Пусть $\alpha_j = a \in \mathbb{N}$, $j = \overline{2,r}$. Тогда, следуя [1], $\alpha_1 + a(r-1) = \varkappa_0$, $\alpha_1 > 0$.

Пусть $k = 0$, т.е. рассмотрим вопрос о разрешимости задачи (1) в классе функций $\mathcal{A}_{,,}$. Справедлива следующая

**Теорема.** *Если* $\alpha = p_\alpha/q_\alpha \in \mathbb{Q}_+$, $\beta \in \mathbb{N}$, *то при* $\varkappa_0 > 0$ *задача (1) разрешима в классе функций* $\mathcal{A}_{0,l,r}$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:*

*1) НОД*$(\beta; p_\alpha) = 1$;

*2) НОД*$(a - m_j; p_\alpha) =$ *НОД*$(\beta; p_\alpha) = d \neq 1$, $j = \overline{2,r}$, *где* $a(r-1) < \varkappa_0$.

*В случае разрешимости решение задачи (1) в классе функций* $\mathcal{A}_{0,l,r}$ *имеет вид*

$$\Phi^+(z) = [X^+(z)]^{1/\alpha}\left[\prod_{i=1}^{l_1}(z - z_i^-)\right]^{\beta/\alpha}\{\Psi^+(z) + C\}^{1/\alpha}\prod_{j=1}^{r}(z - t_j)^{\alpha_j/\alpha}, \quad z \in D^+,$$

$$\Phi^-(z) = z^{-l_0}\prod_{i=1}^{l_1}\left(1 - \frac{z_i^-}{z}\right)[X^-(z)]^{1/\beta}\{\Psi^-(z) + C\}^{1/\beta}\prod_{j=1}^{r}\left(1 - \frac{t_j}{z}\right)^{\alpha_j/\beta}, \quad z \in D^-,$$

*где* $\alpha_j = \alpha k_j + \beta l_j + m_j > 0$, $k_j$, $l_j$, $m_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{2,r}$, $t^\varkappa G(t) = X^+(t)/X^-(t)$, *а*

$$\Psi^\pm(z) = \frac{1}{2\pi\iota}\int_L g(\tau)\left(\left[\prod_{i=1}^{l_1}(\tau - z_i^-)\right]^\beta X^+(\tau)\prod_{j=1}^{r}\left(\tau - t_j\right)^{\alpha_j}\right)^{-1}\frac{d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D^\pm.$$

*Константа* $C$ *выбирается исходя из условия* $-C \notin \Psi^+(D^+)\bigcup\Psi^-(D^-)$.

Также получен критерий разрешимости краевой задачи (1) в случае, когда $k \neq 0$.

### Литература


1. Аксентьева Е.П. *О порядках граничных нулей решений степенной задачи Римана* // Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского. 2002. Т. 14. С. 61–71.
2. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* М.: Наука, 1977.; Engl. Transl. – Oxvord; London etc.: Pergamon Press, 1966.
3. Mityushev V.V., Rogosin S.V. *Constructive Methods for Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Analytic Functions: Theory and Applications.* Boca Raton; London; New York; Washington, 1999.


## ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ЗАМКНУТОЙ КРИВОЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ


**Шилин А.П.**

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
a.p.shilin@gmail.com


Пусть $L$ – простая гладкая замкнутая конечная положительно ориентированная кривая в комплексной плоскости. Зададим на этой кривой $H$-непрерывную (т.е. удовлетворяющую условию Гельдера) функцию $f(t)$ и $H$-непрерывно дифференцируемую функцию $g(t)$. Будем искать $H$-непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\varphi(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)^2}-\frac{\varphi'(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)\,d\tau}{\tau-t}+\frac{g'(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-t}-\frac{g(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)^2}=f(t),\quad t\in L. \quad (1)$$

Интегралы, содержащие $(\tau-t)$, понимаются в смысле главного значения по Коши, а с $(\tau-t)^2$ – в смысле конечной части по Адамару.

Обозначим $k$ порядок нуля в точке $z=\infty$ интеграла типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)\,d\tau}{\tau-z}.$$

Пусть этот интеграл имеет также нули порядков $m_j$ в конечных точках соответственно $\zeta_j\in\mathbb{C}\backslash L$, $j=\overline{1,m}$, а его предельные значения на кривой $L$ в нуль не обращаются, $z_0$ – какая-либо точка внутри $L$.

**Теорема.** *Для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно выполнения условий:*

*1)* $\int\limits_L f(\tau)\tau^l\,d\tau=0,\ \ l=\overline{0,k+1}$;

*2)* $\int\limits_L \frac{f(\tau)\,d\tau}{(\tau-\zeta_j)^l}=0,\ \ l=\overline{1,m_j-1}$, *для всех тех* $j$, *для которых* $m_j\geqslant 2$;

*3)* $\operatorname*{res}\limits_{z=\zeta_j}(J_1/J_2^2)=0,\ \ j=\overline{1,m}$, *где* $J_1\equiv\int\limits_L \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau-z},\ \ J_2\equiv\int\limits_L \frac{g(\tau)\,d\tau}{\tau-z}$.

*Если условия 1)–3) выполняются, то решение уравнения (1) содержит две произвольные постоянные* $C_\pm$ *и имеет вид*

$$\varphi(t)=\left(\frac{g(t)}{2}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)\,d\tau}{\tau-t}\right)\left(C_+-2\pi i\int\limits_{z_0}^{t}\frac{J_1}{J_2^2}\,d\zeta\right)+$$

$$+\left(\frac{g(t)}{2}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)\,d\tau}{\tau-t}\right)\left(C_--2\pi i\int\limits_{\infty}^{t}\frac{J_1}{J_2^2}\,d\zeta\right),$$

*где интегралы* $\int_{z_0}^t$ *и* $\int_\infty^t$ *берутся по любым путям, расположенным соответственно внутри и вне кривой* $L$ *и не проходящим через точки* $\zeta_j$, $j=\overline{1,m}$.

Подробности, связанные с решением уравнения (1) и близких, в том числе более сложных уравнений, содержатся в [1, 2].

**Литература**

1. Шилин А.П. *О решении одного интегро-дифференциального уравнения с сингулярным и гиперсингулярным интегралами* // Весці. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2020. Т. 56. № 3. С. 298–309.

2. Шилин А.П. *Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение эйлерова типа* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2020. Т. 56. № 1. С. 17–29.