УДК 517.9

А.И. ЖУК, А.К. ХМЫЗОВ

СИСТЕМЫ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРЯМОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ АЛГЕБР МНЕМОФУНКЦИЙ. СИММЕТРИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

The Cauchy problem for systems of quasidifferential equations with generalized right part is investigated. Associated solution of the initial problem is considered in the direct product of algebras of mnemonic functions.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = \dot{L}(t)\, f(Y(t)), \\ Y(0) = Y_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $T=[0;a]$, $Y:T\to R^p$, $p\in\mathbf{N}$, – неизвестная вектор-функция, $\dot{L}(t)$ – обобщенная производная матричнозначной функции $L(t)=\left(L^{ij}(t)\right)_{i,j=\overline{1,p}}$, $L^{ij}(t)$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации $i,j=\overline{1,p}$, $L(0)=0$, при $t>a$ $L(t)=L(a)$, а $f:R^p\to R^p$ – функция, удовлетворяющая условию Липшица.

Задача (1) содержит произведение обобщенных функций, поэтому не является корректной. При решении задач подобного рода возникает необходимость корректного определения произведения обобщенных функций в общем случае. Существуют различные подходы к решению данной задачи. Например, возможен переход к интегральному уравнению [1], где интеграл понимается в определенном смысле, или к аппроксимации исходного уравнения дифференциальными уравнениями с гладкими коэффициентами [2]. Существует также возможность формализации данной задачи в рамках теории обобщенных функций [3–5].

В данной работе задача (1) исследуется в прямом произведении алгебр новых обобщенных функций, называемых также мнемофункциями. Данный подход связан с вложением рассматриваемой задачи в алгебру мнемофункций и дальнейшим исследованием решений на ассоциированном уровне в этой алгебре. Этот подход позволяет охватить решения, возникающие в результате трактовки задачи (1) с помощью описанных способов. Отметим, что ранее рассматривались одномерный [6] и диагональный [7] случаи.

Задаче (1) поставим в соответствие задачу Коши, записанную на уровне представителей в прямом произведении алгебр мнемофункций [7]:

$$\begin{cases} Y_n(t+h_n)-Y_n(t)=[L_n(t+h_n)-L_n(t)]f_n(Y_n(t)),\\ Y_n(t)\big|_{[0;h_n]}=Y_n^0(t). \end{cases} \tag{2}$$

Предполагаем, что

$$L_n(t)=L(t)*\rho_n(t)=((L^{ij}*\rho_n)(t))_{i,j=\overline{1,p}}=((\int_0^{1\backslash n}L^{ij}(t+s)\rho_n(s)ds))_{i,j=\overline{1,p}},$$

$$\rho_n(t)=n\rho(nt),\ \ \rho\in C^\infty(R),\ \operatorname{supp}\rho(t)\subset[0;1],\ \int_0^1\rho(s)ds=1;$$

$$f_n(t)=((f^i*\overline{\rho}_n)(t_1,...,t_p))_{i=\overline{1,p}}=((\int_0^{1\backslash n}...\int_0^{1\backslash n}f^i(t_1+s_1,...,t_p+s_p),\overline{\rho}_n(s_1,...,s_p)ds_1...ds_p))_{i=\overline{1,p}},$$

$$\overline{\rho}_n(s_1,...,s_p)=n^p\,\overline{\rho}\left(ns_1,...,ns_p\right),\ \ \overline{\rho}\in C^\infty(R^p),\ \ \overline{\rho}(s_1,...,s_p)\ge 0,\ \operatorname{supp}\overline{\rho}\subset\left[0,1\right]^p,$$

$$\int_0^1...\int_0^1\overline{\rho}(s_1,...,s_p)ds_1...ds_p=1.$$

Пусть $0<h_n<...<mh_n\le a$ – разбиение отрезка T и пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка T. Тогда t можно представить в виде $t=\tau_t+m_th_n$, где $\tau_t\in\left[0,h_n\right)$, $m_t\in\mathbf{N}$. Обозначим $t_k=\tau_t+kh_n$, $k=\overline{1,m_t-1}$. Решение системы (2) можно записать в виде

$$Y_n\left(t\right)=Y_{n0}\left(\tau_t\right)+\sum_{k=0}^{m_t-1}\left[L_n\left(t_{k+1}\right)-L_n\left(t_k\right)\right]f_n(Y_n\left(t_k\right)). \tag{3}$$

Под решением задачи (1) в алгебре мнемофункций мы будем понимать предел выражения (3) при $n\to\infty$, $h_n\to 0$, $\forall t\in T$.

Лемма 1 [8]. *Пусть* $w:T\to R$ *и* $g:T\to R$ *– непрерывные справа функции ограниченной вариации,* c, c_1 *– неотрицательные константы. Если* $\forall t\in T$ *имеет место неравенство*

$$0\le w(t)\le c+c_1\int_0^t w(\tau-)d\underset{[0;\tau]}{\operatorname{var}}g(s),$$

то $\forall t \in T$

$$w(t) \le c\exp\{c_1 \operatorname*{var}_{[0;\,t]} g(\tau)\}.$$

Лемма 2 [9]. *Пусть* $\forall n \in \mathbf{N}$ *справедливо неравенство*

$$Z_n \le A + \sum_{k=1}^{n-1} B_k Z_k,$$

где A, B_k, Z_k *– некоторые неотрицательные константы,* $k = \overline{1, n-1}.$ *Тогда верно неравенство*

$$Z_n \le A\exp(\sum_{k=1}^{n-1} B_k).$$

Пусть $Y(t)$ есть решение системы

$$Y(t) = Y_0 + \int_0^t d^c L(s) f(Y(s)) + \sum_{\mu_l \le t} (\varphi_l(\Delta L(\mu_l) f, Y(\mu_l -), 1) - \varphi_l(\Delta L(\mu_l) f, Y(\mu_l -), 0)), \qquad (4)$$

где $\varphi_l(\Delta L(\mu_l) f, Y(\mu_l -), u)$ – вектор-решение вспомогательной системы уравнений

$$\varphi_l(\Delta L(\mu_l) f, Y(\mu_l -), u) = Y(\mu_l -) + \Delta L(\mu_l) \int_0^u f(\varphi_l(\Delta L(\mu_l) f, Y(\mu_l -), s)) ds. \qquad (5)$$

Здесь ${}^c L(t)$ – непрерывная составляющая матричнозначной функции $L(t),$ μ_l – точки разрыва функции $L(t),$ $\Delta L(\mu_l) = L(\mu_l) - L(\mu_l -).$

Существование и единственность системы (4) следует из [2, с. 163–164].

Отметим, что если функция $f : R^p \to R^p$ удовлетворяет условию Липшица с константой $M_1,$ то $\forall s \in R^p$

$$\|f(s)\| \le K(1 + \|s\|),$$

где K зависит от констант M_1 и $\|f(0)\|.$

Приведем теперь некоторые свойства решения системы (5).

Лемма 3. *Пусть* $\varphi(z, y, u) : R^p \times R^p \times [0;1] \to R^p$ *– решение системы*

$$\varphi(z, y, u) = y + \int_0^u z(\varphi(z, y, s)) ds,$$

где $z : R^p \to R^p$ *– функция, удовлетворяющая условию Липшица.*

Тогда $\forall x, y \in R^p, u, v \in [0; 1], v > u:$

1) $\|\varphi(z, y, u)\| \le (K + \|y\|) e^K,$

2) $\|\varphi(z, x, u) - \varphi(z, y, u)\| \le \|x - y\| e^{M_1}.$

Доказательство следует из свойств липшицевости функции z и леммы 2.

Отметим некоторые свойства решения системы (4).

Лемма 4. *Пусть функция* $f : R^p \to R^p$ *удовлетворяет условию Липшица,* $L(t) = \left(L^{ij}(t)\right)_{i,j=\overline{1,p}}$ *– матричнозначная функция ограниченной вариации,* Y *– решение системы интегральных уравнений* (4), Y_n *– решение системы (2). Тогда*

1) $\forall s \in T \quad \exists C_1 > 0$ *такая, что* $\|Y(s)\| \le C_1(1 + \|Y_0\|),$

2) $\forall s_1, s_2 \in T,\ s_1 < s_2\ \exists C_2 > 0$ *такая, что* $\|Y(s_2) - Y(s_1)\| \le C_2(1 + \|Y_0\|) \overset{s_2}{\underset{s_1}{V}} L,$

3) $\left\| \int_0^{t+} dL(s) f(Y(s-)) \right\| \le \int_0^{t+} d \overset{s}{\underset{0}{V}} L \ \|f(Y(s-))\|,$

4) $\forall s \in T \quad \exists C_3 > 0$ *такая, что* $\|Y_n(s)\| \le C_3(1 + \|Y_{n0}(\tau_t)\|).$

Здесь и далее $\overset{b}{\underset{a}{V}} L = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \operatorname{var}_{[a;\,b]} L^{ij}$.

Доказательство леммы 4 проводится стандартными методами с использованием леммы 2, свойств функций ограниченной вариации и липшицевости функции f.

Так как $L^{ij}(t)$ – функция ограниченной вариации, то [10, с. 206]

$$L^{ij}(t) = {}^{c}L^{ij}(t) + {}^{d}L^{ij}(t),$$

где ${}^{c}L^{ij}(t)$ – непрерывная составляющая функции $L^{ij}(t)$, а ${}^{d}L^{ij}(t)$ – разрывная. Соответственно $L(t)$ можно представить в виде

$$L(t) = {}^{c}L(t) + {}^{d}L(t),$$

где ${}^{c}L(t) = \left({}^{c}L^{ij}(t)\right)_{i,j=\overline{1,p}}$, а ${}^{d}L(t) = \left({}^{d}L^{ij}(t)\right)_{i,j=\overline{1,p}}$.

Введем в рассмотрение множество всех точек разрыва функций $L^{ij}(t)$ – $M = \{\mu_k{}^{ij} \mid i, j = \overline{1,p}, k \in \mathbf{N}\}$, перенумеруем его и получим множество $\{\mu_l \mid \mu_l \in M, l \in \mathbf{N}\}$.

Лемма 5. *Пусть* $Y_n(t)$ *и* $Y(t)$ *– решения задач* (2) *и* (4) *соответственно. Тогда для любого* $t \in T$ *верна следующая оценка*:

$$\left\| \sum_{k=0}^{m_t-1} \left({}^{c}L_n(t_{k+1}) - {}^{c}L_n(t_k)\right) f_n(Y_n(t_k)) - \int_0^t d\,{}^{c}L(s) f(Y(s)) \right\| \le \frac{C}{n} \overset{a}{\underset{0}{V}} L + C(1+\|Y_0\|) \max_{\substack{t_1, t_2 \in T \\ |t_1 - t_2| \le 1/n}} \overset{t_2}{\underset{t_1}{V}} {}^{c}L +$$
$$+ C(1+\|Y_0\|) \overset{\tau_t}{\underset{0}{V}} {}^{c}L + C \sum_{k=0}^{m_t-1} \left\| \left({}^{c}L_n(t_{k+1}) - {}^{c}L_n(t_k)\right) \right\| \left\| (Y_n(t_k) - Y(t_k)) \right\|. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть* $L^{ij}(t), i, j = \overline{1,p}$, *– непрерывные справа функции ограниченной вариации,* $f : R^p \to R^p$ *– функция, удовлетворяющая условию Липшица,* $Y_n(t)$ *– решение задачи Коши* (2) *и при* $n \to \infty, h_n \to 0$

$$\sup_{t \in [0,\, h_n)} \|Y_{n0}(t) - Y_0\| \xrightarrow[h_n \to 0]{n \to \infty} 0.$$

Тогда при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ *так, что* $h_n = o\left(1/n\right)$, *для всех* $t \in T$

$$\|Y_n(t) - Y(t)\| \to 0,$$

где $Y(t)$ *– решение системы* (4).

Доказательство. Как уже отмечалось, $L(t)$ – функция ограниченной вариации на отрезке T, поэтому она имеет на этом же отрезке не более чем счетное число точек разрыва и, кроме того, $\sum_{l=1}^{\infty} \left\| \Delta L(\mu_l) \right\| < +\infty$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $\sum_{l=n_0+1}^{\infty} \left\| \Delta L(\mu_l) \right\| < \varepsilon$.

Представим ${}^{d}L(t)$ в виде

$$L^{d}(r) = L^{\le n_0}(r) + L^{> n_0}(r),$$

где

$${}^{d,>n_0}L(t) = \sum_{l=n_0+1}^{\infty} I\{\mu_l \le t\} \Delta L(\mu_l), \quad {}^{d,\le n_0}L(t) = \sum_{l=1}^{N} I\{\mu_l \le t\} \Delta L(\mu_l).$$

Положим также ${}^{c}L_n(t) = ({}^{c}L * \rho)(t)$, ${}^{d}L_n(t) = ({}^{d}L * \rho)(t)$, ${}^{d,\le n_0}L_n(t) = ({}^{d,\le N}L * \rho)(t)$, ${}^{d,>N}L_n(t) = ({}^{d,>N}L * \rho)(t)$.

Тогда

$$\sum_{k=0}^{m_t-1}\left[{}^{d}L_n(t_{k+1})-{}^{d}L_n(t_k)\right]f_n(Y_n(t_k))=\sum_{k=0}^{m_t-1}\left[{}^{d,>n_0}L_n(t_{k+1})-{}^{d,>n_0}L_n(t_k)\right]f_n(Y_n(t_k))+$$

$$+\sum_{k=0}^{m_t-1}\left[{}^{d,\le n_0}L_n(t_{k+1})-{}^{d,\le n_0}L_n(t_k)\right]f_n(Y_n(t_k)).$$

Определим функцию $F_n(z)=\int\limits_z^{1/n}\rho_n(s)ds.$ Тогда $F_n(z)=1$ при $z\le 0$ и $F_n(z)=0$ при $z\ge\frac{1}{n}.$ Далее, используя замену переменных и интегрирование по частям, получим

$$({}^{d,\le n_0}L_n(t_{k+1})-{}^{d,\le n_0}L_n(t_k))=\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}+1/n}d\,{}^{d,\le n_0}L(z)\left(F_n(z-t_{k+1})-F_n(z-t_k)\right).$$

Заметим, что если полуинтервал $\left(t_k,t_{k+1}+1/n\right]$ не содержит точек разрыва функции ${}^{d,\le n_0}L(z),$ то ${}^{d,\le n_0}L_n(t_{k+1})-{}^{d,\le n_0}L_n(t_k)=0.$ Предположим, что ${}^{d,\le n_0}L(z)$ имеет одну точку разрыва μ. Среди всех $k=\overline{0,m_t-1}$ выделим те значения, при которых $\mu\in\left(t_k,t_{k+1}+1/n\right].$ Определим индексы u_1 и r_1 так, что u_1 – наименьший, а r_1 – наибольший из всех индексов, при которых выполняется включение $\mu\in\left(t_k,t_{k+1}+1/n\right].$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{m_t-1}\left({}^{d,\le n_0}L_n(t_{k+1})-{}^{d,\le n_0}L_n(t_k)\right)=\sum_{k=u_1}^{r_1}\Delta^{d,\le n_0}L(\mu)\left(F_n(\mu-t_{k+1})-F_n(\mu-t_k)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{r_1-u_1}\Delta^{d,\le n_0}L(\mu)\left(F_n(\mu-t_{u_1+(k+1)})-F_n(\mu-t_{u_1+k})\right).$$

Зависимость между u_1 и r_1 примет следующий вид: $r_1=u_1+q+1,$ где $q=\left[\frac{1}{nh_n}\right].$ В случае, когда матричнозначная функция ${}^{d,\le n_0}L$ имеет $n_0>1$ точек разрыва, для каждого $l=\overline{1,n_0}$ введем индекс u_l с помощью неравенства $t_{u_l}<\mu_l-1/n\le t_{u_l+1}.$ Если потребовать выполнение неравенства

$$\frac{1}{n}+3h_n\le\min_{0\le l_1\le l_1\le n_0}\left|\mu_{l_1}-\mu_{l_2}\right|,$$

то полуинтервалы $\left(t_{u_l},t_{u_l+q+2}\right]$ и $\left(t_{u_r},t_{u_r+q+2}\right]$ при $l\ne r$ не пересекаются.

Положим далее $\xi_k^{n,l}(t)=F_n(\mu_l-t_{u_l+k}).$ Тогда для каждого $t\in T,$ $n\in N,$ $l\in N$ получим разбиение отрезка $[0,1]$

$$0=\xi_0^{n,l}(t)\le\xi_1^{n,l}(t)\le\ldots\le\xi_{q+2}^{n,l}(t)=1.$$

Имеем

$$\sum_{k=0}^{m_t-1}\left[{}^{d,\le n_0}L_n(t_{k+1})-{}^{d,\le n_0}L_n(t_k)\right]f_n(Y_n(t_k))=\sum_{\mu_l\le t}\sum_{g=0}^{q+1}\Delta^{d,\le n_0}L(\mu_l)f_n(Y_n(t_{u_l+g}))\left(\xi_{g+1}^{n,l}(t)-\xi_g^{n,l}(t)\right).$$

Для каждого $n\in N,$ $l\in N$ зададим рекуррентную последовательность вектор-функций

$$\begin{cases}{}^{n,l}\varphi_{k+1}(wf,y,t)=y+wf({}^{n,l}\varphi_k(wf,y,t))\left(\xi_{k+1}^{n,l}(t)-\xi_k^{n,l}(t)\right)\\ {}^{n,l}\varphi_0(wf,y,t)=y,\end{cases},$$

где ${}^{n,l}\varphi_{k+1}:R^p\times R^p\times[0;1]\to R^p,$ $w\in R^{p\times p},$ $y\in R^p,$ $f:R^p\to R^p,$ удовлетворяющая условию Липшица, $t\in T,$ $k=\overline{0,q+1}.$ Тогда

$${}^{n,l}\varphi_{q+2}(wf,y,t)=y+w\sum_{k=0}^{q+1}f({}^{n,l}\varphi_k(wf,y,t))\left(\xi_{k+1}^{n,l}(t)-\xi_k^{n,l}(t)\right).$$

Далее определим вектор-функцию ${}^{n,\,l}\phi_{wf,\,y}(u,\,t)$ следующим образом:

$$ {}^{n,\,l}\phi_{wf,\,y}(u,t)=\begin{cases}{}^{n,\,l}\varphi_k(wf,\ y,t),\ u\in\left[\xi_k^{n,l}(t),\ \xi_{k+1}^{n,l}(t)\right), & k=\overline{0,\ q+1},\\ {}^{n,\,l}\varphi_{q+2}(wf,\ y,t),\ u=\xi_{q+2}^{n,l}(t)=1.\end{cases} $$

Тогда при $u=\ 1$ имеем, что ${}^{n,\,l}\phi_{wf,\,y}(u,t)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$ {}^{n,l}\ \phi_{wf,\,y}(1,t)=y+w\int\limits_0^1 f({}^{n,l}\phi_{wf,\,y}(s,t))ds. $$

Отметим, что для определенной выше вектор-функции ${}^{n,i}\varphi_k\left(wf,\ y,\ t\right),\ \ \forall\ y\in R^p,\quad t\in T,$ справедливы следующие неравенства:

$$ \left\|{}^{n,i}\varphi_k\left(wf,\ y,\ t\right)-{}^{n,i}\ \varphi_k\left(wf,\ x,\ t\right)\right\|\le\|y-x\|e^{M_1\|w\|}, \tag{7} $$

$$ \left\|{}^{n,i}\varphi_k\left(wf,\ y,\ t\right)\right\|\le(\|y\|+K\|w\|)e^{K\|w\|}. \tag{8} $$

Кроме того, можно показать, что $\forall\ \ \varepsilon>0$ и для достаточно больших n выполняется

$$ \left\|\sum_{k=0}^{m_t-1}\left[{}^dL_n(t_{k+1})-{}^dL_n(t_k)\right]f_n(Y_n(t_k))-\sum_{\mu_l\le t}\left({}^{n,l}\varphi_{p+2}\left(\Delta L(\mu_l)f,\ Y_n\left(t_{u_l}\right),\ t\right)-Y_n\left(t_{u_l}\right)\right)\right\|\le $$

$$ \le C(1+\left\|Y^0{}_n(\tau_t)\right\|)(\sup_{|u-v|\le h_n+\frac{2}{n}}\ \overset{v}{\underset{u}{V}}\ {}^cL+\varepsilon)+\frac{C}{n}. \tag{9} $$

Теперь рассмотрим доказательство теоремы

$$ \|Y_n(t)-Y(t)\|=\left\|Y_{n0}\left(\tau_t\right)-Y_0\right\|+\left\|\sum_{k=0}^{m_t-1}\left[{}^cL_n\left(t_{k+1}\right)-{}^cL_n\left(t_k\right)\right]f_n(Y_n\left(t_k\right))-\int\limits_0^t d^cL(s)f(Y(s))\right\|+ $$

$$ +\left\|\sum_{k=0}^{m_t-1}\left[{}^dL_n\left(t_{k+1}\right)-{}^dL_n\left(t_k\right)\right]f_n(Y_n\left(t_k\right))-\sum_{\mu_l\le t}\varphi(\Delta L(\mu_l)f,Y(\mu_l),1)-\varphi(\Delta L(\mu_l)f,Y(\mu_l),0)\right\|\le $$

$$ \le\left\|Y_{n0}\left(\tau_t\right)-Y_0\right\|+D_1+D_2. $$

Воспользовавшись леммой 5, получим

$$ D_1\le\frac{C}{n}\overset{a}{\underset{0}{V}}L+C\sum_{k=0}^{m_t-1}\left\|\left({}^cL_n(t_{k+1})-{}^cL_n(t_k)\right)\right\|\|(Y_n(t_k)-Y(t_k))\|+C(1+\|Y_0\|)\max_{\substack{t_1,t_2\in T\\|t_1-t_2|\le 1/n}}\overset{t_2}{\underset{t_1}{V}}\ {}^cL+C(1+\|Y_0\|)\overset{\tau_t}{\underset{0}{V}}\ {}^cL. $$

Для оценки D_2 воспользуемся неравенствами (7) – (9), леммами 7, 3, 4 и липшицевостью функции f. Окончательно для D_2 получаем следующее:

$$ D_2\le C(1+\left\|Y^0{}_n(\tau_t)\right\|)(\max_{|u-v|\le h_n+\frac{2}{n}}\ \overset{v}{\underset{u}{V}}\ {}^cL+\varepsilon)+\frac{C}{n}\ +C(1+\left\|Y^0{}_n(\tau_t)\right\|)\varepsilon+C(1+\|Y_0\|)nh_n+ $$

$$ +C\sum_{\mu_l\le t}\left\|\Delta^{d,>N}L(\mu_l)\right\|[\|Y_n(t_{u_l})-Y(t_{u_l})\|]+C(1+\|Y_0\|)(\varepsilon+\sup_{|u-v|\le h_n+\frac{1}{n}}\ \overset{v}{\underset{u}{V}}\ {}^cL). $$

Таким образом,

$$ \|Y_n(t)-Y(t)\|\le\|Y_{n0}(\tau_t)-Y_0\|+\frac{C}{n}+C(1+\|Y_0\|)\max_{\substack{t_1,t_2\in T\\|t_1-t_2|\le\frac{1}{n}}}\overset{t_2}{\underset{t_1}{V}}\ {}^cL+C(1+\|Y_0\|)\overset{\tau_t}{\underset{0}{V}}\ {}^cL+ $$

$$ +C(1+\left\|Y^0{}_n(\tau_t)\right\|)(\max_{|u-v|\le h_n+\frac{2}{n}}\ \overset{v}{\underset{u}{V}}\ {}^cL+\varepsilon)+C(1+\|Y_0\|)nh_n+C(\max_{|u-v|\le h_n+\frac{1}{n}}\overset{v}{\underset{u}{V}}\ {}^cL+\varepsilon)\sum_{k=0}^{m_t-1}\|(Y_n(t_k)-Y(t_k))\|. $$

Применив лемму 2, получим

$$ \|Y_n(t)-Y(t)\|\le(\|Y_{n0}(\tau_t)-Y_0\|+\frac{C}{n}+C(1+\|Y_0\|)\max_{\substack{t_1,t_2\in T\\|t_1-t_2|\le\frac{1}{n}}}\overset{t_2}{\underset{t_1}{V}}\ {}^cL+C(1+\|Y_0\|)\overset{\tau_t}{\underset{0}{V}}\ {}^cL+ $$

$$+C(1+\left\|Y^0{}_n(\tau_t)\right\|)(\max_{|u-v|\le h_n+\frac{2}{n}} \overset{v}{\underset{u}{V}}{}^cL+\varepsilon)+C(1+\left\|Y_0\right\|)nh_n)\exp(C(\max_{|u-v|\le h_n+\frac{1}{n}} \overset{v}{\underset{u}{V}}{}^cL+\varepsilon)).$$

Устремляя $n\to\infty$, $h_n\to 0$ так, что $h_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, учитывая, что ε сколь угодно мало из непрерывности на отрезке T, а значит, и равномерной непрерывности на этом отрезке функции ${}^cL$, получаем требуемое.

1. Das P.S., Sharma R.R. Existence and stability of measure differential equations // Czech. Math. J. 1972. Vol. 22. № 1. P. 145.
2. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы: модели и приложения. М., 1991.
3. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций: секвенциальный подход. М., 1976.
4. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 2. С. 267.
5. Colombeau J.F. New generalized functions and multiplication of distributions. Amsterdam, 1984.
6. Ковальчук А.Н., Новохрост В.Г., Яблонский О.Л. // Изв. вузов. Математика. 2005. № 3. С. 23.
7. Лазакович Н.В., Шлыков Е.В. // Докл. НАН Беларуси. 2007. Т. 51. № 6. С. 21.
8. Groh J. // Illinois journal of Mathematics. 1980. Vol. 24. № 2. P. 244.
9. Yablonski A. // Nonlinear Analysis. 2005. Vol. 63. P. 171.
10. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М., 1957.

Поступила в редакцию 15.01.10.

Анастасия Игоревна Жук – аспирант кафедры функционального анализа. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа О.Л. Яблонский.

Антон Константинович Хмызов – аспирант кафедры функционального анализа. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа Н.В. Лазакович.