УДК 517.95

Н.А. ХАТИМЦОВ

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННОЙ ОБЛАСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПЕРАТОРА ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ НЕЛОКАЛЬНОСТИ

The correct solvability in the strong sense of the nonlocal problem for hyperbolic second-order differential-operator equation with variable domain for large values of nonlocal parameter is proved.

Корректность в сильном смысле нелокальной задачи для гиперболического дифференциально-операторного уравнения второго порядка со стационарным оператором изучена в [1]. Корректность нелокальной задачи для таких уравнений с переменной областью определения оператора при малых значениях параметра нелокальности установлена в [2, 3]. В настоящей работе исследуется корректность такой нелокальной задачи при больших значениях параметра нелокальности. Впервые гиперболические дифференциально-операторные уравнения второго порядка с зависящими от времени областями определения были рассмотрены в [4, 5] при локальных начальных условиях.

1. Постановка задачи. На ограниченном интервале $]0,T[$ рассматривается уравнение

$$\mathcal{L}(t)u \equiv d^2u(t)/dt^2 + A(t)u(t) = f(t),\ t\in]0,T[, \tag{1}$$

при нелокальных условиях по времени

$$l_0 u \equiv u(0) - \mu u(T) = \varphi, \quad l_1 u = du(0)/dt - \mu\, du(T)/dt = \psi,\ |\mu| > 1. \tag{2}$$

Здесь $u(t)$, $f(t)$ – абстрактные функции, принимающие значения в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$, μ – комплексный параметр нелокальности и $A(t)$ – линейные неограниченные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A(t))$, удовлетворяющие следующим условиям.

A1. При каждом $t\in[0,T]$ операторы $A(t)$ самосопряжены и положительны в H.

A2. При всех $t\in[0,T]$ существуют ограниченные обратные операторы $A^{-1}(t)$ к операторам $A(t)$, сильно непрерывные по t в H и имеющие в H ограниченную сильную производную $dA^{-1}(t)/dt \in B([0,T],\mathcal{L}(H))$ [6, с. 216, 218], для которой верна оценка

$$\left((dA^{-1}(t)/dt)g, g\right) \le c_1 (A^{-1}(t)g, g)\ \forall g\in H,\ \ c_1 > 0. \tag{3}$$

A3. Существуют банахово пространство V и независящий от t линейный ограниченный оператор $\tilde{A}$ из V в H такие, что при каждом $t \in [0,T]$ верны вложения $D(A(t)) \subset V \subset H$ и $\tilde{A}u = A(t)u \ \ \forall u \in D\big(A(t)\big)$.

A4. При почти всех $t \in]0,T[$ операторы $dA^{-1}(t)/dt$ имеют в H ограниченную сильную производную $d^2 A^{-1}(t)/dt^2 \in L_\infty(]0,T[, \mathcal{L}(H))$, удовлетворяющую неравенству

$$\left|\left((d^2 A^{-1}(t)/dt)g, v\right)\right| \le c_2 |g| \sqrt{\left(A^{-1}(t)v, v\right)} \ \ \forall g, v \in H, \ c_2 > 0. \tag{4}$$

Исследуется корректная разрешимость в сильном смысле нелокальной задачи (1), (2).

2. Выбор пространств и определение сильных решений. Нелокальная задача (1), (2) порождает линейный неограниченный оператор $L \equiv \{\mathcal{L}(t), l_0, l_1\} : E \supset D(L) \to F$ с плотной областью определения $D(L) = \{u \in \mathcal{H} = L_2(]0,T[, H) : u \in D(A(t)),\, t \in [0,T];\ du/dt,\, d^2u/dt^2,\ \ A(t)u \in \mathcal{H}\}$. Пространством сильных решений этой задачи будет банахово пространство E – замыкание множества гладких решений $D(L)$ по норме

$$\| u \|_E = \frac{|\mu|^2 - 1}{|\mu|^2 + 1}\left[\sup_{0<t<T}\left(\left|\frac{du(t)}{dt}\right|^2 + \left|A^{1/2}(t)u(t)\right|^2\right)\right]^{1/2}.$$

Пространством правых частей $\mathcal{F} = \{f(t), \varphi, \psi\}$ задачи (1), (2) будет гильбертово пространство $F = \mathcal{H} \times W(0) \times H$ с эрмитовой нормой $\|\mathcal{F}\|_F = \left[\|f\|_0^2 + (4T)^{-1}(|\varphi|_{(0)}^2 + |\psi|^2)\right]^{1/2}$, $\|f\|_0^2 = \int_0^T |f(t)|^2\, dt$, где гильбертовы пространства $W(t)$ – области определения $D(A^{1/2}(t))$ квадратного корня $A^{1/2}(t)$ операторов $A(t)$ с эрмитовыми нормами $|v|_{(t)} = \left|A^{1/2}(t)v\right|$, $t \in [0,T]$.

Линейный оператор L допускает сильное замыкание $\overline{L}$ в произведении $E \times F$.

Лемма 1. *Если выполняется условие A1 и множество $D(L)$ плотно в $\mathcal{H}$, то для оператора L существует сильное замыкание $\overline{L} : E \supset D(\overline{L}) \to F$.*

Можно показать, что если операторы $A(t)$ самосопряжены в H и ограниченные сильные производные $d^i A^{-1}(t) / dt^i \in L_\infty(]0,T[, \mathcal{L}(H))$, $i = \overline{0,2}$, то множество $D(L)$ плотно в $\mathcal{H}$.

Функцию $u \in E$ относим к области определения $D(\overline{L})$ замыкания $\overline{L}$, если существуют последовательность $u_n \in D(L)$ и элементы такие, что $\|u_n - u\|_E \to 0$ и $\|Lu_n - \mathcal{F}\|_F \to 0$, когда $n \to \infty$. В этом случае полагаем $\overline{L}u = \lim_{n\to\infty} Lu_n = \mathcal{F}$. Решения $u \in D(\overline{L})$ операторного уравнения $\overline{L}u = \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in F$, называются *сильными решениями* нелокальной задачи (1), (2).

3. Априорная оценка сильных решений. Выведем априорную оценку сильных решений задачи (1), (2), из которой будет следовать единственность и непрерывная зависимость этих решений от f, φ, ψ.

Теорема 1. *Если выполняются предположения леммы 1, условия A2, A3 и верно вложение $D(A(T)) \subset D(A(0))$, то для всех $T < (\gamma c_1)^{-1}$ и $|\mu|^2 > (1 + \gamma c_1 T) / (1 - \gamma c_1 T)$, где $\gamma \in]1,2]$, справедливо неравенство*

$$\|u\|_E^2 \le \gamma^2 T(\gamma - 1)^{-1} \|Lu\|_F^2 \ \ \forall u \in D(\overline{L}). \tag{5}$$

Доказательство проведем с помощью сглаживающих операторов $A_\varepsilon^{-1}(t) = (I + \varepsilon A(t))^{-1}$, $\varepsilon > 0$. Из [4] известны их основные свойства:

1. Равномерно по t при $\varepsilon \to 0$ норма $\left|A_\varepsilon^{-1}(t)g - g\right| \to 0 \ \ \forall g \in H$.

2. При всех $t \in]0,T[$ в H существует сильная производная $dA_\varepsilon^{-1}(t) / dt \in L_\infty(]0,T[, \mathcal{L}(H))$ и верно равенство

$$\frac{d(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t))}{dt} = -A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)\frac{dA^{-1}(t)}{dt}A(t)A_\varepsilon^{-1}(t). \tag{6}$$

Интегрируем по частям один раз по t от 0 до τ, $\tau\in]0,T]$, пользуемся равенством (6), переходим к пределу при $\varepsilon\to 0$ и для $\forall u\in D(L)$ находим равенство

$$\left(A(t)u,u\right)\Big|_{t=\tau}=\left(A(t)u,u\right)\Big|_{t=0}+2\operatorname{Re}\int_0^\tau\left(A(t)u,\frac{du}{dt}\right)dt-\int_0^\tau\left(\frac{dA^{-1}(t)}{dt}A(t)u,\,A(t)u\right)dt. \tag{7}$$

Интегрируя по частям один раз по t от 0 до τ, для $\forall u\in D(L)$ выводим равенство

$$\left|\frac{du}{dt}\right|^2\Bigg|_{t=\tau}=2\operatorname{Re}\int_0^\tau\left(\frac{d^2u}{dt^2},\frac{du}{dt}\right)dt+\left|\frac{du}{dt}\right|^2\Bigg|_{t=0},\ 0<\tau\le T. \tag{8}$$

Складываем равенства (7) и (8) и приходим к тождеству

$$\begin{gathered}\left(\left|\frac{du}{dt}\right|^2+\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\right)\Bigg|_{t=\tau}=2\operatorname{Re}\int_0^\tau\left(\mathcal{L}(t)u,\frac{du}{dt}\right)dt-\int_0^\tau\left(\frac{dA^{-1}(t)}{dt}A(t)u,\,A(t)u\right)dt+\\+\left(\left|\frac{du}{dt}\right|^2+\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\right)\Bigg|_{t=0}\quad\forall u\in D(L).\end{gathered} \tag{9}$$

Аналогичными рассуждениями для интервала $[\tau,T]$ вместо интервала $[0,\tau]$ выводим тождество, умножаем его на $(1+|\mu|^2)/2$ и получаем тождество

$$\begin{gathered}-\frac{1+|\mu|^2}{2}\left(\left|\frac{du}{dt}\right|^2+\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\right)\Bigg|_{t=\tau}=\frac{1+|\mu|^2}{2}\Bigg[2\operatorname{Re}\int_\tau^T\left(\mathcal{L}(t)u,\frac{du}{dt}\right)dt-\int_\tau^T\left(\frac{dA^{-1}(t)}{dt}A(t)u,\,A(t)u\right)dt-\\-\left(\left|\frac{du}{dt}\right|^2+\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\right)\Bigg|_{t=T}\Bigg]\forall u\in D(L).\end{gathered} \tag{10}$$

Складываем тождества (9) и (10), полученное тождество умножаем на -1, пользуемся оценкой (3), проводим элементарные оценки и $\forall\tau\in]0,T]$ имеем неравенство

$$\begin{gathered}\frac{|\mu|^2-1}{2}\left(\left|\frac{du}{dt}\right|^2+\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\right)\Bigg|_{t=\tau}\le\frac{|\mu|^2+1}{2}\left[2\int_0^T\left|\left(\mathcal{L}(t)u,\frac{du}{dt}\right)\right|dt+c_1\left\|A^{1/2}(t)u\right\|_0^2\right]+\\+\frac{|\mu|^2+1}{2}\left(\left|\frac{du}{dt}\right|^2+\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\right)\Bigg|_{t=T}-\left(\left|\frac{du}{dt}\right|^2+\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\right)\Bigg|_{t=0}.\end{gathered} \tag{11}$$

Лемма 2. *Пусть для некоторых функций $g\in H$ выполняется равенство $g|_{t=0}-\mu g|_{t=T}=\varphi$. Если для оператора $A(t)$ выполняются условия A1 и A3 и верно вложение $D(A(T))\subset D(A(0))$, то для $|\mu|^2>1$ справедливы оценки*

$$(|\mu|^2+1)|g(T)|^2-2|g(0)|^2\le 2(|\mu|^2+1)(|\mu|^2-1)^{-1}|\psi|^2\ \forall g\in\mathcal{H}, \tag{12}$$

$$(|\mu|^2+1)|g(T)|^2_{(T)}-2|g(0)|^2_{(0)}\le 2(|\mu|^2+1)(|\mu|^2-1)^{-1}|\varphi|^2_{(0)}\ \forall g\in L_2(]0,T[,D(A(t))). \tag{13}$$

Доказательство оценки (12) приведено в [1]. Докажем оценку (13). В силу условий A1 и A3, равенства $g(T)=(g(0)-\varphi)/\mu$ и вложения $D(A(T))\subset D(A(0))$ выводим неравенство

$$\begin{gathered}|\mu|^2\left|A^{1/2}(T)g(T)\right|^2=|\mu|^2\,(A(T)g(T),g(T))=|\mu|^2\,(\tilde{A}g(T),g(T))=\\=|\mu|^2\,(\tilde{A}g(0)-\tilde{A}\varphi,g(0)-\varphi)=\left[\left|A^{1/2}(0)\varphi\right|^2-2\operatorname{Re}(A^{1/2}(0)\varphi,\,A^{1/2}(0)g(0))+\left|A^{1/2}(0)g(0)\right|^2\right]\le\\\le(\varepsilon+1)\left|A^{1/2}(0)g(0)\right|^2+(\varepsilon^{-1}+1)\left|A^{1/2}(0)\varphi\right|^2\ \forall\varepsilon>0.\end{gathered}$$

Здесь полагаем $\varepsilon=(|\mu|^2-1)/(|\mu|^2+1)$ и имеем оценку (13). Лемма 2 доказана.

В правой части неравенства (11) применяем оценки (12) и (13) леммы 2, результат делим на $(1+|\mu|^2)/2$ и для $\forall\delta>0$ получаем соотношение

$$\frac{|\mu|^2-1}{|\mu|^2+1}\left(\left|\frac{du}{dt}\right|^2+\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\right)\Bigg|_{t=\tau}\le\delta^{-1}\left\|\mathcal{L}(t)u\right\|_0^2+\delta\left\|\frac{du}{dt}\right\|_0^2+c_1\left\|A^{1/2}(t)u\right\|_0^2+\frac{2}{|\mu|^2-1}\left(\left|l_0u\right|_{(0)}^2+\left|l_1u\right|^2\right).$$

Здесь полагаем $\delta=\delta_0=(|\mu|^2-1)/(\gamma T(|\mu|^2+1))$ и имеем неравенство

$$\gamma T\delta_0\left(\left|\frac{du}{dt}\right|^2+\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\right)\Bigg|_{t=\tau}\le\delta_0^{-1}\left\|Lu\right\|_F^2+\delta_0\left(\left\|\frac{du}{dt}\right\|_0^2+\left\|A^{1/2}(t)u\right\|_0^2\right),\qquad(14)$$

так как $c_1\le\delta_0$ ввиду предположений теоремы 1 на μ и T. Интегрируем неравенство (14) по τ от 0 до T и при всех $\gamma>1$ приходим к оценке

$$\delta_0\left(\left\|\frac{du}{dt}\right\|_0^2+\left\|A^{1/2}(t)u\right\|_0^2\right)\le\frac{\delta_0^{-1}}{\gamma-1}\left\|Lu\right\|_F^2.\qquad(15)$$

В неравенстве (14) берем точную верхнюю грань по всем $\tau\in]0,T[$, в правой части пользуемся оценкой (15) и получаем неравенство $\delta_0T(|\mu|^2+1)^2(|\mu|^2-1)^{-2}\left\|u\right\|_E^2\le(\delta_0(\gamma-1))^{-1}\left\|Lu\right\|_F^2$, $u\in D(L)$. Это неравенство для гладких решений $u\in D(L)$ распространяется предельным переходом на все сильные решения $u\in D(\overline{L})$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. В предположениях теоремы 1 верно $R(\overline{L})=\overline{R(L)}$, где $R(\overline{L})$ – множество значений оператора $\overline{L}$, а $\overline{R(L)}$ – замыкание в F множества значений $R(L)$ оператора L.

4. Теорема существования. Согласно следствию 1 для всюду разрешимости в сильном смысле нелокальной задачи (1), (2) достаточно доказать плотность множества значений $R(L)$ оператора L в пространстве F.

Теорема 2. *Пусть выполняются предположения теоремы 1, условие A4 и справедливо равенство* $(dA^{-1}(0)/dt)g=(dA^{-1}(T)/dt)g$ $\forall g\in H$, *тогда при всех значениях* $T<(\gamma c_1)^{-1}$ *и* $|\mu|^2>\max\{(1+\gamma c_1T)(1-\gamma c_1T)^{-1},\ ((3c_1+c_2)T+\sqrt{(3c_1+c_2)^2T^2+4})/2\}$ *множество значений* $R(L)$ *оператора* L *плотно в пространстве* F.

Доказательство проведем от противного. Итак, пусть некоторый ненулевой элемент $V=\{v,\varphi_1,\psi_1\}\in F$ ортогонален множеству $R(L)$, т. е.

$$\int_0^T(\mathcal{L}(t)u,v)dt+(4T)^{-1}\left((A^{1/2}(0)l_0u,\ A^{1/2}(0)\varphi_1)+(l_1u,\psi_1)\right)=0\ \forall u\in D(L).\qquad(16)$$

Пусть здесь $u\in D_0(L)=\{u\in D(L):l_0u=l_1u=0\}$, тогда имеем

$$\int_0^T(\mathcal{L}(t)u,v)dt=0\ \forall u\in D_0(L).\qquad(17)$$

Лемма 3. *Пусть выполняются предположения теоремы 2. Если для некоторой функции* $v\in\mathcal{H}$ *выполняется тождество (17), то* $v=0$.

Доказательство проведем в три этапа.

1. Для каждого значения параметра τ, $0\le\tau<T$, в тождестве (17) можно положить $u=A^{-1}(t)h(t)$ $\forall h\in M_{[\tau,T]}^{\mu}=\{h\in\mathcal{H}:dh/dt,\ d^2h/dt^2\in\mathcal{H},\quad h(t)=h(\tau),\quad t\in[0,\tau[,\quad h(\tau)-\mu h(T)=0,\quad dh(\tau)/dt-\mu\,dh(T)/dt=0\}$. Такие функции u удовлетворяют однородным нелокальным условиям (2). Из условия A3 в силу вложения $D(A(T))\subset D(A(0))$ имеем равенства $A(0)u=\tilde{A}u=A(T)u$ и $u=A^{-1}(0)A(T)u$ $\forall u\in D(A(T))$. Последнее равенство позволяет найти первое нелокальное условие $l_0u=$ $=A^{-1}(0)h(0)-\mu A^{-1}(T)h(T)=A^{-1}(0)A(T)A^{-1}(T)h(0)-\mu A(T)h(T)=A^{-1}(T)[h(0)-\mu h(T)]=0\quad\forall h\in M_{[\tau,T]}^{\mu}$. С помощью этого же равенства $u=A^{-1}(0)A(T)u$ и равенства $(dA^{-1}(0)/dt)g=(dA^{-1}(T)/dt)g$ $\forall g\in H$ из теоремы 2 аналогично вычисляется второе нелокальное условие $l_1u=A^{-1}(0)\,dh(0)/dt-\mu A^{-1}(T)\,dh(T)/dt+$

$$+\left(dA^{-1}(0)/dt\right)h(0)-\mu\left(dA^{-1}(T)/dt\right)h(T) \ = \ A^{-1}(T)[dh(0)/dt-\mu\, dh(T)/dt] \ + \ (dA^{-1}(0)/dt)[h(0)-\mu\, h(T)]+$$
$$+\mu\,(dA^{-1}(0)/dt)\,h(T)-\mu\,(dA^{-1}(0)/dt)h(T)=0 \quad \forall h\in M^{\mu}_{[\tau,T]}.$$

Пусть функция $w\in\mathcal{H}$ является решением следующей задачи:

$$dw/dt=v,\ t\in]\tau,T[,\qquad w(\tau)-\mu w(T)=0 \tag{18}$$

и $w(t)=w(\tau),\ \ t\in[0,\tau]$. В результате от тождества (17) приходим к тождеству

$$\int_\tau^T\left(\frac{d^2h}{dt^2},A^{-1}(t)\frac{dw}{dt}\right)dt=-\int_\tau^T\left(h,\frac{dw}{dt}\right)dt-\int_\tau^T\Phi(h,w)dt \qquad \forall h\in M^{\mu}_{[\tau,T]}, \tag{19}$$

где $\Phi(h,w)=((d^2A^{-1}(t)/dt^2)h+2(dA^{-1}(t)/dt)(dh/dt),dw/dt)$.

Стандартным образом доказывается следующая лемма.

Лемма 4. *Сопряженным оператором к оператору* $D=d/dt:\mathcal{H}_\tau\supset\mathcal{D}(D)\to\mathcal{H}_\tau$ *с областью определения* $\mathcal{D}(D)=\{\tilde h\in\mathcal{H}_\tau=L_2(]\tau,T[,H):d\tilde h/dt\in\mathcal{H}_\tau,\ \tilde h(\tau)-\mu\tilde h(T)=0\}$ *является оператор* $D^*=-d/dt:\mathcal{H}_\tau\to\mathcal{H}_\tau$ *с областью определения* $\mathcal{D}^*=\{\tilde v\in\mathcal{H}_\tau: d\tilde v/dt\in\mathcal{H}_\tau,\ \mu\tilde v(\tau)-\tilde v(T)=0\}$.

Так как правая часть тождества (19) благодаря представлению $h(t)=$ $=\left(1-\mu\right)^{-1}\left(\int_\tau^t(dh(s)/ds)ds+\mu\int_t^T(dh(s)/ds)ds\right)$ функций $h\in M^{\mu}_{[\tau,T]}$ оценивается сверху нормой производной dh/dt в $\mathcal{H}_\tau$, то в силу леммы 4 функция $A^{-1}(t)(dw/dt)$ дифференцируема по t в $\mathcal{H}_\tau$ и удовлетворяет условию

$$\mu A^{-1}(\tau)\frac{dw(\tau)}{dt}-A^{-1}(T)\frac{dw(T)}{dt}=0. \tag{20}$$

В левой части тождества (19) интегрируем по частям один раз по *t*, результат распространяем предельным переходом на все функции $h\in\mathcal{H}_\tau$ такие, что $dh/dt\in\mathcal{H}_\tau,\ \ h(\tau)-\mu\, h(T)=0,$ полагаем $h=w$, берем удвоенную вещественную часть и имеем равенство

$$-2\operatorname{Re}\int_\tau^T\left(\frac{dw}{dt},\frac{d}{dt}\left(A^{-1}(t)\frac{dw}{dt}\right)\right)dt=-2\operatorname{Re}\int_\tau^T\left(w,\frac{dw}{dt}\right)dt-2\operatorname{Re}\int_\tau^T\Phi(w,w)dt. \tag{21}$$

Для одновременного интегрирования по частям один раз по *t* и взятия сопряженного к $A^{-1}(t)$ нам понадобится следующая лемма из [4].

Лемма 5. *Пусть X, Y и Z – банаховы пространства,* $S:X\to Y$ *– линейный ограниченный оператор и* $P:Y\to Z$ *– линейный замкнутый оператор с плотной областью определения. Если область определения произведения* $P\circ S$ *операторов S и P плотна в X, то его сопряженный оператор* $(P\circ S)^*$ *равен слабому замыканию произведения их сопряженных операторов* S^* *и* P^* *соответственно.*

Чтобы применить лемму 5 в гильбертовых пространствах $X=Y=\mathcal{H}_\tau$ и $Z=\mathcal{H}_\tau\times H\times H$ к линейному ограниченному оператору $S=A^{-1}(t):X\to Y$ и к линейному замкнутому оператору $Pg=$ $=\left\{dg/dt,\,g(\tau),-g(T)\right\}:Y\to Z$ с областью определения $D(P)=\left\{g\in\mathcal{H}_\tau:dg/dt\in\mathcal{H}_\tau,\ \mu g(\tau)-g(T)=0\right\}$, найдем сопряженный оператор к оператору *P*.

Лемма 6. *Сопряженным оператором к оператору* $Pg=\left\{dg/dt,\,g(\tau),-g(T)\right\}:\mathcal{H}_\tau\to\mathcal{H}_\tau\times H\times H$ *с областью определения* $D(P)=\left\{g\in\mathcal{H}_\tau:dg/dt\in\mathcal{H}_\tau,\ \mu g(\tau)-g(T)=0\right\}$ *является оператор* $P^*\left(\left\{p(t),\tilde\varphi,\tilde\psi\right\}\right)=$ $=-dp/dt:\mathcal{H}_\tau\times H\times H\to\mathcal{H}_\tau$ *с областью определения* $\mathcal{D}^*=\left\{\left\{p(t),\tilde\varphi,\tilde\psi\right\}\in\mathcal{H}_\tau\times H\times H:dp/dt\in\mathcal{H}_\tau,\right.$ $\left.\tilde\varphi-\mu\tilde\psi=p(\tau)-\mu p(T)\right\}$.

Применяем лемму 5 к операторам S и P в первых трех слагаемых выражения

$$\begin{gathered}J=-\int_\tau^T\left(\frac{dw}{dt},\frac{d}{dt}\left(A^{-1}(t)\frac{dw}{dt}\right)\right)dt-\left(\tilde\varphi,A^{-1}(\tau)\frac{dw(\tau)}{dt}\right)-\left(\tilde\psi,-A^{-1}(T)\frac{dw(T)}{dt}\right)+\\+\left(\tilde\varphi,A^{-1}(\tau)\frac{dw(\tau)}{dt}\right)+\left(\tilde\psi,-A^{-1}(T)\frac{dw(T)}{dt}\right),\ \left\{\frac{dw}{dt},\tilde\varphi,\ \tilde\psi\right\}\in D(P^*)\end{gathered} \tag{22}$$

и получаем выражение

$$J=\int_\tau^T\left(\frac{d}{dt}\left(A^{-1}(t)\frac{dw}{dt}\right),\frac{dw}{dt}\right)dt-\int_\tau^T\left(\frac{dA^{-1}(t)}{dt}\frac{dw}{dt},\frac{dw}{dt}\right)dt+ \\ +\left(\tilde{\varphi},A^{-1}(\tau)\frac{dw}{dt}(\tau)\right)-\left(\tilde{\psi},A^{-1}(T)\frac{dw}{dt}(T)\right), \tag{23}$$

потому что в силу леммы 5 значение сопряженного оператора

$$\left(P\circ S\right)^*\frac{dw}{dt}=\overline{S^*\circ P^*}\frac{dw}{dt}=-A^{-1}(t)\frac{d}{dt}\frac{dw}{dt}=-\frac{d}{dt}\left(A^{-1}(t)\frac{dw}{dt}\right)+\frac{dA^{-1}(t)}{dt}\frac{dw}{dt},$$

так как можно легко показать, что функция dw/dt принадлежит области определения $D((P\circ S)^*)$ сопряженного оператора $(P\circ S)^*$.

Из выражений (22), (23) получаем равенство, в котором применяем нелокальное условие (20) и $\tilde{\varphi}-\mu\tilde{\psi}=p(\tau)-\mu p(T)$ при $p=dw/dt$ из леммы 6, и выводим равенство

$$2\operatorname{Re}J=-\int_\tau^T\left(\frac{dA^{-1}(t)}{dt}\frac{dw}{dt},\frac{dw}{dt}\right)dt+\left(\frac{dw(\tau)}{dt}-\mu\frac{dw(T)}{dt},\,A^{-1}(\tau)\frac{dw(\tau)}{dt}\right). \tag{24}$$

Интегрируя по частям один раз по $t,$ ввиду начального условия из (18) имеем равенство

$$-2\operatorname{Re}\int_\tau^T\left(w,\frac{dw}{dt}\right)dt=-|w|^2\Big|_\tau^T=-\left(|\mu|^{-2}-1\right)|w(\tau)|^2. \tag{25}$$

Из равенств (21), (24) и (25) получаем равенство

$$-\left(\frac{dw}{dt}(\tau)-\mu\frac{dw}{dw}(T),\,A^{-1}(\tau)\frac{dw}{dt}(\tau)\right)+\left(1-|\mu|^{-2}\right)|w(\tau)|^2=\int_\tau^T\Phi_1(w,w)dt, \tag{26}$$

где $\Phi_1(w,w)=3((dA^{-1}(t)/dt)(dw/dt),dw/dt)+2\operatorname{Re}((d^2A^{-1}(t)/dt^2)h,dw/dt).$

Так как из условий A3 и (20) вытекают равенства $dw(\tau)/dt-\mu dw(T)/dt=$ $=\tilde{A}\left[A^{-1}(\tau)dw(\tau)/dt-\mu A^{-1}(T)dw(T)/dt\right]=(1-|\mu|^2)dw(\tau)/dt,$ то равенство (26) принимает вид

$$\left(|\mu|^2-1\right)\left|A^{-1/2}(\tau)\frac{dw(\tau)}{dt}\right|^2+\left(1-|\mu|^{-2}\right)|w(\tau)|^2=\int_\tau^T\Phi_1(w,w)dt. \tag{27}$$

2. Для каждого значения параметра $\tau,\ 0<\tau\le T,$ в тождестве (19) можно положить $u=A^{-1}(t)h(t)$ $\forall h\in M^{\mu}_{[0,\,\tau]}=\{h\in\mathcal{H}: dh/dt,\ d^2h/dt^2\in\mathcal{H},\, h(t)=h(\tau), t\in[\tau,T],\quad h(0)-\mu h(\tau)=0,\quad dh(0)/dt-\mu\, dh(\tau)/dt=0\}.$ Аналогично первому этапу легко показать, что функция $u\in D_0(L).$ Пусть функция $w\in\mathcal{H}$ – решение задачи $dw/dt=v,\ t\in]0,\tau[,\ \ w(0)-\mu w(\tau)=0,\ \ w(t)=w(\tau)\ \ \forall t\in[\tau,T].$ В пункте 1 полагаем $\tau=0$ и $T=\tau$ и аналогично приходим к равенству

$$\left(1-|\mu|^{-2}\right)\left|A^{-1/2}(\tau)\frac{dw(\tau)}{dt}\right|^2+\left(|\mu|^2-1\right)|w(\tau)|^2=\int_0^\tau\Phi_1(w,w)dt. \tag{28}$$

3. Складываем почленно равенства (27) и (28) и получаем равенство

$$\left(|\mu|^2-|\mu|^{-2}\right)\left(\left|A^{-1/2}(\tau)\frac{dw(\tau)}{dt}\right|^2+|w(\tau)|^2\right)=\int_0^T\Phi_1(w,w)dt. \tag{29}$$

В силу неравенств (3), (4) справедлива оценка $\Phi_1(w,w)\le(3c_1+c_2)(\left|A^{-1/2}(t)(dw/dt)\right|^2+|w|^2).$ Пользуемся этой оценкой в равенстве (29), интегрируем полученное неравенство по τ от 0 до T и получаем оценку $(|\mu|^2-|\mu|^{-2}-(3c_1+c_2)T)\int_0^T(\left|A^{-1/2}(t)(dw/dt)\right|^2+|w|^2)dt\le 0.$ Коэффициент перед интегралом для всех T и $\mu,$ указанных в теореме 2, строго положителен, поэтому при почти всех $t\in[0,T]$ функция $dw/dt=0,$ и, следовательно, $v=0$ в $\mathcal{H}.$ Лемма 3 доказана.

По лемме 3 из тождества (19) следует тождество

$$\left(A^{1/2}(0)l_0u,\,A^{1/2}(0)\varphi_1\right)+\left(l_1u,\psi_1\right)=0\ \ \forall u\in D(L). \tag{30}$$

Здесь полагаем $u = t(T-t)^2 A^{-1}(t)h \in D(L)\ \forall h \in H$ и имеем $T^2\left(A^{-1}(0)h, \psi_1\right) = 0\ \forall h \in H.$ Отсюда выводим, что $\psi_1 = 0,$ так как $\overline{D(A(0))} = H.$ Поэтому тождество (30) принимает вид $\left(A^{1/2}(0)l_0 u, A^{1/2}(0)\varphi_1\right) = 0\ \ \forall u \in D(L).$ Здесь берем $u = (T-t)A^{-1}(t)h \in D(L)\ \forall h \in H,$ тогда получаем равенство $\left(h, \varphi_1\right) = 0\ \forall h \in H,$ и, следовательно, $\varphi_1 = 0$ и $V = 0.$ Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Если в уравнении (1) оператор $A(t) = A$ не зависит от *t*, то в теоремах 1 и 2 постоянные $c_1 = c_2 = 0$ и, следовательно, любые значения $T < +\infty,\ |\mu| > 1$ так же, как в [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект № Ф07К-016).

1. Чесалин В.И., Юрчук Н.И. // Весцi АН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 1973. № 6. С. 30.
2. Хатимцов Н.А. // Сборник работ 64-й Научной конференции студентов и аспирантов БГУ, Минск, 15–18 мая 2007 г. Мн., 2007. С. 198.
3. Хатимцов Н.А. // Сборник работ 65-й Научной конференции студентов и аспирантов БГУ: в 3 ч. Мн., 2008. Ч. 2. С. 83.
4. Ломовцев Ф.Е. // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 5. С. 873.
5. Ломовцев Ф.Е. // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45. № 1. С. 34.
6. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М., 1967.

Поступила в редакцию 28.12.09.

Никита Анатольевич Хатимцов – аспирант кафедры уравнений математической физики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений математической физики Ф.Е. Ломовцев.