Предположим, что нелинейность $f(t,u)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(t,u)| \leq \mu(t) + \nu(t)\, g(u) \qquad (0 < t \leq T,\ -\infty < u < \infty),$$

где $\mu(t)$ и $\nu(t)$ — некоторые неотрицательные функции со свойствами

$$\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mu(s)\, ds \in C_{1-\alpha}, \quad \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{\alpha-1}\nu(s)\, ds \in C_{1-\alpha},$$

обеспечивающими ограниченность и полную непрерывность оператора $Ax(t) = \dfrac{\xi \cdot t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s))\, ds$ в пространстве $C_{1-\alpha}$ (к отысканию неподвижных точек которого сводится решение задачи), $g(u)$ — некоторая неотрицательная непрерывная на соответствующем отрезке функция.

Устанавливаются условия существования решения задачи (1) с правыми частями, имеющими любой (в рамках непрерывности) характер нелинейности, что обобщает результаты, полученные в [1] и [2].

При этом можно доказать лишь локальную разрешимость, т. е. длина отрезка, на котором доказывается существование решения, зависит от функции в правой части (1), и поэтому глобального решения может и не быть.

Теорема 1. *Пусть для функции $f(t,u)$ выполняется ограничение $|f(t,u)| \leq \mu(t)+\nu(t)\, g(u)$. Тогда задача Коши (1) при любом $\xi \in R$ имеет хотя бы одно решение $x(t) \in C_{1-\alpha}$.*

Доказательство основано на том, что на конечном отрезке для любой непрерывнрой функции может быть найдена степенная мажоранта, а также на доказательстве теоремы [2, т. 1].

Литература

1. *Забрейко, П.П., Пономарева С.В.* О разрешимости задачи Коши для уравнений с дробными производными Римана–Лиувилля // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. Т. 62, №4 (2018), 391–397.

2. *Забрейко, П.П., Пономарева С.В.* О решении задачи Коши с неограниченной правой частью для уравнений дробного порядка // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. Т. 64, №1 (2020), 13–20.

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОЛНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ИНВАРИАНТА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

А. Ф. Проневич (Гродно, Беларусь)

Теория интегральных инвариантов была заложена А. Пуанкаре в мемуаре «О проблеме трех тел и уравнениях динамики» и позднее изложена им в расширенном виде в книге «Новые методы небесной механики» [1]. Дальнейшее развитие этой тематики связано с работами Э. Картана [2]. Современное состояние теории интегральных инвариантов и обзор научной литературы по этому направлению приведены академиком В.В. Козловым в монографии [3].

Данная работа продолжает исследования [4] по изучению существования интегральных инвариантов у систем уравнений в полных дифференциалах [5]

$$dx_i = \sum_{j=1}^{m} X_{ij}(t,x)\, dt_j\,, \quad i = 1,\ldots,n, \quad t \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

и решает задачу о существовании полного интегрального инварианта

$$I_n = \int\limits_{V^n} \mu(t,x)\, \delta x_1 \wedge \ldots \wedge \delta x_n\,, \quad \mu \in C^1(D),\ D \subset \mathbb{R}^{m+n}, \tag{2}$$

где V^n — произвольное гладкое n-мерное многообразие из области $G \subset \mathbb{R}^n$.

Критерий существования у системы (1) полного инварианта (2) выражает

Теорема 1. Интеграл (2) будет абсолютным интегральным инвариантом полного порядка системы в полных дифференциалах (1), если и только если функция $\mu\colon D \to \mathbb{R}$ будет последним множителем Якоби системы (1).

Для обыкновенных дифференциальных систем утверждение, аналогичное теореме 1, установлено в [1, с. 44–46]. Аналогом теоремы Ж. Лиувилля о сохранении величины фазового объема на многомерный случай является

Теорема 2. Пусть вполне разрешимая система уравнений в полных дифференциалах (1) такова, что расходимости ее дифференциальных операторов $\mathfrak{X}_j(t,x) = \partial_{t_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} X_{ij}(t,x)\,\partial_{x_i}$, $j = 1,\ldots,m$, на области D равны нулю. Тогда на решениях этой системы сохраняется величина фазового объема.

Литература

1. *Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Т.II. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел.* М.: Наука (1972).

2. *Картан Э. Интегральные инварианты.* М.–Л.: Гостехиздат (1940).

3. *Козлов В.В.* Интегральные инварианты после Пуанкаре и Картана. *Библиотека «R&C Dynamics».* Т. 1 (1998), 217–260.

4. *Проневич А.Ф.* Необходимые условия и критерии существования линейных интегральных инвариантов многомерных дифференциальных систем. *Дифференциальные уравнения и процессы управления.* No. 3 (2017), 176–194.

5. *Горбузов В.Н. Интегралы дифференциальных систем.* Гродно: ГрГУ(2006).

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЯХ УЧЕТА АВТОНОМНОГО ЭКЗОГЕННОГО НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА

А. Ф. Проневич, Г. А. Хацкевич (Минск, Беларусь)

Рассматривается динамическая производственная функция (ПФ)

$$Y = F(K, L, t), \tag{1}$$

где Y — выпуск продукции, K — капитал, L — труд, t — параметр времени из числового луча $\mathbb{R}_+ = [0;\, +\infty)$, каждое значение которого выражает определенный уровень научно-технического прогресса (НТП), а неотрицательная функция F является дважды непрерывно дифференцируемой на множестве $D = G \times \mathbb{R}_+$, экономическая область $G \subset \mathbb{R}^2_+ = \{(K,L) \in \mathbb{R}^2\colon K \ge 0,\ L \ge 0\}$.

В научной литературе был предложен ряд подходов к описанию воздействия НТП на объем выпускаемой продукции. Один из самых простых и, в тоже время, самых конструктивных подходов основан на *автономном экзогенном* учете НТП (см., например, [1, с. 83–85; 2; 3]). Суть метода состоит в том, что ПФ (1) представляется в одном из следующих аналитических видов:

1. *Продуктоувеличивающий* НТП $F(K,L,t) = A(t)\widetilde{F}(K,L)$, где строго возрастающая функция $A(t)$ есть индекс НТП, увеличивающий выпуск продукции;

2. *Капиталодобавляющий* НТП $F(K,L,t) = \widetilde{F}(A(t)\,K, L)$;

3. *Трудодобавляющий* НТП $F(K,L,t) = \widetilde{F}(K, B(t)\,L)$;

4. *Капитало- и трудодобавляющий* НТП $F(K,L,t) = \widetilde{F}(A(t)\,K, B(t)\,L)$, где строго возрастающие функции $A(t)$ и $B(t)$ такие, что $A(0) = B(0) = 1$, представляют собой индексы НТП по капиталу и труду, соответственно, а функция $\widetilde{F}$ является дважды непрерывно дифференцируемой на области G.

В данной работе авторами получены аналитические критерии того, что динамическая агрегированная ПФ (1) учитывает автономный экзогенный НТП. Например, имеет место следующее утверждение