

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**  
**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ**  
Кафедра методов оптимального управления

**ТЮРЮХАНОВ**  
Даниил Максимович

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В**  
**КЛАССЕ ДИСКРЕТНЫХ МНОГОМЕРНЫХ**  
**УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ**

Дипломная работа

Научный руководитель:  
профессор кафедры методов  
оптимального управления,  
кандидат физ.-мат. наук,  
профессор В.В. Альсевич

Допущена к защите

<< \_\_\_\_ >> \_\_\_\_\_ 2021 г.

Зав. кафедрой методов оптимального управления  
кандидат физ.-мат. наук, доцент Н.М. Дмитрук

Минск, 2021

## РЕФЕРАТ

Дипломная работа, 35 с., 9 рис., 4 источника.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, ОПТИМАЛЬНЫЙ РЕГУЛЯТОР,  
РЕАЛЬНОЕ ВРЕМЯ, ПРИНЦИП МАКСИМУМА.

Целью данной работы является исследование алгоритма для построения оптимального регулятора, используемого для нахождения оптимального управления задачи оптимизации, а также доказательство принципа максимума для исходной задачи, путем сведения к задаче линейного программирования.

Основными методами исследования являются методы оптимизации.

Результатом исследования является алгоритм построения оптимального регулятора, для нахождения оптимального управления задачи оптимизации.

## РЭФЕРАТ

Дыпломная работа, 35 с., 9 мал., 4 рэсурса.

АПТЫМАЛЬНАЕ КІРАВАННЕ, АПТЫМАЛЬНЫ РЭГУЛЯТАР,  
РЭАЛЬНЫ ЧАС, ПРЫНЦЫП МАКСІМУМУ.

Мэтай дадзенай працы з'яўляецца даследаванне алгарытму для пабудовы аптымальнага рэгулятара, які выкарыстоўваецца для знаходжання аптымальнага кіравання задачы аптымізацыі, а таксама доказ прынцыпу максімуму для зыходнай задачы, шляхам звесткі да задачы лінейнага праграмавання

Асноўнымі метады даследавання з'яўляюцца метады аптымізацыі.

Вынікам даследавання з'яўляецца алгарытм пабудовы аптымальнага рэгулятара, для знаходжання аптымальнага кіравання задачы аптымізацыі.

## ABSTRACT

Graduation work, 35 p., 9 pictures, 4 sources.

OPTIMUM CONTROL, OPTIMUM REGULATOR, REAL TIME, MAXIMUM PRINCIPLE.

The aim of this work is to study an algorithm for constructing an optimal controller used to find the optimal control of the optimization problem, as well as to prove the maximum principle for the original problem by reducing it to a linear programming problem

The main research methods are optimization methods.

The result of the study is an algorithm for constructing an optimal controller to find the optimal control of the optimization problem.

## Оглавление

<b>Введение .....</b>	<b>5</b>
<b>Глава 1 Решение задачи оптимизации в классе дискретных многомерных управляющих воздействий .....</b>	<b>6</b>
1.1 Постановка задачи.....	6
1.2 Дискретный критерий оптимальности .....	6
1.3 Сведение задачи управления к задаче линейного программирования .....	10
1.4 Сравнение эквивалентных понятий задач оптимального управления и ЛП .....	12
1.5 Дискретные критерии оптимальности программного управления.....	15
<b>Глава 2 Оптимальное управление в реальном времени.....</b>	<b>17</b>
2.1 Сведение проблемы построения оптимального управления к построению алгоритма работы оптимального регулятора.....	17
2.2 Оптимальный регулятор для задачи оптимального управления .....	17
2.3 Вычислительный эксперимент.....	23
<b>Заключение.....</b>	<b>30</b>
<b>Список литературы .....</b>	<b>31</b>
<b>Приложение 1.....</b>	<b>32</b>

## Введение

Принцип максимума Л.С. Понтрягина – классическое основное условие оптимальности в теории оптимального управления. В настоящее время имеется множество результатов для различных задач управления как аналогичных принципу максимума, так и отличающихся от него. Но в основном все они относятся к кусочно-непрерывным или измеримым управлениям.

В дипломной работе будем рассматривать задачу оптимального управления в классе многомерных дискретных управлений.

В недавнее время появилось понятие оптимального управления в реальном времени, из-за быстрого развития вычислительной техники, способной решать алгоритмы очень высокой сложности. В классической теории управления различают несколько типов управления. Первый тип – это программное управление. Для этого типа управляющие воздействия на объект исследования получают в процессе управления, используя при этом заранее построенный закон управления, по уже имеющейся информации о поведении о исходного объекта управление и по реализовавшейся неопределённости.

В задачах оптимального управления для нахождения оптимальных управляющих воздействий на промежутке  $T = [t_0, t^*]$ , сначала строится определённая модель задачи и считается, что в процессе управления будут доступны точные значения состояний. Далее определяется множество состояний  $x$ , для каждого текущего момента времени, для которых существует программное управление  $u^0(\tau, x) = u^0(\tau + 0 | \tau, x)$ . Функцию  $u^0(\tau, x)$  называют оптимальной обратной связью.

В дипломной работе описана линейная задача оптимального управления в классе дискретных многомерных управляющих воздействий, которая сведена к задаче линейного программирования, разработан алгоритм построения оптимальной обратной связи для рассматриваемой задачи.

# Глава 1 Решение задачи оптимизации в классе дискретных многомерных управляющих воздействий

## 1.1 Постановка задачи

В классе дискретных управляющих воздействий, рассмотрим линейную задачу оптимального управления

$$J(u) = c'x(t^*), \quad (1)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = 0, \quad (2)$$

$$x(t^*) \in X^* = \{x \in R^n: Hx = g\}, \quad (3)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [0, t^*], \quad (4)$$

$$U = \{u \in R^r: \underline{u}_i \leq u_i \leq \bar{u}_i, i = \overline{1, r}\},$$

$$c \in R^n, \quad \text{rank } H = m, \quad T_h = \{0, h, 2h, \dots, t^* - h\}, \quad A \in R^{n \times n}, \\ H \in R^{m \times n}, \quad B \in R^{n \times r}.$$

Управление  $u(t)$ ,  $t \in T$ , называется дискретным, если выполняются соотношения:  $u(t) = u(\tau)$ ,  $t \in [\tau, \tau + h]$ ,  $\tau \in T_h$ ,  $T_h = \{0, h, \dots, (N - 1)h\}$ ,  $N$  – натуральное число.

## 1.2 Дискретный критерий оптимальности

Для задач оптимального управления со специальной правой частью в классе дискретных управляющих воздействий ранее доказаны условия оптимальности в виде дискретного принципа максимума. Докажем сначала подобные условия в виде критерия для исходной задачи, но без терминальных ограничений.

Возьмем  $\tilde{u}(t), u(t), t \in T$ , – два допустимых управления, а  $\tilde{x}(t), x(t)$  – соответствующие траектории.

Приращение критерия качества для них примет следующий вид:

$$\Delta J(u) = J(\tilde{u}) - J(u) = c' \Delta x(t^*), \quad (5)$$

где  $\Delta x(t) = \tilde{x}(t) - x(t)$  – приращение траектории системы (2), т.е. является решением уравнения:

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x + B \Delta u, \quad \Delta x(0) = 0, \quad (6)$$

где  $\Delta u(t) = \tilde{u}(t) - u(t)$ .

Решение уравнения (6) с помощью формулы Коши, запишем в следующем виде:

$$\Delta x(t^*) = \int_0^{t^*} F(t^*)F^{-1}(t)B\Delta u(t)dt, \quad (7)$$

где  $F(t), t \in T$  – фундаментальная матрица – решение уравнения:

$$\dot{F}(t) = AF(t), \quad t \in T, \quad F(0) = E, \quad (8)$$

$E \in R^{n \times n}$  – единичная диагональная матрица.

Поскольку справедливо тождество  $F(t)F^{-1}(t) \equiv E$ , то дифференцируя его и учитывая уравнение (8), получим, что  $F(t)$  – решение уравнения:

$$\dot{F} = -FA, \quad F(0) = E. \quad (9)$$

Подставим (7) в (5), получим:

$$\Delta J(u) = c' \int_0^{t^*} F(t^*)F^{-1}(t)B\Delta u(t)dt. \quad (10)$$

Введем функцию

$$\psi'(t) = c'F(t^*)F^{-1}(t),$$

которая в силу (9) является решение уравнения:

$$\dot{\psi}(t) = -A'\psi, \quad t \in T, \quad (11)$$

с граничным условием:

$$\psi(t^*) = c. \quad (12)$$

Систему (11) называют сопряженной системой.

Итак, формула приращения критерия качества (10) примет вид:

$$\Delta J(u) = \int_0^{t^*} \psi'(t) B \Delta u(t) dt = \sum_{t \in T_h} \sum_{j=1}^r \int_t^{t+h} (\psi'(s) b_j ds) \Delta u_j(t). \quad (13)$$

Пусть  $u(t)$ ,  $x(t)$ ,  $t \in T$ , – оптимальные управление и траектория. Тогда, очевидно, что выполняется неравенство:

$$\Delta J(u) = J(\tilde{u}) - J(u) \leq 0 \quad (14)$$

для всех допустимых управлений  $\tilde{u}(t)$ ,  $t \in T$ . Справедливо утверждение:

**Теорема 1** (дискретный критерий оптимальности). *Необходимыми и достаточными условиями оптимальности дискретного управления  $u(t)$ ,  $t \in T$ , и соответствующих решений  $x(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $t \in T$ , прямой (2) и сопряженной (11), (12) систем являются условия:*

$$\left( \int_t^{t+h} \psi'(s) b_j ds \right) u_j(t) = \max_{\underline{u}_j \leq v_j \leq \bar{u}_j} \left( \int_t^{t+h} \psi'(s) b_j ds \right) v_j, \quad (15)$$

$$j = \overline{1, r}, \quad t \in T_h.$$

*Доказательство. Достаточность.* Так как выполняется (15), то справедливо:



$$\left( \int_t^{t+h} \psi'(s) b_j ds \right) (v_j - u_j(t)) \leq 0, \quad j = \overline{1, r}, \quad v \in U, \quad (16)$$

$$t \in T_h.$$

Суммируя (16) по  $t$  и по  $j = \overline{1, r}$  получим неравенство (14), где  $\tilde{u}(t) = v \in U$ . Достаточность доказана.

*Необходимость.* Пусть  $u(t)$ ,  $t \in T$ , – оптимальное управление, но существуют момент времени  $\theta \in T_h$  и номер  $j_0$ , для которых условие (15) не выполняется, т.е.  $\exists v_{j_0}$ ,  $\underline{u}_{j_0} \leq v_{j_0} \leq \bar{u}_{j_0}$ , что выполняется неравенство:

$$\left( \int_{\theta}^{\theta+h} \psi'(s) b_{j_0} ds \right) (v_{j_0} - u_{j_0}(\theta)) > 0. \quad (17)$$

Построим возмущенное управление:

$$\tilde{u}_{j_0}(t) = \begin{cases} u_{j_0}(t) + \varepsilon (v_{j_0} - u_{j_0}(t)), & t \in [\theta, \theta + h], \\ u_{j_0}(t), & t \in T \setminus [\theta, \theta + h], \end{cases} \quad (18)$$

$$\tilde{u}_j(t) = u_j(t), \quad j = \overline{1, r}, \quad j \neq j_0, \quad t \in T,$$

где  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . Тогда из формулы (13) приращения критерия качества в силу (17) и (18) следует неравенство

$$\Delta J(u) = \varepsilon \left( \int_{\theta}^{\theta+h} \psi'(s) b_{j_0} ds \right) (v_{j_0} - u_{j_0}(\theta)) > 0, \quad (19)$$

которое противоречит условию (14) оптимальности управления  $u(t)$ ,  $t \in T$ .

### 1.3 Сведение задачи управления к задаче линейного программирования

Рассмотрим исходную задачу (1) – (4).

Возьмем вариант, когда шаг дискретизации управления  $h$  выбран следующим образом:

$$h = \frac{t^*}{N}, \quad T_h = \{0, h, 2h, \dots, (N - 1)h\}.$$

При этом согласно формуле Коши состояния  $x(t_i)$ ,  $t_i \in T_h$ , примут вид:

$$x(t_i) = F(t_i)x_0 + \int_0^{t_i} F(t_i)F^{-1}(t)Bu(t)dt, \quad (20)$$

где  $i = \overline{1, N}$ .

Используя равенства (20), преобразуем терминальные ограничения и критерий качества задачи (1) – (4). Получим эквивалентную функциональную форму:

$$\begin{aligned} \sum_{t \in T_h} \sum_{j=1}^r c_j(t)u_j(t) &\rightarrow \max, \\ \sum_{t \in T_h} \sum_{j=1}^r d_j(t)u_j(t) &= \tilde{g}, \\ \underline{u}_j &\leq u_j(t) \leq \bar{u}_j, \quad j = \overline{1, r}, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$c_j(t) = \int_t^{t+h} c'F(t^*)F^{-1}(s)b_j ds, \quad (22)$$

$$d_j(t) = \int_t^{t+h} HF(t^*)F^{-1}(s)b_j ds, \quad (23)$$

$$\tilde{g} = g - HF(t^*)x_0, \quad (24)$$

$t = 0, h, \dots, (N - 1)h.$

Функции (22) – (24) задачи (21) можно получить из исходной динамической модели (1) – (4), если ввести функции:

$$\begin{aligned}\psi_c'(t) &= c'F(t^*)F^{-1}(t), & t \in T, \\ \psi_{(i)}'(t) &= h_{(i)}'F(t^*)F^{-1}(t), & i = \overline{1, m}, \quad t \in T,\end{aligned}\tag{25}$$

где  $h_{(i)}'$  –  $i$ -я строка матрицы  $H$ .

Функции (25), очевидно, являются решениями системы:

$$\dot{\psi} = -A'\psi, \quad t \in T,\tag{26}$$

с соответствующими граничными условиями:

$$\psi_c(t^*) = c,\tag{27}$$

$$\psi_{(i)}(t^*) = h_{(i)}, \quad i = \overline{1, m}.\tag{28}$$

Введем множество

$$J = \{j = sN + i: s = \overline{0, r - 1}, i = \overline{0, N - 1}\}.$$

Очевидно, что в этом множестве количество элементов равно  $\bar{N} = rN$ . Тогда задача (21) примет вид:

$$\begin{aligned}\sum_{j \in J} \bar{c}_j w_j &\rightarrow \max, \\ \sum_{j \in J} d_j w_j &= \tilde{g}, \\ \underline{u}_{s+1} \leq w_j &\leq \bar{u}_{s+1}, \quad j \in J, j = sN + i.\end{aligned}\tag{29}$$

где

$$\bar{c}_{sN+i} = \int_{ih}^{(i+1)h} c' F(t^*) F^{-1}(\tau) b_{s+1} d\tau, \quad (30)$$

$$d_{sN+i} = \int_{ih}^{(i+1)h} HF(t^*) F^{-1}(\tau) b_{s+1} d\tau, \quad (31)$$

$$w_{sN+i} = u_{s+1}(ih), \quad (32)$$

$$s = \overline{0, r-1}, i = \overline{0, N-1}.$$

Рассмотрим матрицу  $\Psi(t) = \left( \psi'_{(i)}(t) \right)_{i=1, m}$ , для которой, очевидно, в силу (28) получим:

$$\Psi(t^*) = H. \quad (33)$$

Элементы (30), (31), (32) при этом примут вид:

$$\begin{aligned} \bar{c}_{sN+i} &= \int_{ih}^{(i+1)h} \psi'_c(\tau) b_{s+1} d\tau, \\ d_{sN+i} &= \int_{ih}^{(i+1)h} \Psi(\tau) b_{s+1} d\tau, \\ \tilde{g} &= g - \Psi(0)x_0. \end{aligned} \quad (34)$$

Таким образом, исходная бесконечномерная задача оптимального управления (1) – (4) в классе дискретных управляющих воздействий свелась к конечномерной задаче линейного программирования (29).

#### 1.4 Сравнение эквивалентных понятий задач оптимального управления и ЛП

Сравним полученную задачу (29) с задачей линейного программирования:

$$\sum_{j \in J} \tilde{c}_j x_j \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j \in J} \tilde{a}_j x_j = \tilde{b},$$

$$\tilde{d}_{*j} \leq x_j \leq \tilde{d}^*_{j}, j \in J = \{1, 2, \dots, n\}.$$
(35)

№	Задача линейного программирования	Задача управления
1	Множество индексов $\tilde{J} = \{1, 2, \dots, n\}$	Множество индексов $J = \{j = sN + i: s = \overline{0, r-1}, i = \overline{0, N-1}\}$
2	План $x = (x_j, j \in \tilde{J})$	Программное управление $w \in R^{\bar{N}+1}$
3	Базисное множество индексов $\tilde{J}_B \subset \tilde{J},  \tilde{J}_B  = m$	Базисное множество индексов $J_B \subset J,  J_B  = m$
4	Базисная матрица $\tilde{A}_B = (\tilde{a}_j, j \in \tilde{J}_B)$	Базисные матрицы $D_B = (d_j, j \in J_B)$
5	Базисный план $x \in X$ $x_j = \tilde{d}_{*j} \vee \tilde{d}^*_{j}, j \in \tilde{J}_H = \tilde{J} \setminus \tilde{J}_B,$ $x_B = (x_j, j \in \tilde{J}_B)' = \tilde{A}_B^{-1}(\tilde{b} - \tilde{A}_H x_H),$ где $\tilde{A}_H = (\tilde{a}_j, j \in \tilde{J}_H), x_H = (x_j, j \in \tilde{J}_H)$	Базисно программное управление $w$ $w_j = \underline{u}_{s+1} \vee \bar{u}_{s+1}, j \in J_H = J \setminus J_B, j = sN + i,$ $w_{J_B}' = (w_j, j \in J_B)' = D_B^{-1}(\tilde{g} - \sum_{j \in J_H} d_j w_j).$
6	Невырожденный базисный план $d_{*j} < x_j < d^*_{j}, j \in \tilde{J}_B$	Невырожденное базисное программное управление $\underline{u}_{s+1} < w_j < \bar{u}_{s+1}, j \in J_B, j = sN + i$

7	<p>Вектор потенциалов</p> $u' = \tilde{c}'_B \tilde{A}_B^{-1}$	<p>Вектора потенциалов</p> $v' = \bar{c}'_{J_B} D_B^{-1}$
8	<p>Базисный коплан (оценки)</p> $\Delta_j = c_j - u' \tilde{a}_j, j \in \tilde{J}$	<p>Базисное коуправление</p> $\delta_j = \int_{ih}^{(i+1)h} (\psi'_c(t) - v' \Psi(t)) dt b_{s+1},$ $j \in J, j = sN + i$
9	<p>Невырожденный базисный коплан</p> $\Delta_j \neq 0, j \in \tilde{J}_H$	<p>Невырожденное базисное коуправление</p> $\delta_j \neq 0, j \in J_H$
10	<p>Регулярная базисная матрица <math>\tilde{A}_B</math>, для которой <math>\Delta_j \neq 0, j \in \tilde{J}_H</math></p>	<p>Регулярная базисная матрица <math>D_B</math>, для которой</p> $\delta_j \neq 0, j \in J_H$
11	<p>Базисный псевдоплан с базисной матрицей <math>\tilde{A}_B</math>, (базисным множеством <math>J_B</math>):</p> $\kappa_j = d_{*j}, \text{ если } \delta_j < 0; \kappa_j = d_j^*, \text{ если } \delta_j > 0; \kappa_j = d_{*j} \vee d_j^*, \text{ если } \delta_j > 0; \kappa_B = \tilde{A}_H^{-1} (\tilde{b} - \tilde{A}_H \kappa_H)$	<p>Базисное псевдоуправление с базисной матрицей <math>D_B</math> (с базисным множеством индексов <math>J_B</math>): <math>\omega_j = \underline{u}_{s+1}</math>, если <math>\delta_j &lt; 0</math>; <math>\omega_j = \bar{u}_{s+1}</math>, если <math>\delta_j &gt; 0</math>; <math>\omega_j = \underline{u}_{s+1} \vee \bar{u}_{s+1}</math>, если <math>\delta_j = 0</math>,</p> $j \in J, j = sN + i$

## 1.5 Дискретные критерии оптимальности программного управления

Сравнивая полученные результаты предыдущего раздела и используя критерий оптимальности базисного плана в ЛП, получим следующий критерий оптимальности программного управления:

**Теорема 2.** *Достаточными, а в случае невырожденности и необходимыми условиями оптимальности базисного программного управления  $w^0$ , в задаче (1) – (4) являются условия:*

$$w^0_j = \underline{u}_{s+1}, \text{ при } \delta_j < 0; w^0_j = \bar{u}_{s+1}, \text{ при } \delta_j > 0, j \in J_H, \quad (36)$$

$$j = sN + i + 1.$$

Введем функцию сопряженных переменных

$$\psi'(t) = \psi'_c(t) - v'\Psi(t). \quad (37)$$

В силу (26) – (28), (33) эта функция является решением сопряженной системы (26) с граничным условием,

$$\psi(t^*) = c - H'v. \quad (38)$$

Исходя из определения базисного коуправления и соответствующей котраектории, а также вспоминая введенные замены элементов задачи (21) на элементы задачи (29)

$$\begin{aligned} w_{sN+i} &= u_{s+1}(ih), \\ \bar{c}_{sN+i} &= c_{s+1}(ih), \\ d_{sN+i} &= d_{s+1}(ih), \\ s &= \overline{0, r-1}, \quad i = \overline{0, N-1}, \end{aligned} \quad (39)$$

критерий оптимальности, сформулированный в теореме 2, можно переформулировать в виде дискретного принципа максимума:

**Теорема 3 (дискретный принцип максимума).** *Для оптимальности базисного программного управления  $u^0(t), t \in T$ , и соответствующей траектории  $x^0(t), t \in T$ , достаточно, а в случае его невырожденности и необхо-*

димо существование такого решения (котраектории)  $\psi^0(t)$ ,  $t \in T$ , системы (37), (38), вдоль которых выполняется условие максимума:

$$\left( \int_t^{t+h} \psi^{0'}(\tau) b_{s+1} d\tau \right) u_{s+1}(t) = \max_{\underline{u}_{s+1} \leq v_{s+1} \leq \bar{u}_{s+1}} \left( \int_t^{t+h} \psi^{0'}(\tau) b_{s+1} d\tau \right) v_{s+1} \quad (40)$$

$$s = \overline{0, r-1}, \quad t \in T_h,$$

Аналогично, как сформулирован двойственный критерий оптимальности в ЛП, можно сформулировать и критерий оптимальности для базисного множества индексов  $J_B^0$ .

Однако заметим, что в двойственном критерии в ЛП участвует оптимальный двойственный план, построенный по базисной матрице (или, что то же, по базисному множеству индексов). Таким образом, в ЛП можно вести речь не о двойственном плане, а о базисной матрице  $\tilde{A}_B^0$  (или, что то же самое, о базисном множестве индексов  $\tilde{J}_B^0$ ).

Исходя из этих рассуждений и из указанных в предыдущем разделе сравнений, формулируем и для рассматриваемой задачи оптимального управления аналогичное утверждение.

**Теорема 4 (двойственный критерий).** *Для оптимальности базисного множества моментов  $t_j, j \in J_B^0$ , достаточно, а в случае его регулярности и необходимо, чтобы для соответствующей базисной псевдопрограммы  $\omega(t), t \in T$ , выполнялись неравенства:*

$$\underline{u}_{s+1} < \omega_j < \bar{u}_{s+1}, j \in J_B^0,$$

причем  $\omega(t) < u^0(t), t \in T$ .



## Глава 2 Оптимальное управление в реальном времени

### 2.1 Сведение проблемы построения оптимального управления к построению алгоритма работы оптимального регулятора

На примере задачи оптимального управления (1)–(4) рассмотрим применение оптимальной обратной связи в классе многомерных дискретных управляющих воздействий.

Как обычно, процесс управления начинается с подачи на вход объекта управляющих воздействий  $u^*(t) = u^0(0, x_0), t \in [0, h)$ , в момент времени  $t = 0$ . Пусть в момент времени  $t = h$  под влиянием управляющего воздействия и некоторого возмущения объект оказался в состоянии  $x^*(h)$ . Для позиции  $(h, x^*(h))$  подсчитаем управление  $u^*(t) = u^0(h, x^*(h)), t \in [h, 2h)$

Продолжая аналогично процесс управления на каждом отрезке времени, получим управление  $u^*(t), t \in T$  и состояния объекта,  $x^*(\tau), \tau \in T_h \cup t^*$ ,  $T_h = \{0, h, 2h, \dots, (N - 1)h\}$ , соответствующие этому управлению. Функцию  $u^*(t), t \in T$ , будем называть реализацией оптимальной обратной связи.

Очевидно, что оптимальная обратная связь на всей области определения не используется полностью. Ее значения необходимы только вдоль одной последовательности измеряемых состояний. Значения  $u^*(t), t \in T_h$ , не нужно знать заранее. Для каждого получаемого состояния  $x^*(\tau)$  достаточно вычислять  $u^*(\tau) = u^0(\tau, x^*(\tau))$  при  $t = \tau$ .

Считается, что процесс управления осуществляется в реальном времени, когда текущее значение  $u^*(\tau)$  для каждого момента  $\tau \in T_h$  вычисляется за время  $s(\tau)$ , не превышающее  $h$ , другими словами, пока не получено следующее измерение  $x^*(\tau + h)$ . Под *оптимальным регулятором* понимается устройство, которое способно выполнить указанную работу.

Из сказанного следует, что задача построения оптимального управления равносильна разработке алгоритма работы оптимального регулятора.

В свою очередь, для разработки указанного алгоритма, как правило, используется двойственный симплекс-метод.

### 2.2 Оптимальный регулятор для задачи оптимального управления

Рассмотрим алгоритм работы оптимального регулятора, с помощью которого решается задача (1)–(4).

До начала процесса управления оптимальный регулятор строит оптимальное базисное множество  $J_B^0(0)$  и вычисляет оптимальное управление  $u^0(\tau | 0, x_0), \tau \in T_h$ , для задачи (1)–(4), решая при этом симплекс-методом за-

дачу (27). Поскольку вычисления проводятся до начала процесса управления, то затраты времени, как правило, несущественны.

Введем обозначения:  $J(ih) = \{j = sN + i, s = 0, \dots, r - 1\}$ . Оптимальный регулятор формирует следующее множество

$$J_B^*(h) = J(0) = \{j = sN, s = 0, \dots, r - 1\} \cap J_B^0(0).$$

Если это множество не пусто, добавим его в момент  $h$  для формирования  $J_B(h)$ . Соответствующие переменные – это аналог фиктивных переменных. Далее в момент времени  $h$  оптимальный регулятор находит состояние  $x^0(h)$  математической модели (1)–(2):

$$x^0(h) = x^0(h|0, x_0) = F(h)x_0 + a(0)u^*(0),$$

где

$$u^*(0) = u^0(0|0, x_0), a(t) = \int_t^{t+h} F(t+h)F^{-1}(s)Bds, t \in T_h.$$

Заметим, что процесс управления начинается с подачи на объект в момент времени  $t = 0$  управляющего воздействия  $u^*(0) = u^0(0|0, x_0), t \geq 0$ .

Пусть процесс управления выполнен на промежутке  $[0, kh[$ . Для нахождения управляющего импульса  $u^*((k-1)h)$  на промежутке  $[(k-1)h, kh[$  оптимальное базисное множество  $J_B^0((k-1)h)$ , оптимальная программа  $= u^0(t|(k-1)h, x^*((k-1)h)), t \in T((k-1)h)$ , были построены оптимальным регулятором, для задачи:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J((k-1)h)} \bar{c}_j v_j &\rightarrow \max, \\ HF(t^*)F^{-1}((k-1)h)x^*((k-1)h) + \sum_{j \in J((k-1)h)} d_j v_j &= \tilde{g}, \\ \underline{u}_{s+1} \leq v_j \leq \bar{u}_{s+1}, j \in J((k-1)h), j = sN + i, \end{aligned} \quad (41)$$

а также множество  $J_B^*(kh)$  и состояние  $x^0(kh) = x^0(kh|kh-h, x^*((k-1)h))$  математической модели в момент времени  $kh$ :

$$\begin{aligned}
x^0(kh) &= F(kh)F^{-1}((k-1)h)x^*((k-1)h) + \\
&+ a((k-1)h)u^*((k-1)h).
\end{aligned} \tag{42}$$

Множество  $J_B^*(kh)$  назовем множеством базисных индексов в момент времени  $kh$ .

Таким образом, зная состояние объекта управления  $x^*(kh)$ , в момент времени  $kh$  оптимальный регулятор должен построить оптимальное множество базисных индексов  $J_B^*(kh)$ , оптимальную программу  $u^*(0) = u^0(t|kh, x^*(kh)), t \in T(kh)$ , и множество  $J_B^*((k+1)h)$ . С этой целью регулятор решает следующую задачу:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j \in J(kh)} \bar{c}_j v_j \rightarrow \max, \\
&HF(t^*)F^{-1}(kh)x^*(kh) + \sum_{j \in J(kh)} d_j v_j = \tilde{g}, \\
&\underline{u}_{s+1} \leq v_j \leq \bar{u}_{s+1}, j \in J(kh), j = sN + i,
\end{aligned} \tag{43}$$

где

$$\begin{aligned}
x^*(kh) &= F(kh)F^{-1}((k-1)h)x^*((k-1)h) + \\
&+ a((k-1)h)u^*((k-1)h) + \int_{(k-1)h}^{kh} F(kh)F^{-1}(s)w^*(s)ds,
\end{aligned} \tag{44}$$

$w^*(s), s \in [(k-1)h, kh[$ , – возмущение, реализовавшееся на этом промежутке. Понятно, что возмущение регулятору не известно, однако его воздействие в момент  $kh, k \in J$  можно получить, сравнивая соотношения (42) и (44):

$$\int_{(k-1)h}^{kh} F(kh)F^{-1}(s)w^*(s)ds = x^*(kh) - x^0(kh). \tag{45}$$

Пусть  $J^{kh} = \{0, 1, \dots, (k-1), N, N+1, \dots, N+(k-1)h, \dots, N(r-1), \dots, N(r-1)+(k-1)h\}$ ,  $J_H^* = J^{kh} \setminus J_B^*(kh)$ .

Соотношения (42), (44), (45) справедливы для всех  $kh = h, 2h, \dots, t^* - h$ . Тогда, последовательно подставляя (44) в задачи (41), (43) для  $(k-1)h, (k-2)h, \dots, h$  и учитывая равенства (45) и соотношений (34), задачи (41), (43) примут вид:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j \in J^{(k-1)h}} \bar{c}_j u^*(ih) + \sum_{j \in J^{((k-1)h)}} \bar{c}_j v_j \rightarrow \max, \\
& \sum_{j \in J^{(k-1)h}} d_j u^*(ih) + \sum_{j \in J^{((k-1)h)}} d_j v_j + \\
& + \sum_{j \in J^{(k-1)h} \setminus J_0} \Psi(ih)(x^*(ih) - x^0(ih)) = \tilde{g}, \\
& \underline{u}_{s+1} \leq v_j \leq \bar{u}_{s+1}, j \in J^{((k-1)h)}, J_0 = \{0, N, \dots, (r-1)N\}, \\
& j = sN + i.
\end{aligned} \tag{46}$$

и

$$\begin{aligned}
& \sum_{j \in J^{kh}} \bar{c}_j u^*(ih) + \sum_{j \in J^{(kh)}} \bar{c}_j v_j \rightarrow \max, \\
& \sum_{j \in J^{kh}} d_j u^*(ih) + \sum_{j \in J^{(kh)}} d_j v_j + \\
& + \sum_{j \in J^{kh} \setminus J_0} \Psi(ih)(x^*(ih) - x^0(ih)) = \tilde{g}, \\
& \underline{u}_{s+1} \leq v_j \leq \bar{u}_{s+1}, j \in J^{(kh)}, J_0 = \{0, N, \dots, (r-1)N\}, \\
& j = sN + i.
\end{aligned} \tag{47}$$

Накладывая прямые ограничения на сигналы  $v_j, j \in J_B^*(kh)$ , перепишем задачи (46), (47) в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j \in J_B^*((k-1)h)} \bar{c}_j v_j + \sum_{j \in J^{((k-1)h)}} \bar{c}_j v_j \rightarrow \max, \\
& \sum_{j \in J_B^*((k-1)h)} d_j v_j + \sum_{j \in J^{((k-1)h)}} d_j v_j + \\
& + \sum_{j \in J^{(k-1)h} \setminus J_0} \Psi(ih)(x^*(ih) - x^0(ih)) + \sum_{j \in J_H^*((k-1)h)} d_j u^*(ih) = \\
& = \tilde{g}, \\
& \underline{u}_{s+1} \leq v_j \leq \bar{u}_{s+1}, j \in J_B^*((k-1)h), J_0 = \{0, N, \dots, (r-1)N\}, \\
& j = sN + i.
\end{aligned} \tag{48}$$

и

$$\begin{aligned}
& \sum_{j \in J_{\mathbb{B}}^*(kh)} \bar{c}_j v_j + \sum_{j \in J(kh)} \bar{c}_j v_j \rightarrow \max, \\
& \sum_{j \in J_{\mathbb{B}}^*(kh)} d_j v_j + \sum_{j \in J(kh)} d_j v_j + \sum_{j \in J^{kh} \setminus J_0} \Psi(ih)(x^*(ih) - \\
& \quad - x^0(ih)) + \sum_{j \in J_{\mathbb{H}}^*(kh)} d_j u^*(ih) = \tilde{g}, \\
& \underline{u}_{s+1} \leq v_j \leq \bar{u}_{s+1}, j \in J_{\mathbb{B}}^*(kh), J_0 = \{0, N, \dots, (r-1)N\}, \\
& \quad j = sN + i.
\end{aligned} \tag{49}$$

Наряду с задачей (33) рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}
& \sum_{j \in J_{\mathbb{B}}^*(kh)} \bar{c}_j v_j + \sum_{j \in J(kh)} \bar{c}_j v_j \rightarrow \max, \\
& \sum_{j \in J_{\mathbb{B}}^*(kh)} d_j v_j + \sum_{j \in J(kh)} d_j v_j + \\
& + \sum_{j \in J^{(k-1)h} \setminus J_0} \Psi(ih)(x^*(ih) - x^0(ih)) + \sum_{j \in J_{\mathbb{H}}^*(kh)} d_j u^*(ih) = \tilde{g}, \\
& \underline{u}_{s+1} \leq v_j \leq \bar{u}_{s+1}, j \in J_{\mathbb{B}}^*(kh), J_0 = \{0, N, \dots, (r-1)N\}, \\
& \quad j = sN + i.
\end{aligned} \tag{50}$$

Отличие задач (49) и (50) лишь в одном слагаемом  $\Psi(kh)(x^*(kh) - x^0(kh))$ . Из (45) следует, что чем меньше  $h$  и  $\|w^*(s)\|, s \in [(k-1)h, kh[$ , тем эти задачи ближе друг к другу. Множество  $J_{\mathbb{B}}^0((k-1)h)$  будет оптимальным базисным и для задачи (50), а также базисным для задачи (49), но не обязательно оптимальным базисным. Но в силу близости задач (49) и (50), взяв в качестве начального базисного множества  $J_{\mathbb{B}}(kh)$  для решения задачи (49) двойственным симплекс-методом множество  $J_{\mathbb{B}}^0((k-1)h)$ , оптимальный регулятор построит за небольшое число итераций оптимальное базисное множество  $J_{\mathbb{B}}^0(kh)$  и соответствующие оптимальные сигналы  $u^*(t) = u^0(kh|kh, x^*(kh)), t \geq kh$ .

Решение задачи (49), очевидно, начинается с построения базисной компоненты псевдопрограммы, которая имеет вид  $\bar{\omega}(J_{\mathbb{B}}^0((k-1)h)) = u^0(J_{\mathbb{B}}^0((k-1)h)) + \Delta\omega$ .

Из связи между задачами (49), (50), указанной выше, следует:

$$\Delta\omega = \left( D_{\mathbb{B}}^0((k-1)h) \right)^{-1} \Psi(kh)(x^*(kh) - x^0(kh)).$$

Если  $\bar{\omega} \left( J_{\mathbb{B}}^0((k-1)h) \right) \in U$ , то  $J_{\mathbb{B}}^0(kh) = J_{\mathbb{B}}^0((k-1)h)$ . В противном случае осуществляются стандартные процедуры двойственного симплекс-метода.

После построения  $J_{\mathbb{B}}^0(kh)$  и сигналов  $u^*(jh), j \in J(kh)$ , формируется множество  $J_{\mathbb{B}}^*((k+1)h)$ :  $J_{\mathbb{B}}^*((k+1)h) = J_{\mathbb{B}}^*(kh) \cap J_{\mathbb{B}}^0(kh)$ , если  $\{k, k+N, \dots, k+(r-1)N\} \cap J_{\mathbb{B}}^0(kh) = \emptyset$ , и  $J_{\mathbb{B}}^*((k+1)h) = J_{\mathbb{B}}^*(kh) \cap J_{\mathbb{B}}^0(kh) \cup J_0$ , если  $\{k, k+N, \dots, k+(r-1)N\} \cap J_{\mathbb{B}}^0(kh) \neq \emptyset$ , где  $J_0$  – элементы пересечения, и вычисляется значение  $x^0((k+1)h)$  состояния в момент  $(k+1)h$  математической модели задачи.

На основании результатов вычислений, оптимальный регулятор подает на вход объекта управления управляющее воздействие:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u^0(kh | (k-1)h, x^*((k-1)h)), & t \in [kh, kh + s(kh)[, \\ u^*(kh), & t \in t \in [kh + s(kh), (k+1)h[, \end{cases}$$

где  $s(kh)$  – время решения задачи (49).

Поскольку  $\tilde{u}(t) = u^*(t) + \Delta u(t), t \in T$ , где  $\Delta u(t) = u^*(t) - \tilde{u}(t)$ , то под действием управляющих воздействий, создаваемых оптимальным регулятором, поведение физического объекта управления описывается уравнением:

$$\dot{x} = Ax + Bu^0(t, x) + w + w_0,$$

где  $w_0(t) = B\Delta u(t), t \in [kh, (k+1)h[$ , – возмущение, порожденное неточностью реализации регулятором оптимальной обратной связи. Это возмущение отлично от тождественного нуля на  $[kh, (k+1)h[$ , если  $u^0(kh | (k-1)h, x^*((k-1)h)) \neq u^0(kh | kh, x^*(kh))$ , и тем меньше, чем меньше  $s(kh)$ .

### 2.3 Вычислительный эксперимент

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления с функцией возмущения следующего вида:  $a \sin(bt)$ , приведем ее к функциональному виду, найдем её оптимальный план и построим траектории  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$

$$J(u) = x_1(4) \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = u_2(t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0, \end{cases}$$

$$|u_j(t)| \leq 2, j = \overline{1,2}, t \in [0,4],$$

$$x_1(4) + x_2(4) = 2,$$

$$w(t) = a \sin(bt), a = 0.3; 0.6; 0.9, b = 3.$$

Будем рассматривать возмущение только для первой координаты.

Программа, решающая исходную задачу, написана на языке программирования Matlab, для различных  $N, r, m$ . Программа находится в Приложении 1

Проиллюстрируем результаты для функции возмущения:  $w(t) = 0.9 \sin(3t)$ .

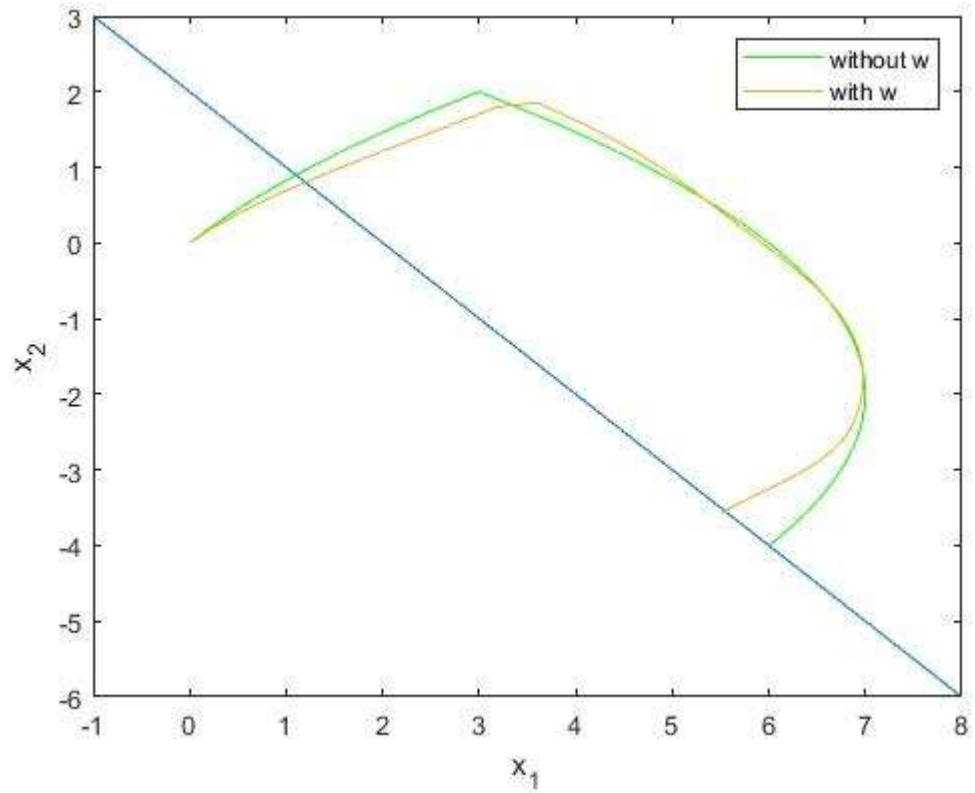


Рисунок 2.1 – Фазовые траектории

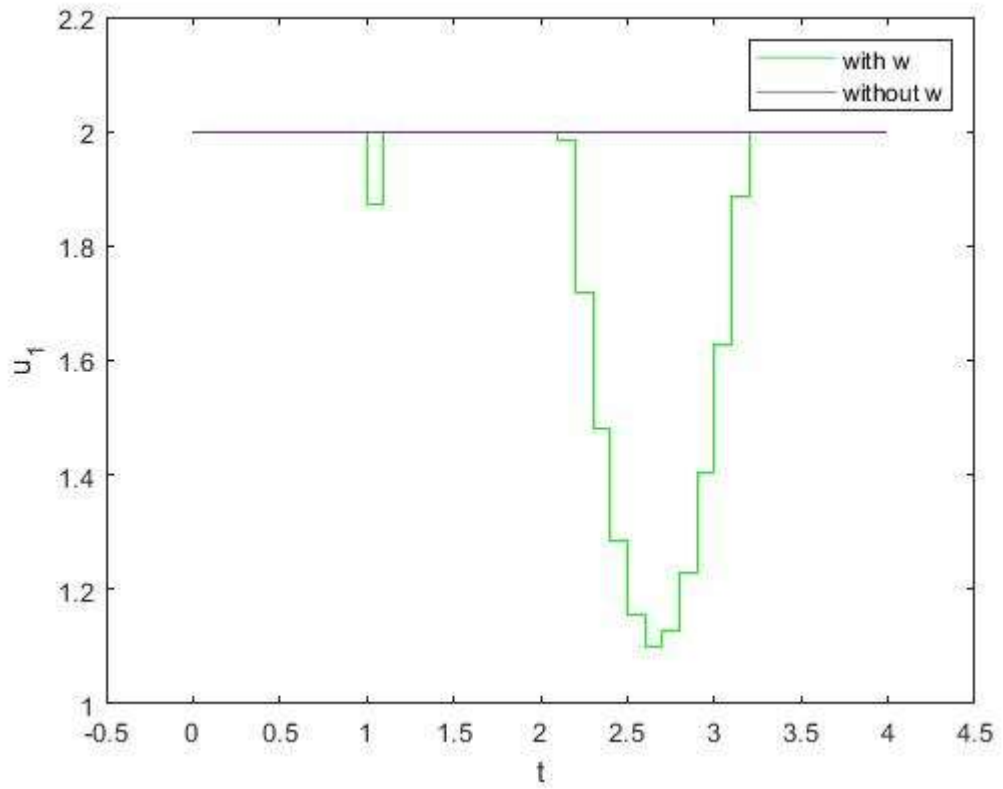


Рисунок 2.2 – Первая компонента оптимального управления



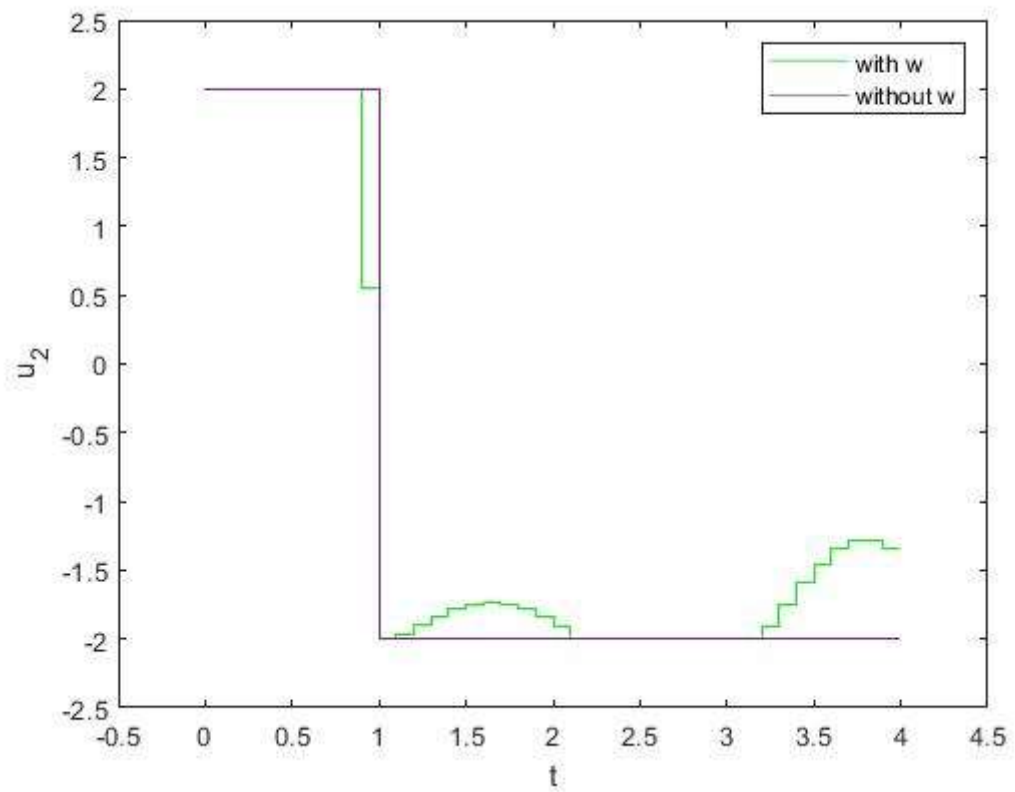


Рисунок 2.3 – Вторая компонента оптимального управления

Проиллюстрируем результаты для функции возмущения:  $w(t) = 0.6 \sin(3t)$ .

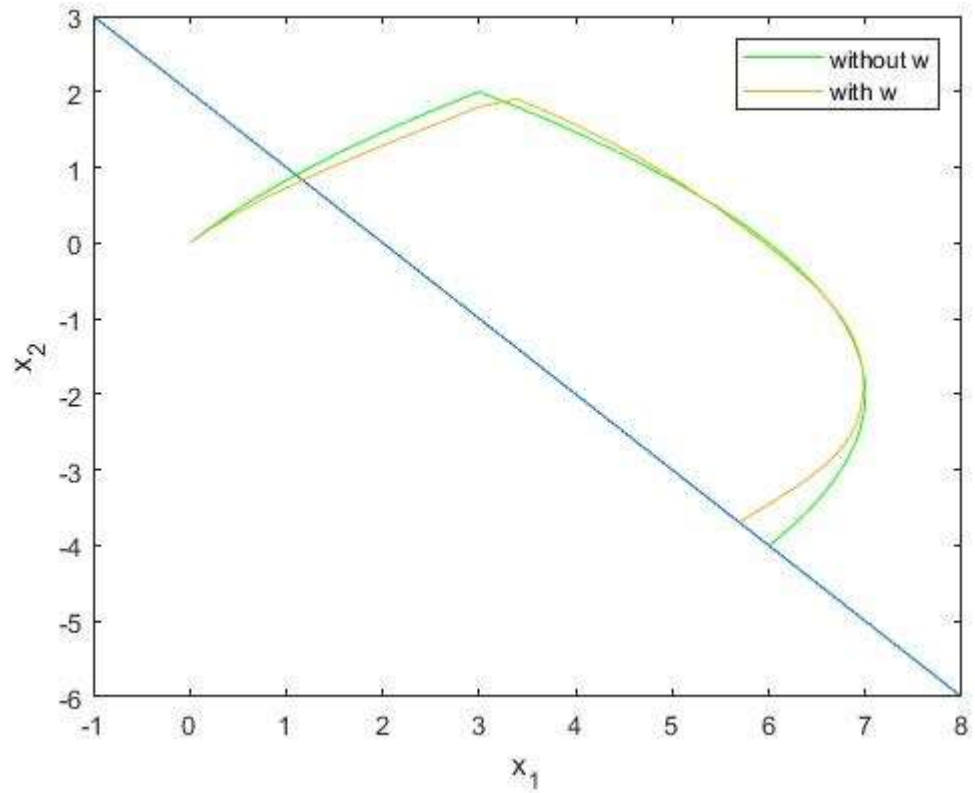


Рисунок 2.4 – Фазовые траектории

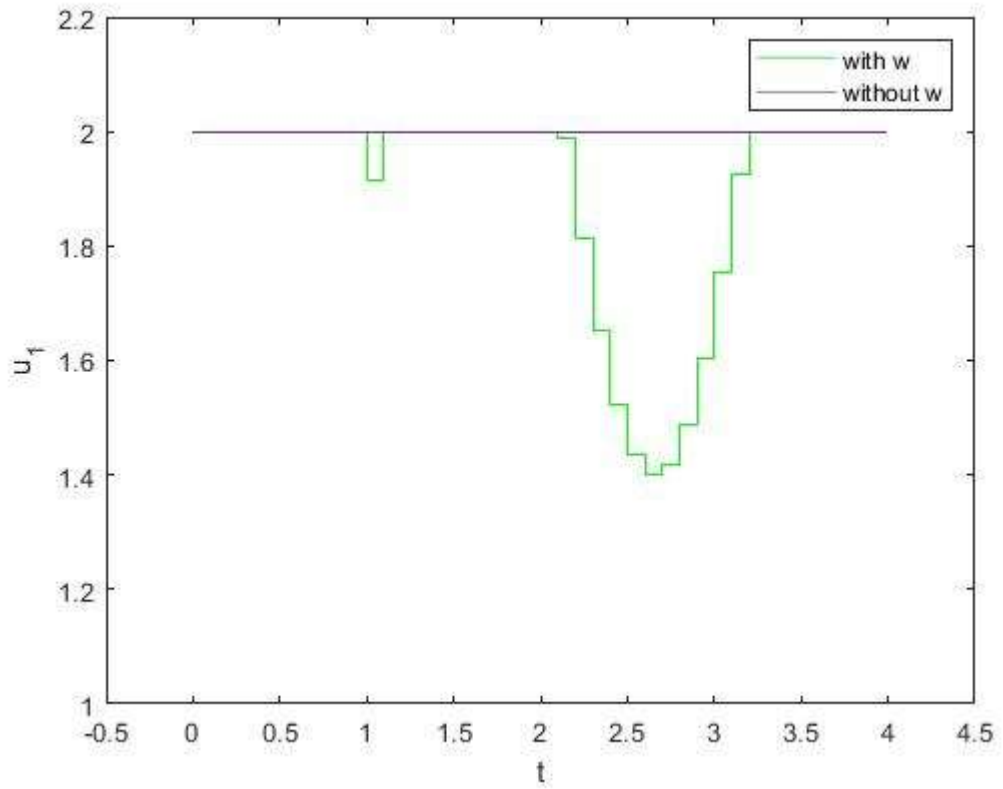


Рисунок 2.5 – Первая компонента оптимального управления

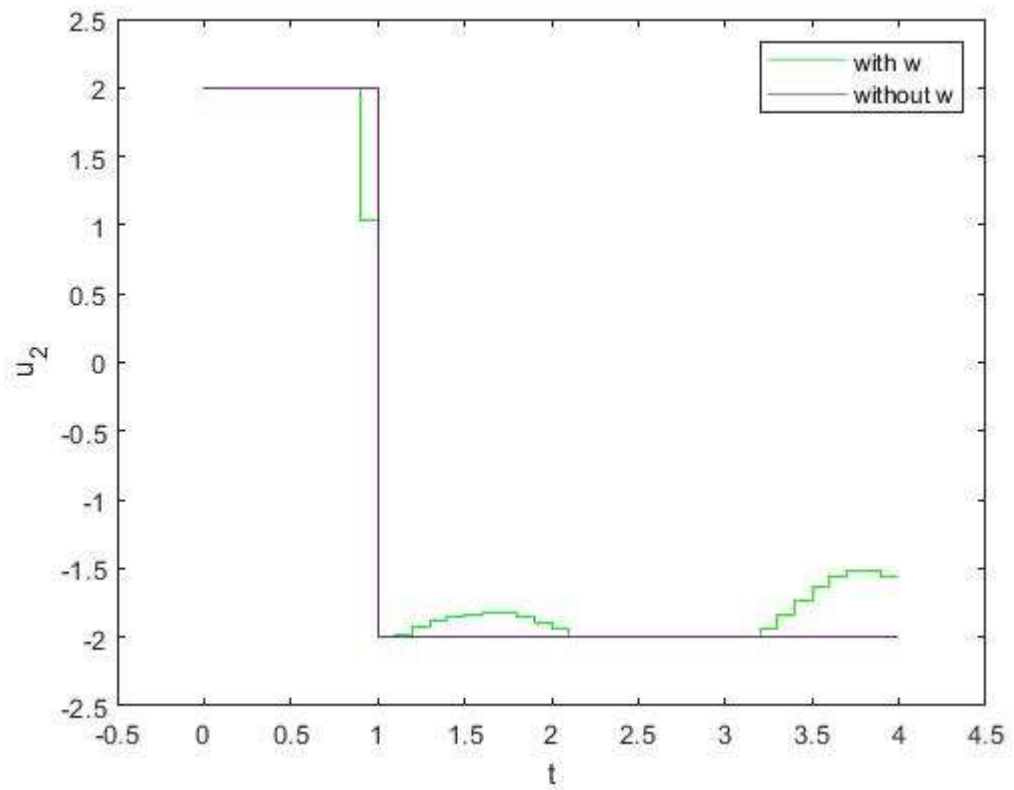


Рисунок 2.6 – Вторая компонента оптимального управления

Проиллюстрируем результаты для функции возмущения:  $w(t) = 0.3 \sin(3t)$ .

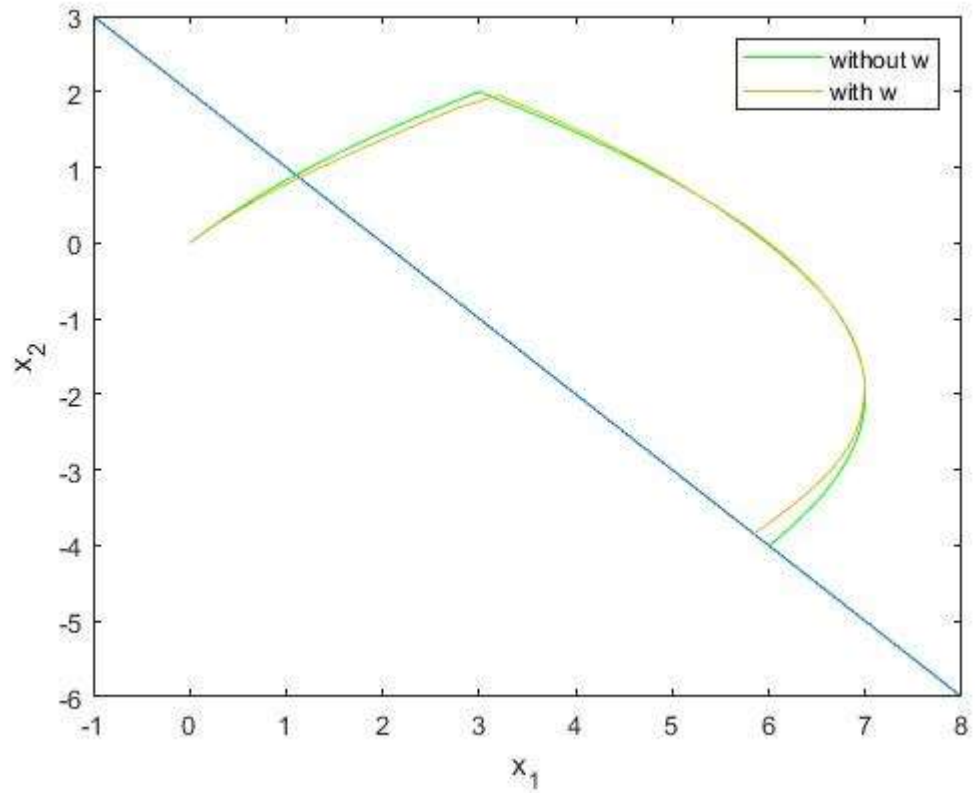


Рисунок 2.7 – Фазовые траектории

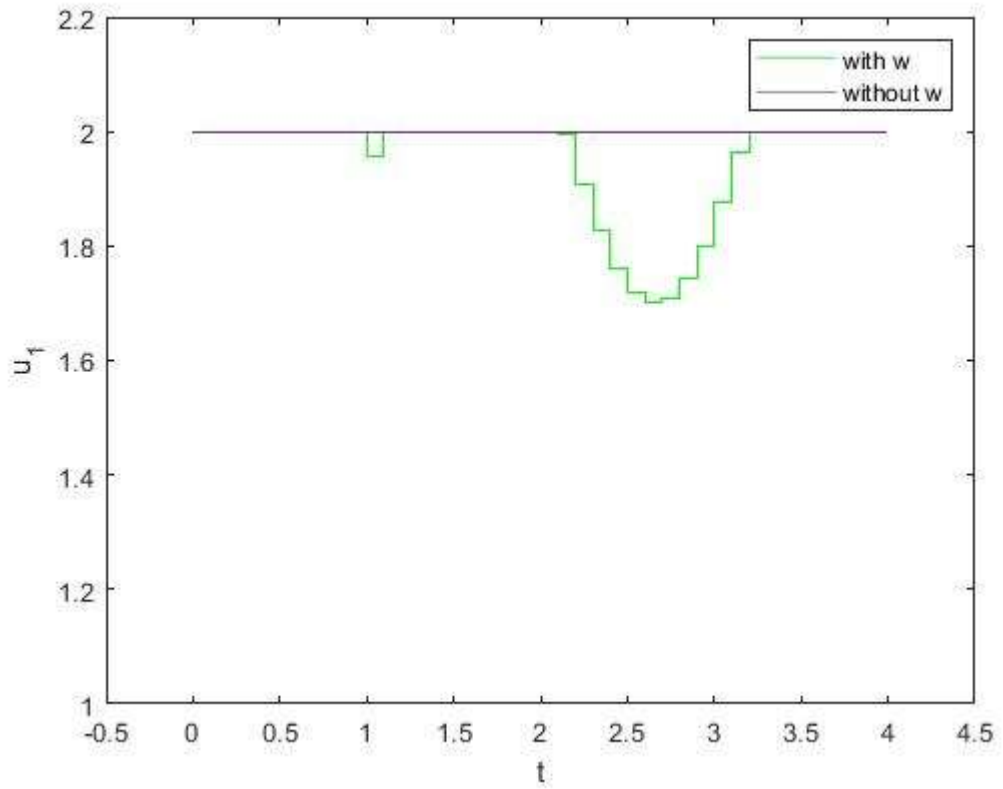


Рисунок 2.8 – Первая компонента оптимального управления

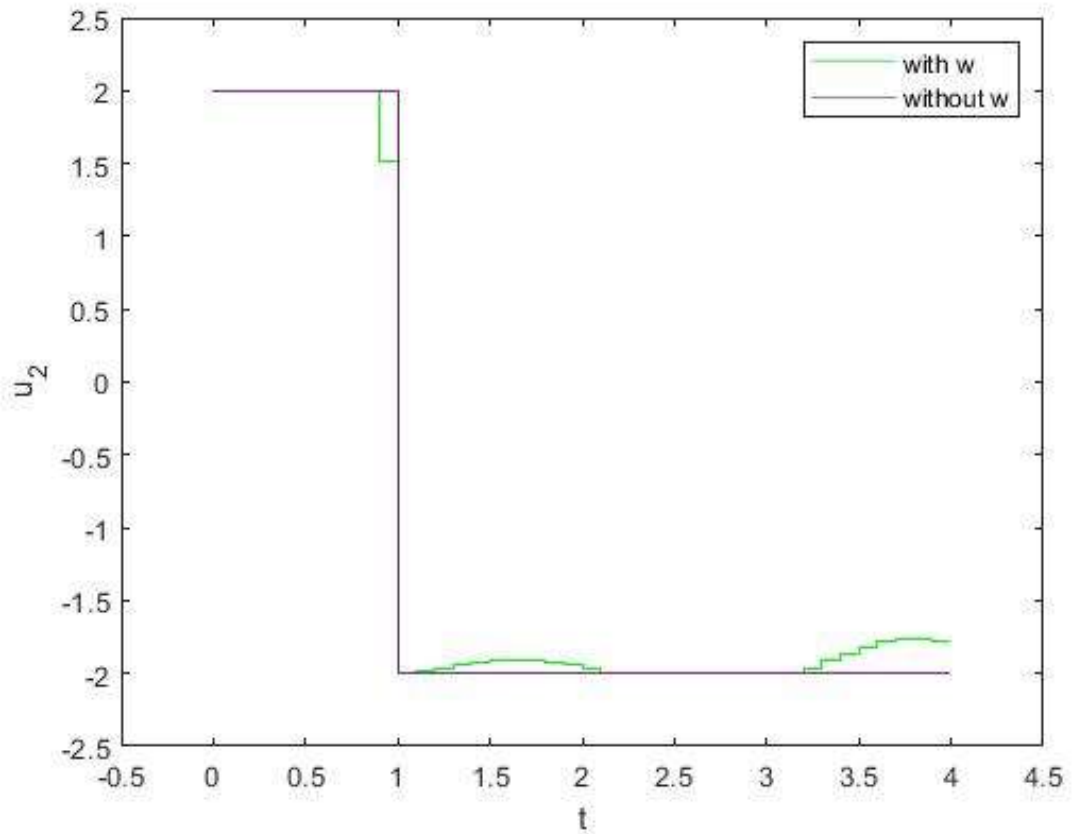


Рисунок 2.9 – Вторая компонента оптимального управления

Значения  $x_1(t), x_2(t)$  в конечный момент времени:

	$x_1(t_f)$	$x_2(t_f)$
$w(t) = 0$	6	-4
$w(t) = 0.3 \sin(3t)$	5.8383	-3.8544
$w(t) = 0.6 \sin(3t)$	5.6766	-3.7088
$w(t) = 0.9 \sin(3t)$	5.5149	-3.5632

Видно, что чем меньше функция возмущения, тем меньше и отклонение траектории и оптимального управления от реального. Значение критерия качества задачи с функцией возмущения меньше реального.

## Заключение

В ходе дипломной работы были проведены следующие исследования:

- 1) проведен обзор литературы по исследуемой теме;
- 2) для исследуемой задачи доказаны дискретные критерии оптимальности программного управления.
- 3) разработан алгоритм построения оптимального регулятора
- 4) для теоретических исследований реализован вычислительный эксперимент, построена программа.

## Список литературы

1. Понтрягин, Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Физматлит, 1983.
2. Габасов, Р. Методы оптимизации / Р. Габасов и др. – Минск: Четыре четверти, 2011.
3. Габасов, Р. Оптимизация непрерывных динамических систем с запаздыванием в классе дискретных управляющих воздействий / Р. Габасов, В.В. Альсевич, Д.В. Русакова // Междунар. конф. «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация» к 95-летию со дня рожд. акад. Е.А. Барбашина: тез. докл. Междунар. конф. Минск, 1–5 окт. 2013 г. – Мн.: БГУ, 2013. – С. 103-105.
4. Габасов, Р. Оптимизация линейных систем: Методы функционального анализа / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. – Мн.: Изд-во БГУ, 1973.

## Приложение 1

```
A = [0 1;
      0 0];
b = [1 0;
      0 1];
L = [2; 2];
c = [1 0]';
H = [1 1];
index = 1;
index1 = 1;
g = 2;
t0 = 0;
tf = 4;
N = 40;
x0 = [0 0]';

r = size(b, 2);
m = size(H, 1);

h = (tf - t0) / N;

lb = [];
ub = [];

F = @(t) expm(A*t);

w = @(t) 0.3 * sin(3 * t);
%-----

xKoshiWithoutW = zeros(2, N + 1);
xKoshiWithoutW(:, 1) = x0;

uResWithoutW1 = [];
uResWithoutW2 = [];

uRes1 = [];
uRes2 = [];

xKoshi = zeros(2, N + 1);
xKoshi(:, 1) = x0;

time = t0:h:tf;

for i = 1:N
    t1 = i*h;
    cDiskr = zeros((N - i + 1) * r, 1);
    dDiskr = zeros((N - i + 1) * r, 1);
    chArray = zeros(1, N - i + 1);
    dhArray = zeros(1, N - i + 1);
    for k = 1:N - i + 1
        for j = 1:r
            forC = @(t) c' * F(tf) * inv(F(t)) * b(:, j);
```



```

        ch = @(s) integral(forC, s, s+h, 'ArrayValued',
true);
        forD = @(t) H * F(tf) * inv(F(t)) * b(:, j);
        dh = @(s) integral(forD, s, s + h, 'ArrayValued',
true);
        cDiskr(index) = ch(t0 + h * (k - 1));
        dDiskr(index) = dh(t0 + h * (k - 1));
        index = index + 1;
    end
end

for f = 1:r
    lb = [lb; repmat(-L(f), N - i + 1, 1)];
    ub = [ub; repmat(L(f), N - i + 1, 1)];
end

g_WithoutW = g - H * F(tf - t0) * xKoshiWithoutW(:, i);
g_ = g - H * F(tf - t0) * xKoshi(:, i);

uWithoutW = linprog(-cDiskr, [], [], dDiskr', g_WithoutW,
lb, ub);
u = linprog(-cDiskr, [], [], dDiskr', g_, lb, ub);

interForKoshi = @(t) (F(t1 - t) * b);

vWithoutW = [uWithoutW(1); uWithoutW(2)];
xKoshiWithoutW(:, i + 1) = F(h) * xKoshiWithoutW(:, i) + in-
tegral(interForKoshi, t1 - h, t1, 'ArrayValued', true) * vWith-
outW;

v = [u(1); u(2)] + [w(t1); 0];
xKoshi(:, i+1) = F(h) * xKoshi(:, i) + integral(interForKoshi,
t1-h, t1, 'ArrayValued', true) * v;

uResWithoutW1 = [uResWithoutW1, uWithoutW(1)];
uResWithoutW2 = [uResWithoutW2, uWithoutW(2)];

uRes1 = [uRes1, u(1)];
uRes2 = [uRes2, u(2)];

t0 = t0 + h;
lb = [];
ub = [];
index = 1;
index1 = index1 + 1;
end

plot(-0.05, 2.05);
hold on
plot(4.05, 1.05);
p1 = stairs(time', [uRes2, uRes2(N)] , '-');
p2 = stairs(time', [uResWithoutW2, uResWithoutW2(N)] , '-');

```

```
set(p1,'Color','red')
set(p1,'Color','blue')
legend([p1, p2],{'with w','without w'})
xlabel('t')
ylabel('u_2')
% plot([-1; 8], [3; -6]);
% hold on
% p1 = plot(xKoshiWithoutW(1,:),xKoshiWithoutW(2,:));
% p2 = plot(xKoshi(1,:),xKoshi(2,:));
% set(p1,'Color','red')
% set(p1,'Color','green')
% legend([p1, p2],{'without w','with w'})
% xlabel('x_1')
% ylabel('x_2')
```