ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДФРАКТАЛЬНОЙ $K^{(\gamma)}$–РАЗМЕРНОСТИ ТИПА «ПРЕДКАНТОРОВСКОЙ ПЫЛИ»

Ю. Н. Булатов (Елец, Россия), В. А. Калитвин (Липецк, Россия), Е. Л. Санина (Воронеж, Россия)

Понятие фрактала, предфрактала и фрактальной "пыли" введено Б. Мандельбротом (подробности и философия этих определений содержит книга [1]). Одно из определений фрактала как структуры, состоящей "из частей, которые в каком-то смысле подобны целому", является не только наиболее кратким, но и наиболее общим, поскольку позволяет иметь разные размерности "самоподобных" частей. Использование формулы размерности Хаусдорфа–Безиковича приводит к размерностям предфракталов, совпадающей с размерностью фрактальной "пыли". Л.Н. Ляхов предложил применить другую формулу для вычисления размерности предфракталов (в том числе кластеров), построенную на основе *определенного дробного интеграла Римана–Лиувилля* с мерой интегрирования со слабой особенностью (см. в [2] определение оператора Киприянова–Бельтрами). Общий вид этой формулы в евклидовом пространстве точек $\mathbb{R}_n$ с неотрицательной функцией (плотности) f следующий:

$$2^n\,|S_1^+(n)|_\gamma \int\limits_0^a f(t)t^{n+|\gamma|-1}\,dt = \Lambda(f,a), \quad 2^n\,|S_1^+(n)|_\gamma = 2\pi^{(n-1)/2}\;\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\gamma}{2}\right)},$$

где $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$, $n+|\gamma|$ — искомая дробная K_γ–размерность шара $|x|=t<a$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_n$, в котором каждая координата x_i имеет фрактальную размерность равную $1+\gamma_i$, $-1<\gamma_i<0$. Здесь правая часть уравнения имеет эмпирическое происхождение. Для численного решения приведенного уравнения относительно размерности $n+|\gamma|$ были разработаны программы на языках python и matlab. Результаты вычислений по этим формулам привели к новому результату: *размерность предфрактального множества монотонно стремиться к размерности соответствующего фрактала, оставаясь больше этой размерности.* В докладе будут приведены графики размерностей самоподобных фракталов в $\mathbb{R}_1$ ("канторовская пыль" отрезка на каждом этапе дробления), в $\mathbb{R}_2$ (размерность "предковра" Серпинского) и в $\mathbb{R}_3$ (размерность куба со сферическими полостями внутри). В этих графиках указаны прямые, отвечающие топологическим и евклидовым размерностям, соответствующих фракталов, и поточечные кривые их предфрактальных размерностей.

Литература

1. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований. – 2002. – 656 с.

2. *Ляхов Л.Н., Санина Е.Л.* Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью оператора Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. - Т. 56. – №12 (2020), 1610–1620.

COMPARISON OF MORREY SPACES AND NIKOL'SKII SPACES

V. I. Burenkov, T. V. Tararykova (Moscow, Russia)

For a Lebesgue measurable set $G\subset\mathbb{R}^n$ and $0<p\le\infty$, below $L_p(G)$ is the standard Lebesgue space.

The Morrey spaces M_p^λ, named after C.B. Morrey, were introduced by him in 1938 in [2] and defined as follows. For $\lambda\in\mathbb{R}, 0<p\le\infty, f\in M_p^\lambda$ if $f\in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ and

$$\|f\|_{M_p^\lambda}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n,r>0} r^{-\lambda}\,\|f\|_{L_p(B(x,r))}<\infty,$$

where $B(x,r)$ is the open ball in $\mathbb{R}^n$ centered at the point $x\in\mathbb{R}^n$ of radius $r>0$. Here the notation is slightly altered compared with the original definition in [2], namely we write $r^{-\lambda}$ rather than $r^{-\frac{n-\lambda}{p}}$ for the reasons which will be clarified below and explicitly stated in the remark at the end of the abstract.