и инфицированного индивидуумов для SIS-модели (1), соответствующие различным возрастным группам и сезонам протекания заболевания.

Благодарности. Работа выполнена в рамках проекта Ф20Р–083 БРФФИ – РФФИ.

Литература

1. *Кондратьев М.А.* Методы прогнозирования и модели распространения заболеваний. *Компьютерные исследования и моделирование.* Т. **5**, №5 (2013), 863–882.

2. *Nariswaria R., Pudjihastuti H.* Bayesian Forecasting for time Series of count data. *Procedia Computer Science.* **157**, (2019), 427–435.

ON THE NUMERICAL RANGE GENERATING CURVES OF SOME STRUCTURED MATRICES

I. M. Spitkovsky (Abu Dhabi, UAE)

The numerical range $W(A)$ (a.k.a. the field of values, or the Hausdorff set) of an n-by-n matrix A is defined as the image of the unit sphere of $\mathbb{C}^n$ under the mapping $f_A\colon x \mapsto x^*Ax$. It is a compact subset of $\mathbb{C}$, which is also convex due to the celebrated *Toeplitz-Hausdorff theorem*. Moreover, $W(A)$ is the convex hull of a certain algebraic curve $C(A)$ of class n, thus called the *numerical range generating curve* of A [6]. This provides an insight into the *Elliptical range theorem*: for $n = 2$ the numerical range is an elliptical disk (degenerating into the line segment connecting the eigenvalues of A when A is normal).

As n increases, there is more variety in possible shapes of $W(A)$. Surprisingly though, for some classes of matrices $W(A)$ stays elliptical (or ends up being the convex hull of a small, compared to n, number of ellipses). The state of the matter, as of the beginning of the century, has been described in [3]. It became clear later that the phenomenon at hand is caused by $C(A)$ consisting of several components, the "exposed" of them being ellipses.

In this talk, we describe several such classes. It is based on [4, 5, 2, 1], and some work in progress.

Acknowledgment. The work is partially supported by Faculty Research funding from the Division of Science and Mathematics, New York University Abu Dhabi.

References

1. *Bebiano N., Providéncia J., and Spitkovsky I.M. On kippenhahn curves and higher-rank numerical ranges of some matrices*, arXiv:2104.07893 [math.FA] (2021), 1–14.

2. *Bebiano N., Providéncia J., Spitkovsky I.M., and K. Vazquez Kippenhahn curves of some tridiagonal matrices*, arXiv:2011.00849v1 [math.FA] (2020), 1–20, to appear in Filomat.

3. *Brown E. and Spitkovsky I. On matrices with elliptical numerical ranges*, Linear Multilinear Algebra **52** (2004), 177–193.

4. *Geryba T. and Spitkovsky I. On the numerical range of some block matrices with scalar diagonal blocks*, Linear Multilinear Algebra **69** (2021), 772–785.

5. *Geryba T. and Spitkovsky I.M. On some 4-by-4 matrices with bi-elliptical numerical ranges*, Linear Multilinear Algebra **69** (2021), 855–870.

6. *Kippenhahn R. Über den Wertevorrat einer Matrix*, Math. Nachr. **6** (1951), 193–228.

АППРОКСИМАЦИЯ ЛЕТНИКОВА ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ХАРРОДА-ДОМАРА

Т. Д. Субоч, С. В. Рогозин (Минск, Беларусь)

В работе [1] предложено обобщение классической модели экономического роста Харрода-Домара. Данное обобщение учитывает зависимость экономической динамики от эффектов памяти. Уравнение состояния экономической системы имеет вид (см. [1])

$$(D^{\alpha}_{0+}Y)(t) - bY(t) = -bC(t), \tag{1}$$

где $Y(t)$ — величина дохода, $C(t)$ — объем непроизводственного потребления, $b = \dfrac{1}{B}$, B — коэффициент капиталоемкости прироста доходов, связывающий объем инвестиций $I(t)$ и скорость изменения дохода

$$I(t) = B(D^{\alpha}_{0+}Y)(t). \tag{2}$$

В этой модели $(D^{\alpha}_{0+}Y)(t)$ — дробная производная Джрбашяна-Капуто нецелого порядка $\alpha, 0 < \alpha < 2$:

$$(D^{\alpha}_{0+}Y)(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)} \int\limits_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-m}} \tag{3}$$

где $m = 0$, если $0 < \alpha < 1$, и $m = 1$ если $1 < \alpha < 2$.

В докладе обсуждается возможность использования в обобщенной модели аппроксимации Летникова, т.е. замены в уравнении (1) дробной производной (3) на следующее выражение

$$\Delta^{\alpha}(t) = -\sum_{j=0}^{m} \frac{Y^{(j)}(0)t^{m-\alpha}}{\Gamma(j+1-\alpha)} + \tag{4}$$

$$+\frac{Y(t) - \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} Y(t-h) + \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix} Y(t-2h) - \ldots + \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} Y(t-nh)}{h^{\alpha}}.$$

В данной формуле t — момент времени, для которого прогнозируется значение дохода, зависящее от уровня потребления, а также от предыдущих значений дохода в моменты $t-h, t-2h, \ldots, t-nh = 0$ (конечная память).

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, грант Ф20Р–083.

Литература

1. *Тарасов В.Е., Тарасова В.В.* Эффекты памяти в эредитарной модели Харрода-Домара. *Пробл. совр. науки и образ.* Т. 32 (2016), 38–44.

2. *Rogosin S., Dubatovskaya M.* A Survey on Two Prominent Constructions of Fractional Derivatives. *Mathematics.* Vol. 6 (1), 3 (2018).

КРИТЕРИИ ОГРАНИЧЕННОГО ДЕЙСТВИЯ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ В $\mathbb{R}_n$

Н. И. Трусова (Липецк, Россия)

Пусть $D = D^{(m)}_{\alpha} \times D^{(n-m)}_{\overline{\alpha}}$. Частно-интегральным оператором является оператор (см. [1, 2]) $(K^{(m)}_{\alpha}u)(x) = \int_{D^{(m)}_{\alpha}} k_{\alpha}(x;t_{\alpha})u(t_{\alpha}, x_{\overline{\alpha}})dt_{\alpha}$, где α, $\overline{\alpha}$ — мультииндексы, дополняющие друг друга до полного мультииндекса $(1, 2, \ldots, n)$, m — размерность области интегрирования. Этот оператор рассматривается в пространстве функций $C(D^{(n_1)}_{\gamma}; L_p(D^{(n_2)}_{\beta}))$ со смешанной нормой вида

$$\|f\|_{C(D^{(n_1)}_{\gamma};L_p(D^{(n_2)}_{\beta}))} = \sup_{x_{\gamma} \in \overline{D^{(n_1)}_{\gamma}}} \left(\int\limits_{D^{(n_2)}_{\beta}} |f(x_{\gamma}, x_{\beta})|^p \, dx_{\beta} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Здесь мультииндексы γ (размерности n_1) и β (размерности n_2) не совпадают и $n_1 + n_2 = n$.

Критерии ограниченного действия для функций $u = u(t_{\alpha}, x_{\overline{\alpha}})$.

1. По переменным частного интегрирования t_{α} функция u должна иметь конечную L_p–норму.

2. По тем из свободных переменных, по которым применяется норма Лебега (не совпадающих с переменными частного интеграла), функция u должна иметь конечную L_{p^2}–норму.

3. По оставшимся свободным переменным функция u должна иметь конечную sup–норму.

Критерии ограниченного действия для ядер $k_{\alpha} = k_{\alpha}(x;t_{\alpha})$.