МНОГОКОМПОНЕНТНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ АНОМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ДИФФУЗИИ

Н. Г. Абрашина-Жадаева, И. А. Тимощенко (Минск, Беларусь)

Для уравнений, описывающих процессы аномальной диффузии с дробной производной по времени в многомерных областях, предложены разностные схемы,основанные на расщеплении пространственного оператора $A = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha$, алгоритмизация которых предусматривает параллельные вычисления на каждом временном слое. В сеточной области $\omega_\tau = (t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots)$ предлагается разностная схема с аппроксимацией из [1]:

$$\Delta_{0t}^{\gamma} y + \sigma(A\alpha y_\alpha^{s+1} - A_\alpha y_\alpha^s) + \sum_{\beta=1}^{p} A_\beta y_\beta^s = f, \quad \alpha = \overline{1,p}, \tag{1}$$

где $\widetilde{\Delta}_{0t}^{\gamma} u = \frac{\tau^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)}[u_j + \sum_{i=1}^{j-1} b_i u_i - b_{j-1} u_0], \qquad b_i = (j+1-i)^{1-\gamma} - (j-i)^{1-\gamma}$.

Если просуммировать равенство (1) по $\alpha = \overline{1,p}$, то получим при $\widetilde{y} = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p} y_\alpha$, аналог разностной схемы из [2], [3]:

$$\Delta_{0t}^{\gamma} \widetilde{y} + \Lambda y^\sigma = f, \quad y^\sigma = \sigma \widehat{y} + (1-\sigma) y. \tag{2}$$

В [2, 3] разностная схема изучена для решения начально-краевой задачи дробной диффузии в цилиндре основанием которого является p–мерный параллелепипед и доказаны соответствующие теоремы об устойчивости. Из этих результатов вытекает справедливость теоремы:

Теорема. *Разностная схема* (1) *при* $y = y_\alpha$ *безусловна устойчива при* $\sigma = p$ *и для погрешности метода справедлива оценка:*

$$\|u^s - y^s\| \le M(\tau^{2-\gamma} + \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2), \quad M = (\frac{M_1 T^\gamma}{1-\gamma})^{\frac{1}{2}}, \quad M_1 > 0.$$

Благодарности. Работа выполнена в рамках программы ГПНИ “Физическое материаловедение, новые материалы и технологии”, подпрограмма “Аналитическое и численное моделирование свойств фрактальных систем из углерода”.

Литература

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, Наука и техника, 1987.

2. *Абрашина–Жадаева Н.Г., Тимощенко И.А.* Конечно-разностные методы для уравнения диффузии с производными дробных порядков в многомерной области. *// Дифференциальные уравнения.* Т. 49. №7 (2013), 819–825.

3. *Абрашина-Жадаева, Н.Г., Тимощенко И.А.* Дробно-дифференциальная модель описания электродиффузионного процесса и разностные методы ее реализации. *// Сеточные методы для краевых задач и приложения: материалы Десятой Международной конференции. Казань: Казанский университет,* (2014), – 29–35.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В. В. Амелькин, М. Н. Василевич, Л. А. Хвощинская (Минск, Беларусь)

Рассмотрим следующую смешанную задачу теории упругости: определить функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ комплексной переменной z, аналитические в верхней полуплоскости, непрерывно продолжимые на $\mathbb{R}\setminus\{-\psi \cup 0 \cup \psi\}$ и удовлетворяющие условиям:

$$\mathrm{Im} F_1(x) = -\mathrm{Re} F_2(x), \ x \in (-\infty, \ 0); \ \mathrm{Im} F_1(x) = \mathrm{Re} F_2(x), \ x \in (0, \ +\infty);$$

$$\mathrm{Re} F_1(x) = f_1(x), x \in (-\psi, \psi); \ \mathrm{Im} F_2(x) = f_2(x), x \in (-\infty, -\psi) \cup (\psi, +\infty), \tag{1}$$

где f_1 и f_2 — заданные функции.

С помощью новых неизвестных вектор-функций $\Phi^+(z) = \left(F_1(z),\ \overline{F_2(\bar{z})}\right) = \left(\Phi_1^+(z),\ \Phi_2^+(z)\right), \Phi^-(z) = \left(\overline{F_1(\bar{z})},\ F_2(z)\right) = \left(\Phi_1^-(z),\ \Phi_2^-(z)\right)$ задача (1) сведена краевой задаче Римана с кусочно-постоянной матрицей и четырьмя особыми точками:

$$\Phi^+(x) = A_k\Phi^-(x) + G_k(x), \quad x \in l_k, \quad k = 1,\ ...,\ 4, \tag{2}$$

где $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2i & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2i & -1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$G_1(x) = -2f_2(x)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad G_2(x) = 2f_1(x)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$$

$$G_3(x) = 2f_1(x)\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \ G_4(x) = 2f_2(x)\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

При решении задачи (2) применялся «метод логарифмирования произведения матриц» второго порядка [1]. Каноническая матрица $X(z)$ краевой задачи (2) в окрестности особых точек a_k, $k = 1, \ \ldots, \ 4$, имеет вид

$$X^+(z) = D_k\begin{pmatrix} u_k & u_k' \\ v_k & v_k' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2\tau\psi^2(z-b)^{-1} \\ 0 & z\left(z^2-\psi^2\right)(z-b)^{-1} \end{pmatrix} \text{ и } \mathrm{X}^-(z) = A_k\mathrm{X}^+(z), \tag{3}$$

где D_k — матрицы, приводящие матрицы V_k к нормальной жордановой форме, $u_k(z), v_k(z)$ — фундаментальная система решений дифференциального уравнения Фукса [2]

$$y'' + \left(\frac{1}{z+\psi} + \frac{1}{z-\psi} - \frac{1}{z-b}\right)y'' - \frac{2\tau\psi^2}{z\left(z^2-\psi^2\right)(z-b)}y = 0$$

с пятью особыми точками $-\psi,\ 0,\ \psi,\ b,\ \infty,\ b = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}\ln^2\left(\sqrt{2}+1\right)}\,\psi$.

Решение краевой задачи (4) находим через интеграл типа Коши по формулам [3]

$$\Phi^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i}X^\pm(z)\sum_{k=0}^{3}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\left[X^+(x)\right]^{-1}G_k(x)\,\frac{dx}{x-z}, \ a_0 = -\infty, \ a_4 = +\infty. \tag{4}$$

Теорема. Решение задачи (1) имеет вид

$$F_1(z) = \frac{1}{2}\left(\Phi_1^+(z) + \overline{\Phi_1^-(\bar{z})}\right) \ \text{ и } \ F_2(z) = \frac{1}{2}\left(\Phi_2^-(z) + \overline{\Phi_2^+(\bar{z})}\right),$$

где функции $\Phi^\pm(z)$ определяются по формулам (4), а матрицы $X^\pm(z)$ находятся по формулам (3).

Литература

1. *Khvostchinskaya L., Rogosin S.* On a solution method for the Riemann problem with two pairs of unknown functions // *Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE-2018* (M.V. Dubatovskaya, S.V. Rogosin Eds.) Cambridge Scientific Publishers (2020), 79–112.

2. *Матвеев П.Н. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений: Учебное пособие.* СПб.: Издательство «Лань» (2008). 336 с.

3. *Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.* М.: Наука (1977). 448 с.