# ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПОТОЧЕЧНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

**О. Б. Цехан (Гродно, Беларусь)**

Рассматривается проблема поточечной наблюдаемости [1] для системы:

$$\begin{array}{l} \dot{x}(t) = A_{10}x(t) + A_{11}x(t-h) + A_2y(t), x \in R^{n_1}, y \in R^{n_2}, \\ \mu\dot{y}(t) = A_{30}x(t) + A_{31}x(t-h) + A_4y(t),\ t \in T = [0, t_1], \\ v(t) = C_1x(t) + C_2y(t),\ v \in R^m,\ t \in T,\ n = n_1 + n_2. \end{array} \qquad (1)$$

Здесь $A_{ij}, i = 1,3, j = 0,1, A_k, k = 2,4, C_j, j = 1,2$ — постоянные матрицы подходящих размеров, $h = const > 0$ — запаздывание, $\mu$ — параметр, $\mu \in (0, \mu^0], \mu^0 \ll 1$.

Согласно [2] имеем определяющие уравнения (ОУ) системы наблюдения (1): $X^k_{i+1}(t) = A_{10}X^k_i(t) + A_{11}X^k_i(t-h) + A_2Y^k_i(t)$, $Y^{k+1}_{i+1}(t) = A_{30}X^k_i(t) + A_{31}X^k_i(t-h) + A_4Y^k_i(t)$, $V^k_i(t) = C_1X^k_i(t) + C_2Y^k_i(t), t \in T$, $X^k_i \in \mathrm{R}^{n_1\times n}$, $Y^k_i \in \mathrm{R}^{n_2\times n}$, $v \in \mathrm{R}^{m\times n}$, $X^0_0(0) = \{E_{n_1}, 0\}, X^k_i(t) = 0, t \neq jh \vee k \geq j + i \vee i < 0 \vee k < 0 \vee j < 0$, $Y^k_i(0) = \{0, E_{n_2}\}, Y^k_i(t) = 0,\ t \neq jh \vee k \geq j + i + 1 \vee i < 0 \vee k \leq 0 \vee j < 0$.

**Теорема.** Если $rank \left[ \dfrac{V^{2k}_k(kh)}{k = \overline{0, n-1}} \right] = n$, то система (1) поточечно наблюдаема для всех достаточно малых $\mu > 0$.

**Схема доказательства.** Используя двойственность поточечной наблюдаемости и управляемости [1], критерий поточечной управляемости [3], решения ОУ двойственной к (1) системы управления (аналогичные [4]), связь их с решениями ОУ системы (1), сохранение полноты ранга при невырожденных преобразованиях матрицы доказывается, что при фиксированном $\mu > 0$ система (1) поточечно наблюдаема тогда и только тогда, когда $\exists\kappa(\mu) \in R$: $rank \left[ \dfrac{\sum\limits_{m=0}^{2k} \mu^m \sum\limits_{j=m-k}^{k} \kappa^j(\mu) V^m_k(jh)}{k = \overline{0, n-1}} \right] = n$. Ввиду сохранения полноты ранга матрицы при невырожденных преобразованиях и малых аддитивных возмущениях это (при всех достаточно малых $\mu > 0$ и $\forall\kappa \neq 0$) вытекает из условия теоремы.

**Благодарности.** Работа поддержана Министерством образования Республики Беларусь (ГПНИ “Конвергенция–2025”, задание 1.2.04.4).

### Литература

1. *Марченко В.М.* Некоторые вопросы качественной теории управления линейными стационарными системами с последействием. *Banach Center Publications.* V. 14 (1985), 361–381. DOI: 10.4064/-14-1-361-381.

2. *Копейкина Т.Б., Цехан О.Б.* К теории наблюдаемости линейных сингулярно возмущенных систем. *Весці НАН Беларусі* No 3 (1999), 22–27.

3. *Марченко В.М.* Модальное управление в системах с последействием. *Автоматика и телемеханика.* Выпуск 11 (1988), 73–84.

4. *Копейкина Т.Б., Цехан О.Б.* Исследование наблюдаемости линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем с помощью метода пространства состояний. Мн., 23 с. – *Препр. АНБ. Ин-т математики.* No 16 (539), (1997).

# КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С МЛАДШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ И ОДНОЙ КРАТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

**Е. С. Чеб (Минск, Беларусь)**

В области $Q = (0, \infty) \times (0, l) \subset \mathbb{R}^2$, переменных $(t, x)$ рассмотрим относительно функции $u(t, x)$ линейное нестрого гиперболическое уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами в предположении, что гиперболический оператор уравнения $L$ представим в виде композиции операторов первого порядка

$$Lu \equiv \prod_{i=1}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x} + b\right)u(t,x) = 0, \quad a>0,\ b>0, \quad (t,x)\in Q. \tag{1}$$

К уравнению (1) присоединим начальные условия

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad x\in(0,l), \quad j=0,1,2,3, \tag{2}$$

и граничные условия

$$u(t,0)=\mu_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \mu_2(t), \quad t\in\left(\frac{l}{a},+\infty\right), \tag{3}$$

$$u(t,l)=\nu_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \nu_2(t), \quad t\in(0,+\infty). \tag{4}$$

Условия (3)–(4) выбираются таким образом, чтобы смешанная задача (1)–(4) была корректно поставленной по Адамару. Требуется построить классическое решение $u\in C^{(4)}(\overline{Q})$, $\overline{Q}=[0,\infty)\times[0,l]$, уравнения (1), удовлетворяющее уравнению (1) на $Q$, начальным (2) и граничным условиям (3)–(4). Найти достаточные требования гладкости исходных данных $\varphi_j$ $(j=\overline{0,3})$, $\mu_1,\mu_2,\nu_1,\nu_2$ и условия согласования между ними и уравнением для корректной разрешимости поставленной задачи (1)–(4).

Заменой $u(t,x)=e^{-bt}v(t,x)$ задача (1)–(4) сводится к граничной задаче, рассмотренной в работе [1], в которой получены достаточные условия существования классического решения и условия согласования начальных и граничных функций.

**Литература**

1. *Чеб Е.С., Симинская Е.С.* О классическом решении смешанной задачи для линейного нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка с одной кратной характеристикой. *Прикладная математика & Физика.* Т. 1, № 1 (2020), 11–18.

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ НЕРАЗРЕШИМОСТЬ ПРОБЛЕМЫ ЦЕНТРА И ФОКУСА

**Д. Н. Чергинец (Минск, Беларусь)**

А. Пуанкаре и А.М. Ляпунов показали, что необходимым и достаточным условием центра для систем с центром по линейным членам является обращение в ноль бесконечного числа ляпуновских фокусных величин, которые являются многочленами с целыми коэффициентами от коэффициентов разложения в ряд Тейлора правых частей системы. А.П. Садовским было доказано, что такой же вид имеют условия центра систем с линейной частью в виде ненулевой нильпотентной жордановой клетки. Ю.С. Ильяшенко для систем с особой точкой, не имеющей исключительных направлений, доказал [1] алгебраическую неразрешимость проблемы центра и фокуса, то есть что условия центра уже не определяются многочленами. Н.Б. Медведева доказала, что проблема центра и фокуса аналитически разрешима в любом простейшем монодромном классе [2]. В данной работе найдено уравнение, состоящее из объединения двух простейших монодромных классов, для которого условие центра определяется функцией, неаналитической в точке, принадлежащей области определения параметров.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2a^2xy + y^2(x^2+by^2))y + (a^2x^2+y^2)x}{(2a^2xy + y^2(x^2+by^2))x - (a^2x^2+y^2)y}, \tag{1}$$

$a,b\in\mathbb{R}$. Причем будем считать, что при $a=0$ уравнение (1) имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+by^2)y + x}{(x^2+by^2)x - y}.$$