где V^n — произвольное гладкое n-мерное многообразие из области $G \subset \mathbb{R}^n$.

Критерий существования у системы (1) полного инварианта (2) выражает

Теорема 1. Интеграл (2) будет абсолютным интегральным инвариантом полного порядка системы в полных дифференциалах (1), если и только если функция $\mu\colon D \to \mathbb{R}$ будет последним множителем Якоби системы (1).

Для обыкновенных дифференциальных систем утверждение, аналогичное теореме 1, установлено в [1, с. 44–46]. Аналогом теоремы Ж. Лиувилля о сохранении величины фазового объема на многомерный случай является

Теорема 2. Пусть вполне разрешимая система уравнений в полных дифференциалах (1) такова, что расходимости ее дифференциальных операторов $\mathfrak{X}_j(t,x) = \partial_{t_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} X_{ij}(t,x)\,\partial_{x_i}$, $j = 1,\ldots,m$, на области D равны нулю. Тогда на решениях этой системы сохраняется величина фазового объема.

Литература

1. *Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Т.II. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел.* М.: Наука (1972).

2. *Картан Э. Интегральные инварианты.* М.–Л.: Гостехиздат (1940).

3. *Козлов В.В.* Интегральные инварианты после Пуанкаре и Картана. *Библиотека «R&C Dynamics».* Т. 1 (1998), 217–260.

4. *Проневич А.Ф.* Необходимые условия и критерии существования линейных интегральных инвариантов многомерных дифференциальных систем. *Дифференциальные уравнения и процессы управления.* No. 3 (2017), 176–194.

5. *Горбузов В.Н. Интегралы дифференциальных систем.* Гродно: ГрГУ(2006).

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЯХ УЧЕТА АВТОНОМНОГО ЭКЗОГЕННОГО НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА

А. Ф. Проневич, Г. А. Хацкевич (Минск, Беларусь)

Рассматривается динамическая производственная функция (ПФ)

$$Y = F(K, L, t), \tag{1}$$

где Y — выпуск продукции, K — капитал, L — труд, t — параметр времени из числового луча $\mathbb{R}_+ = [0;\, +\infty)$, каждое значение которого выражает определенный уровень научно-технического прогресса (НТП), а неотрицательная функция F является дважды непрерывно дифференцируемой на множестве $D = G \times \mathbb{R}_+$, экономическая область $G \subset \mathbb{R}^2_+ = \{(K, L) \in \mathbb{R}^2 \colon K \geq 0,\ L \geq 0\}$.

В научной литературе был предложен ряд подходов к описанию воздействия НТП на объем выпускаемой продукции. Один из самых простых и, в тоже время, самых конструктивных подходов основан на *автономном экзогенном* учете НТП (см., например, [1, с. 83–85; 2; 3]). Суть метода состоит в том, что ПФ (1) представляется в одном из следующих аналитических видов:

1. *Продуктоувеличивающий* НТП $F(K, L, t) = A(t)\widetilde{F}(K, L)$, где строго возрастающая функция $A(t)$ есть индекс НТП, увеличивающий выпуск продукции;

2. *Капиталодобавляющий* НТП $F(K, L, t) = \widetilde{F}(A(t)\,K, L)$;

3. *Трудодобавляющий* НТП $F(K, L, t) = \widetilde{F}(K, B(t)\,L)$;

4. *Капитало- и трудодобавляющий* НТП $F(K, L, t) = \widetilde{F}(A(t)\,K, B(t)\,L)$, где строго возрастающие функции $A(t)$ и $B(t)$ такие, что $A(0) = B(0) = 1$, представляют собой индексы НТП по капиталу и труду, соответственно, а функция $\widetilde{F}$ является дважды непрерывно дифференцируемой на области G.

В данной работе авторами получены аналитические критерии того, что динамическая агрегированная ПФ (1) учитывает автономный экзогенный НТП. Например, имеет место следующее утверждение

Теорема (*критерий капиталодобавляющего НТП*). ПФ (1) учитывает капиталодобавляющий НТП, если, и только если, выполняется тождество

$$\frac{\partial_t F(K,L,t)}{K\,\partial_K F(K,L,t)} = \alpha(t),$$

где α есть некоторая функция, зависящая только от параметра НТП t.

Литература

1. *Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике.* М.: Наука (1979).

2. *Хацкевич Г.А., Проневич А.Ф.* Классификация Сато – Беккмана учета научно-технического прогресса: генезис, обобщение и дополнение. *Журнал Белорусского государственного университета. Экономика* No. 2 (2020), 4–17.

3. *Проневич А.Ф., Хацкевич Г.А.* Научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу: генезис, построение и обобщение. *Белорусский экономический журнал.* No. 3 (2020), 87–105.

РАСШИРЕНИЕ ИНТЕРВАЛА УСТОЙЧИВОСТИ ЯВНЫХ МЕТОДОВ ТИПА АДАМСА

В. И. Репников, Б. В. Фалейчик, А. В. Мойса (Минск, Беларусь)

Стабилизированные явные методы решения жестких начальных задач

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \tag{5}$$

являются хорошей альтернативой неявным методам в случаях, когда спектр матрицы Якоби $\frac{\partial f}{\partial t}$ лежит на вещественной оси. В 1980–1990 гг. были построены одношаговые методы типа Рунге–Кутты–Чебышева (см., например, [1]), которые обладают расширенной вдоль вещественной оси областью устойчивости. В случае первого порядка точности s-стадийный метод такого типа требует s вычислений функции f на один шаг и имеет интервал устойчивости $[-2s^2, 0]$. Это позволяет осуществлять численное интегрирование жестких задач с гораздо большей длиной шага, чем это делают классические явные методы.

В докладе пойдет речь о явных многошаговых методах с расширенным интервалом устойчивости. В частности, справедлива следующая

Теорема. Для любых $k \geq 1$ существует явный k-шаговый метод типа Адамса первого порядка с интервалом устойчивости, равным $[-2k, 0]$. Этот метод имеет вид

$$y_{m+k} = y_{m+k-1} + \frac{\tau}{k^2}(f_m + 2f_{m+1} + \ldots + (2k-1)f_{m+k-1}), \quad m = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

где τ — шаг дискретизации, $y_l \approx y(t_0 + l\tau)$, $f_l = f(t_0 + l\tau, y_l)$.

Доказательство теоремы основано на наложении условия неотрицательности на мнимую часть кривой локуса корней $\mu(e^{i\theta})$ [2, V. 1] при всех $\theta \in (0, \pi)$, и минимизации величины $\mu(-1)$.

В докладе также обсуждаются вопросы демпфирования построенных методов, построение методов более высоких порядков и результаты вычислительных экспериментов.

Благодарности. Работа выполнена в рамках программы ГПНИ “Конвергенция–2020”.

Литература

1. *Lebedev V. How to solve stiff systems of differential equations by explicit methods*, in: Numerical Methods and Applications (1994), CRC Press, (1994), 45–80.

2. *Хайрер Э., Нерсетт Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи.* М.: Мир (1999), – 685 с., ил.