства в (11) следует, что $t=k=0$. Если $t<0$ и $k<0$, то $\left(2\cos\frac{2\pi}{5}2\cos\frac{\pi}{15}\right)^t<1$ и $\left(2\cos\frac{\pi}{5}2\cos\frac{2\pi}{15}\right)^k<1$. Следовательно, последнее равенство в (11) невозможно. Аналогично проверяется, что если $t\geq 0$ и $k<0$ или $t<0$ и $k\geq 0$, то равенство (11) невозможно.

Таким образом, мы имеем $a=c$ и $b=d$. Тогда $h=2a$ и $g(z)$ примет вид $g(z)=\alpha^{2a}\left(z\left(z-\alpha\right)\right)^a\left(\left(z-1\right)\left(z-\alpha^{-1}\right)\right)^{\frac{s}{2}-a}$. Случаи $h=a+c+1$ и $h=a+c-1$ рассматриваются аналогично. Если s нечетно, то доказательство аналогично. Теорема 1 доказана.

Будем говорить, что два циклически редуцированных слова $w(a,b),w_1(a,b)\in\left\langle a,b\mid a^k=b^l=1\right\rangle$ *эквивалентны*, если $w(a,b)$ может быть преобразовано в $w_1(a,b)$ последовательностью преобразований: 1) циклическая перестановка; 2) переход к обратному слову; 3) автоморфизм группы $\left\langle a\mid a^l=1\right\rangle$ или $\left\langle b\mid b^k=1\right\rangle$. Если два слова $w(a,b)$, $w_1(a,b)$ эквивалентны, то будем говорить, что соответствующие обобщенные треугольные группы эквивалентны. Ясно, что эквивалентные группы изоморфны.

Теорема 2. *При $s\leq 8$ с точностью до эквивалентности существует 21 псевдоконечная обобщенная треугольная группа $\Gamma_i=\left\langle a,b\mid a^3=b^5=R_i^2(a,b)=1\right\rangle$ типа (3, 5, 2). Соответствующие слова $R_i(a,b)$ перечислены в таблице.*

$s=1$	$R_1=ab$
$s=2$	$R_2=abab^4,\ \ R_3=aba^2b^3$
$s=3$	$R_4=ababa^2b^4,\ \ R_5=aba^2b^2a^2b^4$
$s=4$	$R_6=abab^3a^2ba^2b^4,\ \ R_7=abab^2a^2ba^2b^4,\ \ R_8=aba^2bab^2a^2b^4,\ \ R_9=abab^3a^2b^2ab^4$
$s=5$	$R_{10}=ababa^2b^3ab^2a^2b^4,\ \ R_{11}=ababa^2b^4a^2bab^4,\ \ R_{12}=abab^2a^2bab^4a^2b^3$
$s=6$	$R_{13}=aba^2bab^3a^2b^3ab^2a^2b^4,\ \ R_{14}=aba^2b^2ab^4a^2b^2ab^4a^2b^3,\ \ R_{15}=abab^2a^2b^4aba^2b^3ab^4$
$s=7$	$R_{16}=ababa^2b^2ab^4a^2bab^3a^2b^4,\ \ R_{17}=ababa^2b^4a^2bab^4ab^2a^2b^3,\ \ R_{18}=abab^2a^2b^4ab^3a^2b^2aba^2b^3$
$s=8$	$R_{19}=ababa^2b^4aba^2ba^2b^4ab^2a^2b^4,\ \ R_{20}=ababa^2b^4ab^2a^2b^4aba^2ba^2b^4,\ \ R_{21}=aba^2bab^2a^2b^4aba^2b^2ab^4a^2b^3$

Псевдоконечные группы из теоремы 2 найдены с использованием теоремы 1 и с помощью компьютерных вычислений с программой Maple.

Теорема 3. *Если группа Γ не является псевдоконечной, то она содержит неабелеву свободную подгруппу и, следовательно, удовлетворяет альтернативе Титса.*

Доказательство. Рассмотрим существенное представление $\rho:\Gamma\to PSL_2(\mathbb{C})$, при котором образ $\rho(\Gamma)$ бесконечный. Группа $\rho(\Gamma)$ не является группой диэдра, так как в ней присутствуют элементы порядка 3 и $\rho(\Gamma)$ неприводима в силу леммы 2. Таким образом, $\rho(\Gamma)$ – неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$.

Теорема 4. *Пусть $\Gamma=\left\langle a,b\middle|a^3=b^5=R^2(a,b)=1\right\rangle$, где $R(a,b)=a^{k_1}b^{l_1}a^{k_2}b^{l_2}\ldots a^{k_s}b^{l_s}$, $1\leq k_i\leq 2$, $1\leq l_i\leq 4$ и $L=(l_1+\cdots+l_s)\vdots 5$. Тогда Г содержит неабелеву свободную подгруппу.*

Доказательство. Рассмотрим эпиморфизм $\varphi:\Gamma\to C_3=\left\langle d\mid d^3=1\right\rangle$, $a\mapsto 1$, $b\mapsto d$. Используя метод Рейдемайстера – Шрайера, находим, что ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ имеет копредставление

$$\operatorname{Ker}\varphi=\left\langle g_1,g_2,g_3,g_4,g_5\mid g_1^3=g_2^3=g_3^3=g_4^3=g_5^3=R_i^2(g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)=1,i=\overline{1,5}\right\rangle.$$

Пусть $F_5=\left\langle g_1,\ldots,g_5\right\rangle$ – свободная группа. В многообразии характеров $X(F_5)$ рассмотрим подмногообразие W, задаваемое уравнениями

$$\tau_{g_i}=1,\ \ \tau_{R_i}=0,\ \ i=\overline{1,5}.$$

Легко убедиться, что $W \neq \varnothing$. В самом деле, известно, что для произвольной обобщенной треугольной группы $T(n,m,l)$ существует существенное представление $\rho: \Gamma \to PSL_2(\mathbb{C})$. Пусть ρ – существенное представление Γ и $\rho(g_i) = [A_i]$. Мы можем выбрать матрицы A_i так, что $\mathrm{tr}A_i = 1$. Тогда, очевидно, $\psi(A_1,\ldots,A_5) \in W$, где ψ определено (1), т. е. W $\neq \varnothing$.

Пусть $W = \bigcup_{i=1}^{r} W_i$ – разложение многообразия W на неприводимые компоненты. Так как $\dim X(F_5) = 12$, а подмногообразие $W \subset X(F_5)$ задается десятью уравнениями и $W \neq \varnothing$, то для любой компоненты W_i выполняется неравенство dim $W_i \geq 2$. Справедлива следующая

Лемма 4. $U_i = X_{irr} \cap W_i \neq \varnothing$.

Доказательство. Предположим, что для некоторого i все точки в W_i соответствуют приводимым представлениям. Тогда для любой точки $p = (A_1,\ldots,A_5) \in \psi^{-1}(W_i)$ группа $\langle A_1,\ldots,A_5 \rangle$ приводима. Без ограничения общности мы можем считать, что $A_1,\ldots,A_5$ – верхние треугольные матрицы. Поскольку A_i имеют порядок 6, то для любого слова $S(A_1,\ldots,A_5)$ его след может принимать лишь конечное число значений, когда p пробегает $\psi^{-1}(W_i)$. Из этого следует, что любая координатная функция τ_h принимает лишь конечное число значений на W_i, т. е. W_i конечно. Это противоречит тому, что dim $W_i \geq 2$. Лемма 4 доказана.

Пусть $pr_i: W_1 \to \mathbb{A}^1$ – проекция на i-ю координатную ось. Так как dim W_1 ≥ 2, то существует такое i, что образ pr_i является плотным по Зарисскому подмножеством в $\mathbb{A}^1$ (пусть для определенности $i = 6$, т. е. мы рассматриваем проекцию на координатную ось $y_{12} = \tau_{g_1 g_2}$). Тогда множество $\mathrm{pr}_i(U_1)$ плотно в $\mathbb{A}^1$ в топологии Зарисского. Выберем трансцендентное число $\beta \in \mathbb{C}$ так, что $\beta \in \mathrm{pr}_i(U_1)$. Пусть $u \in \mathrm{pr}_6^{-1}(\beta) \cap U_1$ и $(A_1,\ldots,A_5) \in \psi^{-1}(u)$. По построению $\mathrm{tr}A_i = 1$, $\mathrm{tr}R_i = 0$. Пусть $G = \langle [A_1],\ldots,[A_5] \rangle$. Тогда G является неэлементарной подгруппой в $PSL_2(\mathbb{C})$, поскольку подгруппа $\langle [A_1],[A_2] \rangle \subset G$ – неэлементарная. Следовательно, G содержит свободную неабелеву подгруппу ранга 2. Далее, по построению, справедливы равенства $[A_i]^3 = [R_i]^2 = 1$, $i=\overline{1,5}$. Следовательно, G является эпиморфным образом $\mathrm{Ker}\,\varphi$. Поэтому $\mathrm{Ker}\,\varphi$ (а также и Γ) содержит неабелеву свободную подгруппу. Это завершает доказательство теоремы 4.

Теорема 5. *Обобщенная треугольная группа* $\Gamma = \langle a,b \mid a^3 = b^5 = R^2(a,b) = 1 \rangle$, *где* $R(a,b) = = a^{k_1} b^{l_1} a^{k_2} b^{l_2} \ldots a^{k_s} b^{l_s}$, $s \leq 8$ *и* s *– четное, удовлетворяет альтернативе Титса.*

Доказательство. В [8] доказано, что если $s \leq 4$, то Γ удовлетворяет альтернативе Титса. Поэтому нам достаточно рассмотреть случаи $s = 6$ и $s = 8$. Из теоремы 3 следует, что нам нужно рассмотреть только псевдоконечные группы, описанные в теореме 2. Из теоремы 4 следует, что группа Γ_{15} содержит неабелеву свободную подгруппу. Следующая лемма завершает доказательство теоремы 5.

Лемма 5. Группы Γ_{13}, $\Gamma_{14}, \Gamma_{19} - \Gamma_{21}$ содержат неабелеву свободную подгруппу.

Доказательство. Рассмотрим циклическую группу $C_3 = \langle c \mid c^3 = 1 \rangle$ и сюръективный гомоморфизм $\varphi: \Gamma \to C_3: a \mapsto c, b \mapsto 1$, где Γ – одна из групп, указанных в лемме. Пусть $T = \mathrm{Ker}\varphi$. Найдем копредставление группы T, используя переписывающий процесс Рейдемайстера – Шрайера: $T = \langle x,y,z \mid x^5 = z^5 = y^5 = R_1^2(x,y) = R_2^2(x,y) = R_3^2(x,y) = 1 \rangle$, где слова R_1, R_2, R_3 получены из R в результате применения переписывающего процесса. Наша цель – построить гомоморфизм $\rho: T \to PSL_2(\mathbb{C})$ с неэлементарным образом. Пусть $F_3(x,y,z)$ – свободная группа. Введем следующие обозначения для характеров Фрике: $\tau_{xy} = y_{12}$, $\tau_{xz} = y_{13}$, $\tau_{yz} = y_{23}$, $\tau_{xyz} = y_{123}$ и положим $\tau_x = \tau_z = \alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\tau_y = \alpha^{-1} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Рассмотрим следующие полиномы: $f_i(y_{12}, y_{13}, y_{23}, y_{123}) = \tau_{R_i}(\alpha, \alpha, \alpha^{-1}, y_{12}, y_{13}, y_{23}, y_{123})$, $i = \overline{1,3}$, $h(y_{12}, y_{13}, y_{23}, y_{123})$, где полином h определен в лемме 1, и приравняем их к нулю. Получим систему уравнений

$$f_1(y_{12}, y_{13}, y_{23}, y_{123}) = f_2(y_{12}, y_{13}, y_{23}, y_{123}) = f_3(y_{12}, y_{13}, y_{23}, y_{123}) = h(y_{12}, y_{13}, y_{23}, y_{123}) = 0. \qquad (12)$$

Лемма 6. *Если система (12) имеет решение* $(y_{12}^0, y_{13}^0, y_{23}^0, y_{123}^0)$ *такое, что* y_{23}^0 *не является корнем полинома* $f_5(y_{23}) = y_{23}(y_{23} - 1)(y_{23}{}^2 - y_{23} - 1)$, *т. е.* $y_{23}^0 \notin \{0, 1, \alpha, -\alpha^{-1}\}$, *то группа* Γ *содержит неабелеву свободную подгруппу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для данного решения $(y_{12}^0, y_{13}^0, y_{23}^0, y_{123}^0)$ в силу леммы 1 существуют матрицы X, Y, Z такие, что $\mathrm{tr}X = \mathrm{tr}Z = \alpha$, $\mathrm{tr}Y = \alpha^{-1}$, $\mathrm{tr}\,XY = y_{12}^0$, $\mathrm{tr}\,XZ = y_{13}^0$, $\mathrm{tr}\,YZ = y_{23}^0$, $\mathrm{tr}\,XYZ = y_{123}^0$. Пусть $H = <[X], [Y], [Z]>$. По построению отображение $\rho : T \to H : x \mapsto [X], y \mapsto [Y], z \mapsto [Z]$ задает гомоморфизм группы T. Рассмотрим теперь подгруппу $G = \langle [Y], [Z] \rangle$ в H. Группа G неприводима в силу (2), так как из условия следует $(y_{23}^0)^2 - y_{23}^0 - 1 \neq 0$. Группа G бесконечна, поскольку $y_{23}^0 \notin \{0, 1\}$ (см. [9, табл. 3]). Очевидно, что G – не группа диэдра. Таким образом, G – неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$, и, следовательно, содержит неабелеву свободную подгруппу. Лемма 6 доказана.

Рассмотрим группу Γ_{13}. В этом случае

$$T = \left\langle x, y, z \,\middle|\, x^5 = z^5 = y^5 = (xzx^3z^3x^2z^4)^2 = (yxy^3x^3y^2x^4)^2 = (zyz^3y^3z^2y^4)^2 = 1 \right\rangle.$$

Система (12) принимает вид

$$\begin{aligned} 2y_{13}^3 - y_{13}^2\left(4 + 2\sqrt{5}\right) + y_{13}\left(5 + 3\sqrt{5}\right) - 3 - \sqrt{5} = 2y_{12}^3 + y_{12}^2\left(1 - \sqrt{5}\right) + 2 + 2\sqrt{5} = \\ = 2y_{23}^3 + y_{23}^2\left(1 + \sqrt{5}\right) + 2 - 2\sqrt{5} = 0. \end{aligned} \qquad (13)$$

Мы не включаем в (13) уравнение $h = 0$, поскольку y_{123} в первые три уравнения не входит; поэтому, найдя из (13) $y_{12}^0, y_{13}^0, y_{23}^0$, мы из уравнения $h = 0$ легко находим y_{123}^0. Так как третий полином в (13) неприводим над $\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)$, то он не имеет общих корней с $f_5(y_{23})$. По лемме 6 Γ_{13} содержит неабелеву свободную подгруппу.

Рассмотрим группу Γ_{14}. Группа T имеет копредставление

$$T = \left\langle x, y, z \,\middle|\, x^5 = z^5 = y^5 = (xz^2x^4z^2x^4z^3)^2 = (yx^2y^4x^2y^4x^3)^2 = (zy^2z^4y^2z^4y^3)^2 = 1 \right\rangle.$$

Система (12) (как и выше, без уравнения $h = 0$) имеет вид

$$2y_{13}^3 - y_{13}^2\left(4 + 2\sqrt{5}\right) + y_{13}\left(5 + 3\sqrt{5}\right) - 3 - \sqrt{5} = 2y_{12}^3 + y_{12}^2\left(1 + \sqrt{5}\right) + \sqrt{5} - 3 = 2y_{23}^3 + y_{23}^2\left(1 - \sqrt{5}\right) - 3 - \sqrt{5} = 0.$$

Третий полином в последней системе делится на неприводимый над $\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)$ полином $f_4 = 2y_{23}{}^2 + 2y_{23} + 1 + \sqrt{5}$. Очевидно, данная система имеет такое решение $(y_{12}^0, y_{13}^0, y_{23}^0)$, что $f_4(y_{23}^0) = 0$, причем $f_5(y_{23}^0) \neq 0$. По лемме 6 Γ_{14} содержит неабелеву свободную подгруппу.

Рассмотрим группу Γ_{19}. Группа T имеет следующее копредставление:

$$T = \left\langle x, y, z \,\middle|\, x^5 = z^5 = y^5 = (xyx^4yxz^4x^2z^4)^2 = (yzy^4zyx^4y^2x^4)^2 = (zxz^4xzy^4z^2y^4)^2 = 1 \right\rangle.$$

Система (12) (без уравнения $h = 0$) имеет вид

$$\begin{aligned} f_1 = \left(2y_{12}^2 + 2y_{12} + \sqrt{5} + 1\right)y_{13}^2 + \left(-2\sqrt{5}y_{12}^2 - 4y_{12}^2 + 2y_{12}y_{23} - 4y_{12} - 2\sqrt{5}y_{12} + 2y_{23} - 4 - 2\sqrt{5}\right)y_{13} + \\ + \left(4 + 2\sqrt{5}\right)y_{12}^2 - y_{12}y_{23}\left(1 + \sqrt{5}\right) + y_{12}\left(7 + \sqrt{5}\right) - y_{23}\left(1 + \sqrt{5}\right) + 4 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 = \left(2y_{23}^2 + 2y_{23} - \sqrt{5} + 1\right)y_{12}^2 + \left(y_{23}^2\left(1 - \sqrt{5}\right) + 2y_{13}y_{23} + y_{23}\left(1 - \sqrt{5}\right) + 2y_{13} + 1 - \sqrt{5}\right)y_{12} - \\ - \left(1 + \sqrt{5}\right)y_{23}{}^2 - y_{13}y_{23}\left(1 + \sqrt{5}\right) - y_{13}\left(1 + \sqrt{5}\right) + 2y_{23} + 2\sqrt{5} + 4 = 0, \end{aligned}$$

$$f_3=\left(2y_{13}^2-y_{13}\left(3+\sqrt{5}\right)+1+\sqrt{5}\right)y_{23}^2+\left(y_{13}^2\left(1+\sqrt{5}\right)+2y_{12}y_{13}-y_{13}\left(2\sqrt{5}+4\right)-y_{12}\left(3+\sqrt{5}\right)+1+\sqrt{5}\right)y_{23}+$$
$$+\left(\sqrt{5}-1\right)y_{13}^2+y_{12}y_{13}\left(\sqrt{5}-1\right)-y_{13}\left(3+\sqrt{5}\right)-\left(1+\sqrt{5}\right)y_{12}+4=0.$$

Лемма 7. *Пусть* $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)$. *Предположим, что базис Гребнера идеала* $I=(f_1,f_2,f_3,h)$ *кольца* $K[y_{12},y_{13},y_{23},y_{123}]$ *содержит полином, который делится на неприводимый полином* $f_4(y_{23})$ *степени больше 2, и что базис Гребнера идеала* $J=(f_1,f_2,f_3,h,f_4)$ *отличен от* $\{1\}$. *Тогда группа* T *(а поэтому и исследуемая группа* Γ*) содержит неабелеву свободную подгруппу.*

Доказательство. По условию леммы система (12) имеет такое решение $(y_{12}^0,y_{13}^0,y_{23}^0,y_{123}^0)$, что $f_4(y_{23}^0)=0$. При этом $f_5(y_{23}^0)\neq 0$ в силу неприводимости $f_4(y_{23})$. Применив лемму 6, получим, что группа Γ содержит неабелеву свободную подгруппу.

Вернемся к группе Γ_{19}. Вычисления на компьютере показывают, что базис Гребнера идеала $I=(f_1,f_2,f_3,h)$ содержит полином, который делится на неприводимый полином $f_4(y_{23})$ 20-й степени, при этом базис Гребнера идеала $J=(f_1,f_2,f_3,h,f_4)$ отличен от $\{1\}$. По лемме 7 группа Γ_{19} содержит неабелеву свободную подгруппу.

Рассмотрим группу Γ_{20}. Группа T имеет копредставление

$$T=\left\langle x,y,z\,\middle|\,x^5=z^5=y^5=(xyx^4y^2x^4yxz^4)^2=(yzy^4z^2y^4zyx^4)^2=(zxz^4x^2z^4xzy^4)^2=1\right\rangle.$$

Система (12) (без уравнения $h=0$) имеет вид

$$f_1=(2y_{23}+2)y_{13}^3+\left(-y_{23}\left(2\sqrt{5}+4\right)+2y_{12}-4-2\sqrt{5}\right)y_{13}^2+\left(y_{23}\left(3\sqrt{5}+5\right)-y_{12}\left(2\sqrt{5}+4\right)+3+3\sqrt{5}\right)y_{13}+$$
$$+\left(4+2\sqrt{5}\right)y_{12}-\left(5+\sqrt{5}\right)y_{23}-1-\sqrt{5},$$
$$f_2=\left(2y_{13}-3-\sqrt{5}\right)y_{12}^3+\left(y_{13}\left(1-\sqrt{5}\right)+2y_{23}+1+\sqrt{5}\right)y_{12}^2+\left(y_{23}\left(1-\sqrt{5}\right)+3+\sqrt{5}\right)y_{12}-\left(1+\sqrt{5}\right)y_{23}-1-\sqrt{5},$$
$$f_3=(2y_{12}+2)y_{23}^3+\left(y_{12}\left(1+\sqrt{5}\right)+2y_{13}+1+\sqrt{5}\right)y_{23}^2+\left(y_{13}\left(\sqrt{5}+1\right)-2\right)y_{23}+\left(\sqrt{5}-1\right)y_{13}-\sqrt{5}-1.$$

Базис Гребнера идеала $I=(f_1,f_2,f_3,h)$ содержит полином, который делится на неприводимый полином $f_4(y_{23})$ 20-й степени, при этом базис Гребнера идеала $J=(f_1,f_2,f_3,h,f_4)$ отличен от $\{1\}$. По лемме 7 группа Γ_{20} содержит неабелеву свободную подгруппу.

Рассмотрим группу Γ_{21}. Группа T имеет копредставление

$$T=\left\langle x,y,z\,\middle|\,x^5=z^5=y^5=(xzx^2z^4xz^2x^4z^3)^2=(yxy^2x^4yx^2y^4x^3)^2=(zyz^2y^4zy^2z^4y^3)^2=1\right\rangle.$$

Система (12) (без уравнения $h=0$) имеет вид

$$f_1=2y_{13}^4+\left(-6-2\sqrt{5}\right)y_{13}^3+\left(9+5\sqrt{5}\right)y_{13}^2+\left(-8-4\sqrt{5}\right)y_{13}+3+\sqrt{5},\ f_2=y_{12}^4+2y_{12}^3+2y_{12}^2+y_{12}-1,$$
$$f_3=y_{23}^4+2y_{23}^3+2y_{23}^2+y_{23}-1,$$

причем полином f_3 неприводим над полем $\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)$. По лемме 6 группа Γ_{21} содержит неабелеву свободную подгруппу.

1. Rosenberger G. // Алгебра и логика. 1989. Т. 28. № 2. С. 227.
2. Majeed A., Masson A.W. // Glasgow Math. J. 1978. Vol. 19. P. 45.
3. Culler M., Shalen P. // Ann. of Math. 1983. Vol. 117. P. 109.
4. Сибирский К.С. // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9. № 1. С. 152.
5. Horowitz R. // Comm. Pure Appl. Math. 1972. Vol. 25. P. 635.
6. Traina C. // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. Vol. 79. P. 369.
7. Беняш-Кривец В.В., Жуковец Я.А. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2009. № 3. С. 68.
8. Levin F., Rosenberger G. // Proceedings of the Ohio State-Denison conference on group theory / Ed. S. Sehgal. Singapore, 1993. P. 206.
9. Vinberg E.B., Kaplinsky Y. // London Math. Soc. Lect. Notes Ser. 2004. Vol. 311. P. 564.

Поступила в редакцию 05.03.10.

Валерий Вацлавович Беняш-Кривец – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей алгебры.

Янина Александровна Жуковец – аспирант кафедры алгебры и геометрии БГПУ им. Максима Танка. Научный руководитель – В.В. Беняш-Кривец.