УДК 519.712.2

В. А. МОЩЕНСКИЙ, Ч. Н. РОЛИЧ

ОБ АВТОМАТИЗАЦИИ ПОСТРОЕНИЯ ПРОГРАММ ПО ОПЕРАТОРНЫМ ТЕРМАМ, ЗАДАЮЩИМ ВЫЧИСЛИМЫЕ ФУНКЦИИ

Описанные в [1, 2] принципы синтеза программ основаны на дедуктивном подходе, при котором для построения программы используется логическое доказательство утверждения, что решение этой задачи существует (о других подходах см. в [1. С. 15]).

В данной работе предлагается автоматическое построение программ по операторным термам [3. С. 44], задающим вычислимые функции.

Наш подход состоит в следующем. Для данной вычислимой функции f, для которой будем строить программу и выполнять вычисления по ней, ищем задающий ее операторный терм T_f. Этот терм представляет собой выражение, состоящее из операторных символов примитивной рекурсии $\boldsymbol{R}$, минимизации $\boldsymbol{M}$ и суперпозиции $\boldsymbol{S}^i$, а также предметных символов простейших функций $\boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{I}^n_m$. Операторный терм T_f является входным данным для программы П, которая выдает программу P_f для функции f. Программа П работает следующим образом. Имея в своем распоряжении программы для $\boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{I}^n_m$, подпрограммы для операторов $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{S}^i$, она по операторному терму T_f выдает программу P_f. Создание программы P_f принципиальных трудностей не вызывает. По нашему мнению, особого внимания заслуживает поиск терма T_f для данной вычислимой функции, что может быть выполнено различными способами. Мы предлагаем сводить нахождение этого терма к ранее построенному терму при помощи указанных операций. Это сведение потребует, естественно, математической изобретательности, и чем оригинальнее будет выполнено сведение, тем проще будет сама программа.

В самом деле, пусть требуется построить описанным способом программу для вычисления функции $f(x, y) = (x+y)^2 - 2\min(x, y)$. В таком случае вначале необходимо строить операторные термы для составляющих функций, в частности для функции $\min(x, y)$. Для функции $\min(x, y)$ имеются, например, следующие представления:

$$\min(x, y) = x \dot{-} (x \dot{-} y),$$

$$\min(x, y) = y \cdot \mathrm{sg}(x \dot{-} y) + x \cdot \overline{\mathrm{sg}}(x \dot{-} y).$$

Таким образом, результирующее операторное представление для функции f будет проще, если для функции $\min(x, y)$ использовать 1-е представление. В общем случае чем «дальше удалена» исследуемая функция от простейших, тем бóльший простор для изобретательности.

Теперь уточним понятие «удаление». Положим

$$P_a = \{\boldsymbol{s}(x),\ \boldsymbol{o}(x)\} \cup \{\boldsymbol{I}_m^{(n)}(\widetilde{x^n}) \mid 1 \leqslant n \leqslant a\},$$

где $a \geqslant 2$*), т. е., множество P_a содержит $\boldsymbol{s}(x)$, $\boldsymbol{o}(x)$ и все простейшие функции выбора аргументов меньше, чем от $a(a \geqslant 2)$ переменных. Ясно, что

$$|P_a| = 2 + (1+2+\ldots+a) = 2 + a(a+1)/2.$$

Последовательность функций

$$f_1, f_2, \ldots, f_m \qquad (1)$$

назовем выводом, если каждая $f_i (1 \leqslant i \leqslant m)$ является функцией из множества P_a или получается из функций $f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots, f_{j_k}$ этой последовательности, предшествующих функции f_i, т. е. $j_p < i$ $(p = 1, 2, \ldots, k)$ с помощью одного из операторов $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{M}$. Вывод (1) называется выводом функции f_m. Пусть в этой последовательности используется ровно $n(n \geqslant$

* Такой выбор a необходим для того, чтобы в нижеследующем определении вывода возможно было бы применить операцию примитивной рекурсии.

$\geqslant 0$) этих операторов. Тогда будем говорить, что функция f_m из вывода (1) находится на расстоянии m от функций множества P_a. Далее, через $L(a, k)$ обозначим число различных функций, которые находятся на расстоянии не более k ($k \geqslant 0$) от функций множества P_a. Очевидно, что $L(a, 0) = |P_a|$, потому что все функции в множестве P_a попарно различны.

Теорема. Для любого $k \geqslant 0$ при фиксированном $a (a \geqslant 2)$ выполнено неравенство

$$L(a, k+1) \leqslant L(a, k)(2+k+a(a+1)/2)(3+k+a(a+1)/2+ \\ +(k+(a+1)(a+2)/2)^a/a!).$$

Доказательство. Пусть функция f_m находится на расстоянии k ($k \geqslant 0$) от функций множества P_a и ее вывод суть $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Тогда в этом выводе имеется не более $k+|P_a|$ различных функций; положим $q = k+|P_a|$. Чтобы этот вывод преобразовать в вывод функции, находящейся на расстоянии $k+1$ от функций из P_a, необходимо применить одну из операций $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{M}$. Очевидно, что операции $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{R}$ можно применить не более чем q и q^2 различными способами соответственно. Чтобы применить операцию $\boldsymbol{S}$, требуется выбрать внешнюю функцию (q способов) и вместо ее аргументов подставить другие функции из этой последовательности. Так как операторы $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{M}$ в нашем случае не могут породить функции с числом аргументов большим, чем в используемых функциях, то максимальное число аргументов у функции из рассматриваемой последовательности равно a. Следовательно, подставляемые функции могут быть выбраны не более чем H_q^a способами. Следовательно,

$$L(a, k+1) \leqslant L(a, k)(q+q^2+qH_q^a) = qL(a, k)(1+q+H_q^a).$$

Имеем число сочетаний с повторениями $H_q^q = \binom{q+a-1}{a} < \frac{(q+a-1)^a}{a!}$,

так как a фиксировано. Тогда , подставляя $\frac{(q+a-1)^a}{a!}$ вместо H_q^a и значение q ($q = k+2+a(a+1)/2$) в последнее неравенство, получаем требуемую оценку для $L(a, k+1)$.

Теорема доказана. Из этой теоремы непосредственно вытекает

Следствие. Для любого $m \geqslant 0$ при фиксированном $a (a \geqslant 2)$ справедливо неравенство

$$L(a, m) \leqslant (2+m+a(a+1)/2)^{m+1}(3+m+a(a+1)/2+ \\ +(m+(a+1)(a+2)/2)^a/a!)^m.$$

Список литературы

1. Тыугу Э. Х. Концептуальное программирование. М., 1985.
2. Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М., 1983.
3. Мальцев А. И. Алгоритм и рекурсивные функции. М., 1986.

Поступила в редакцию 06.03.88.