УДК 517.926

Р. А. ПРОХОРОВА, Н. А. ИЗОБОВ

О НЕУСТОЙЧИВЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ Р. КОНТИ

Рассмотрим вещественные системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \ x \in \boldsymbol{R}^n, \ t \geqslant 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами и матрицей Коши $X_A(t, \tau)$.

Определение Р. Конти [1, 2]. Будем говорить, что система (1) принадлежит множеству M^pS с числом $p>0$ (соответственно множеству L^pS (см. также [3. С. 169—214])), и обозначать $A \in M^pS$ ($A \in L^pS$), если выполнено условие

$$\int\limits_t^\infty \| X_A(t, \tau) \|^p d\tau \leqslant c_p(A) = \mathrm{const} < \infty, \ t \geqslant 0 \tag{2}$$

(соответственно условие $\int\limits_0^t \| X_A(t, \tau) \|^p d\tau \leqslant \mathrm{const} < \infty, \ t \geqslant 0$).

Эти множества играют важную роль в асимптотической теории линейных систем [4]. Свойства множеств L^pS исследованы [1—8] значительно полнее по сравнению с множествами M^pS. Цель настоящей работы — получить аналогичные [8] свойства множеств M^pS.

Введем в рассмотрение множества: $T_\alpha(t) = \{\tau \in [t, \infty[: \| X_A(t, \tau) \| \geqslant \alpha > 0\}$, $T^\alpha(t) = [t, \infty[\setminus T_\alpha(t)$, $T_\alpha(t, \Theta) = T_\alpha(t) \cap [t, \Theta]$, $T^\alpha(t, \Theta) = T^\alpha(t) \cap [t, \Theta]$, являющиеся в силу непрерывности матрицы $X_A(t, \tau)$ измеримыми.

Лемма. Линейная система (1) принадлежит множеству M^pS, $p>0$, тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$\int\limits_{T_1(t)} \| X_A(t, \tau) \|^p d\tau \leqslant c, \ t \geqslant 0; \ \ \mathrm{mes}\, T_\alpha(t) \leqslant c(\alpha) < \infty, \ t \geqslant 0, \tag{3—4}$$

для некоторого $\alpha \in (0, 1)$.

Доказательство. Необходимость условий (3) и (4) очевидна. Докажем их достаточность. Зафиксируем произвольное $t \geqslant 0$. Построим на промежутке $[t, \infty[$ по начальной точке $t_0 = t$ последовательность (t_k) точек $t_{i+1} = \inf\{\tau \geqslant 1 + t_i : \| X_A(t_i, \tau) \| \leqslant \alpha\}$, $i \geqslant \widetilde{0}$, со свойством $1 < t_{i+1} - t_i \leqslant 1 + c(\alpha)$, $i \geqslant 0$, справедливым по построению и в силу условия (4). Для произвольного $\Theta \in [t_k, t_{k+1})$ имеем оценки

$$\int\limits_t^\Theta \| X_A(t, \tau) \|^p d\tau \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{pi} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \| X_A(t_i, \Theta) \|^p d\tau + \alpha^{pk} \int\limits_{t_k}^{\Theta} \| X_A(t_k, \tau) \|^p d\tau. \tag{5}$$

Для произвольных τ_1 и τ_2, удовлетворяющих условию $t\leqslant\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant\tau_1+1+c(\alpha)$, оценим с помощью неравенств (3) и (4) следующий интеграл:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\|X_A(\tau_1,\tau)\|^p d\tau\leqslant\int_{T_1(\tau_1,\tau_2)}\|X_A(\tau_1,\tau)\|^p d\tau+$$

$$+\int_{T^1(\tau_1,\tau_2)}\|X_A(\tau_1,\tau)\|^p d\tau\leqslant c+c(\alpha)\equiv b,$$

поэтому из (5) получим требуемое неравенство

$$\int_t^{\Theta}\|X_A(t,\tau)\|^p d\tau\leqslant b\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^{pi}=b(1-\alpha^p)^{-1}\equiv c_p(A),\ t\leqslant\Theta<\infty.$$

Лемма доказана.

Следствие 1. Включение $M^{p+\varepsilon}S\subset M^pS$ справедливо при любых $p>0$, $\varepsilon>0$.

Замечание. Как и в случае множеств L^pS [1], справедливо свойство $M^pS\setminus M^{p+\varepsilon}S\neq\varnothing$, если $p\geqslant1$, $\varepsilon>0$. Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть скалярное уравнение $\dot x=-\dot f(t)/f(t))x$, $f(t)=e^t(1+g(t))^{-1}$, где $g(t)$ — функция из примера Р. Конти [1], применив к нему те же оценки, что и в [1].

Класс систем из M^pS с ограниченными матрицами $A(t)$ $(\|A(t)\|\leqslant\leqslant a<\infty,\ t\geqslant0)$ обозначим через CM^pS.

Следствие 2. Если $A\in CM^pS$, то нижний особый показатель [9. С. 109—118] $\omega_0(A)$ системы (1) положителен.

Следствие 3. При любых $p>0$ и $\varepsilon>0$ справедливо равенство $CM^pS=CM^{p+\varepsilon}S$.

Теорема. Множество M^pS линейных систем (1) совпадает со своей внутренностью $\operatorname{Int}M^pS$ тогда и только тогда, когда $p\geqslant1$.

Доказательство. *Достаточность:* $p\geqslant1\Rightarrow\operatorname{Int}M^pS=M^pS$.

Пусть $A\in M^pS$, $p\geqslant1$. Покажем, что $(A+B)\in M^pS$ для любой матрицы $B(t)$ с нормой $\|B(t)\|\leqslant\varepsilon(A)$, $\varepsilon(A)>0$.

В силу следствия 1 справедливо включение $A\in M^1S$. Докажем, что $(A+B)\in M^1S$ при $\varepsilon(A)\leqslant\dfrac{1}{2c_1(A)}$. Зафиксируем произвольное $\Theta>0$ и введем обозначение $J(t,\Theta;A;p)=\int_t^{\Theta}\|X_A(t,\tau)\|^p d\tau$, $0\leqslant t\leqslant\Theta$. Установим неравенство

$$J(t,\Theta;A+B;1)\leqslant2c_1(A),\ \|B(t)\|\leqslant\varepsilon(A),\ t\in[0,\Theta].\tag{6}$$

Предположим противное: существуют такие матрицы $B(t)$, $\|B(t)\|\leqslant\leqslant\varepsilon(A)$, при $t\in[0,\Theta]$ и момент времени $t_1\in(0,\Theta)$, что

$$J(t_1,\Theta;A+B;1)=2c_1(A),\ J(t,\Theta;A+B;1)<2c_1(A),\ t\in[t_1,\Theta].\tag{7}$$

Используя формулу Коши и меняя порядок интегрирования в двойном интеграле, получаем в силу неравенства из (7) оценки

$$J(t_1,\Theta;A+B;1)\leqslant\int_{t_1}^{\Theta}\|X_A(t_1,\tau)\|d\tau+$$

$$+\int_{t_1}^{\Theta}d\tau\int_{t_1}^{\tau}\|X_A(t_1,\xi)\|\,\|B(\xi)\|\,\|X_{A+B}(\xi,\tau)\|d\xi\leqslant c_1(A)+$$

$$+\varepsilon(A)\int_{t_1}^{\Theta}\|X_A(t_1,\xi)\|d\xi\int_{\xi}^{\Theta}\|X_{A+B}(\xi,\tau)\|d\xi<c_1(A)+2\varepsilon(A)c_1^2(A)\leqslant2c_1(A),$$

противоречащие равенству из (7). Из установленного неравенства (6) следует оценка

$$\int_t^{\infty}\|X_{A+B}(t,\tau)\|d\tau\leqslant2c_1(A),\ t\geqslant0,\tag{8}$$

и включение $(A+B)\in M^1S$.

Покажем теперь, что $(A+B)\in M^pS$ и для $p>1$, если $\|B(t)\|\leqslant\varepsilon_1(A)$ при всех $t\geqslant 0$ и некотором $\varepsilon_1(A)>0$. Функция $J(t, \Theta; A+B; p)$ аргумента t является непрерывной на отрезке $[0, \Theta]$, поэтому существует момент $\eta\in[0, \Theta]$, в котором эта функция принимает наибольшее значение на указанном отрезке. Обозначим $J(\Theta)\equiv J(\eta, \Theta; A+B; p)$.

Зафиксируем некоторое $\alpha\in\left(0, \frac{1}{2}\right]$ и для него следующим образом построим последовательность отрезков $[\eta_{2k}, \eta_{2k+1}]\subset[\eta, \Theta]$, $\eta_0=\eta$, $k\geqslant 0$. Первый максимальной длины отрезок $[\eta_0, \eta_1]\subset[\eta, \Theta]$ таков, что на нем выполнено $\|X(\eta_0, t)\|\geqslant\alpha$. В силу оценки (8) имеем $\eta_1-\eta_0\leqslant 2c_1(A)/\alpha$. Если этот отрезок не совпадает с отрезком $[\eta, \Theta]$, что мы и будем предполагать, то $\|X(\eta_0, \eta_1)\|=\alpha$. Для построения второго отрезка через η_2' обозначим первый после η_1 момент (считаем его принадлежащим отрезку $[\eta, \Theta]$, в противном случае построения закончены), для которого $\|X_{A+B}(\eta_0, \eta_2')\|=\alpha$. Тогда η_2 есть последний на отрезке $[\eta_1, \eta_2']$ момент, для которого $\|X_{A+B}(\eta_0, \eta_2)\|=\alpha$. Рассмотрим теперь непрерывную на отрезке $[\eta_2, \Theta]$ функцию $\|X_{A+B}(\eta_2, t)\|$. Очевидно, $\|X_{A+B}(\eta_2, t)\|\geqslant 1$ для $t\in[\eta_2, \eta_2']$ (в противном случае имели бы $\|X_{A+B}(\eta_0, t)\|<\alpha$) и $\|X_{A+B}(\eta_2, \eta_2')\|\geqslant\geqslant 1/\alpha$. Через η_3 обозначим такой наибольший, принадлежащий $(\eta_2, \Theta]$ момент, для которого на отрезке $[\eta_2, \eta_3]$ выполнено неравенство $\|X_{A+B}(\eta_2, t)\|\geqslant\alpha$ и, если $\eta_3<\Theta$, равенство $\|X_{A+B}(\eta_2, \eta_3)\|=\alpha$. При этом, как и выше, в силу (8), справедлива оценка $\eta_3-\eta_2\leqslant 2c_1(A)/\alpha$.

Аналогично приведенному построению отрезка $[\eta_2, \eta_3]$ построим отрезки $[\eta_{2k}, \eta_{2k+1}]\subset[\eta, \Theta]$, $k>1$, и принадлежащие им моменты η_{2k}', для которых выполнено

$$\|X_{A+B}(\eta_{2k}, t)\|\geqslant\alpha,\ t\in[\eta_{2k}, \eta_{2k+1}];\ \|X_{A+B}(\eta_{2k}, \eta_{2k+i})\|=\alpha,\ k\geqslant 1,\ i=1,2; \tag{9}$$

$$\|X_{A+B}(\eta_0, t)\|<1,\ t\in[\eta_{2k-1}, \eta_{2k}],\ k\geqslant 1;\ \|X_{A+B}(\eta_0, \eta_{2k}')\|=1,\ k\geqslant 2;$$

$$\eta_{2k+1}-\eta_{2k}\leqslant 2c_1(A)/\alpha,\ k\geqslant 1.$$

Покажем, что этот индуктивный процесс построения отрезков $[\eta_{2k}, \eta_{2k+1}]\subset[\eta, \Theta]$ является конечным. Действительно, в противном случае имели бы точку $t_0\in[\eta, \Theta]$, для которой $\{\eta_k\}\uparrow t_0$ и $\|X_{A+B}(\eta_0, \eta_{2m})\|\leqslant\leqslant\alpha^m\to 0$ при $m\to\infty$, $\|X_{A+B}(\eta_0, \eta_{2m}')\|=1$ при $\eta_{2m}'\in(\eta_{2m}, \eta_{2m+1})$. Это же противоречит свойству непрерывности функции $\|X_{A+B}(\eta_0, t)\|$ в точке $t=t_0$. Обозначим объединение этих принадлежащих $[\eta, \Theta]$ отрезков $[\eta_{2k}, \eta_{2k+1}]$ через T. По построению справедливы оценки

$$\|X_{A+B}(\eta, t)\|\leqslant\alpha^k\|X_{A+B}(\eta_{2k}, t)\|,\ t\in\Delta_k\equiv[\eta_{2k}, \eta_{2k+1}]. \tag{10}$$

По определению множества T и на основании оценки (6) имеем неравенства

$$J(\Theta)\equiv J(\eta, \Theta; A+B; p)\leqslant 2c_1(A)+\int_T\|X_{A+B}(\eta, \tau)\|^p d\tau\equiv 2c_1(A)+J_1(\Theta). \tag{11}$$

Применяя неравенства (8), (10) и оценку

$$\|X_{A+B}(t, \tau)\|\leqslant\|X_A(t, \tau)\|+\varepsilon_1(A)\int_t^\tau\|X_A(t, \xi)\|\,\|X_{A+B}(\xi, \tau)\|\,d\xi,\ 0\leqslant t\leqslant\tau,$$

для матрицы Коши $X_{A+B}(t, \tau)$, а затем неравенство $(a+b)^p\leqslant 2^{p-1}(a^p+b^p)$, $p\geqslant 1$, $a, b>0$, получаем

$$J_1(\Theta)=\sum_k\int_{\Delta_k}\|X_{A+B}(\eta, \tau)\|^p d\tau\leqslant\sum_k\alpha^{kp}\int_{\Delta_k}\|X_{A+B}(\eta_{2k}, \tau)\|^p d\tau\leqslant$$

$$\leqslant 2^{p-1}\sum_k \alpha^{kp}\int_{\Delta_k}\Big\{\|X_A(\eta_{2k},\ \tau)\|^p+[\varepsilon_1(A)]^p\times$$

$$\times\Big[\int_{\eta_{2k}}^{\tau}\|X_A(\eta_{2k},\ \xi)\|\,\|X_{A+B}(\xi,\ \tau)\|\,d\xi\Big]^p\Big\}\,d\tau.$$

Используя неравенство Гельдера, последнее условие в (9), а затем меняя порядок интегрирования в двойном интеграле, приходим к неравенству

$$J_1(\Theta)\leqslant 2^{p-1}\sum_k \alpha^{kp}\{c_p(A)+$$

$$+\varepsilon_1^p(2c_1/\alpha)^{p-1}\int_{\Delta_k}\int_{\eta_{2k}}^{\tau}\|X_A(\eta_{2k},\ \xi)\|^p\,\|X_{A+B}(\xi,\ \tau)\|^p\,d\xi d\tau\}\leqslant$$

$$\leqslant 2^{p-1}\sum_k \alpha^{kp}\{c_p(A)+\varepsilon_1(2\varepsilon_1c_1/\alpha)^{p-1}\int_{\eta_{2k}}^{\eta_{2k+1}}\|X_A(\eta_{2k},\ \xi)\|^p\times$$

$$\times\int_{\xi}^{\eta_{2k+1}}\|X_{A+B}(\xi,\ \tau)\|^p\,d\tau d\xi\}\leqslant 2^pc_p[1+\varepsilon_1(2\varepsilon_1c_1/\alpha)^{p-1}J(\Theta)].$$

Отсюда и в силу неравенства (11) при достаточно малом $\varepsilon_1=\varepsilon_1(A)$ имеем окончательную оценку $J_1(\Theta)\leqslant c_p(A+B)=\mathrm{const}<+\infty$, следовательно, включение $(A+B)\in M^pS$. Достаточность доказана.

Необходимость. $\mathrm{Int}\,M^pS=M^pS\Rightarrow p\geqslant 1$.

Предположим противное: $p\in(0,\ 1)$. Докажем, что существует такая система $A\in M^pS$, что для любого $\varepsilon>0$ существует матрица $B_\varepsilon(t)$, $\|B_\varepsilon(t)\|\leqslant\varepsilon$, $t\geqslant 0$, такая, что $(A+B_\varepsilon)\notin M^pS$.

Рассмотрим систему (1) с матрицей $A(t)=\mathrm{diag}[a_1(t),\ a_2(t)]$, $t\geqslant 0$,

$$\text{где } a_1(t)=\begin{cases}1+(-1)^i p^{-1}k\ln k, & t\in[k-i/k,\ \ k-(i-1)/k)\equiv[\alpha_i,\ \alpha_{i-1}),\\ i=2,\ 3,\ k\geqslant 4;\\ 1 \text{ для остальных } t\geqslant 0.\end{cases}$$

$a_2(t)=a_1(t-1/k)$, $t\in[k-1,\ k)$, $k\geqslant 4$, и $a_2(t)=1$ для остальных $t\geqslant 0$.

Докажем, что $A\in M^pS$. Для этого предварительно установим неравенство

$$R_l(t,\ \Theta)\equiv\int_t^{\Theta}\exp\int_{\tau}^{t}pa_l(\xi)\,d\xi d\tau\leqslant 1+2/p,\ \ k-1\leqslant t\leqslant\Theta\leqslant k,\ \ l=1,\ 2. \quad (12)$$

Если $\Theta\leqslant\alpha_3$, то, очевидно, справедливо неравенство $R_1(t,\ \Theta)\leqslant 1/p$. Пусть $\Theta\in[\alpha_3,\ k]$, $k\geqslant 4$. Оценим $R_1(t,\Theta)$ в зависимости от расположения t:

1) если $t\geqslant\alpha_2$, то $R_1(t,\ \Theta)$ также удовлетворяет оценке $R_1(t,\ \Theta)\leqslant\dfrac{1}{p}$;

2) если $t\in[\alpha_3,\ \ \alpha_2]$, то $R_1(t,\ \Theta)\leqslant R_1(\alpha_3,\ \ k)=R_1(\alpha_3,\ \ \alpha_2)+\int_{\alpha_2}^{k}\exp\times$

$$\times\int_{\tau}^{\alpha_3}pa_1(\xi)\,d\xi d\tau\leqslant\int_{\alpha_3}^{\alpha_2}\exp\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}(p-k\ln k)\,d\xi d\tau+\int_{\alpha_2}^{k}\exp p(\alpha_3-\tau)\,d\tau\leqslant 1+1/p;$$

3) если $t<\alpha_3$, то $R_1(t,\Theta)=R_1(t,\ \alpha_3)+\int_{\alpha_3}^{\Theta}\exp\Big\{\int_{\tau}^{\alpha_3}pa_1(\xi)\,d\xi+\int_{\alpha_3}^{t}pa_1(\xi)d\xi\Big\}d\tau\leqslant$

$$\leqslant\frac{1}{p}+R_1(\alpha_3,\ \ k)\leqslant 1+\frac{2}{p}.$$

Оценка (12) в случае $l=1$ доказана. Аналогично устанавливается оценка (12) для $l=2$. Из (12) следует неравенство

$$\int\limits_{t}^{\Theta} \| X_A(t, \tau) \|^p d\tau \leqslant 2(1+2/p) \equiv c_p, \quad k-1 \leqslant t \leqslant \Theta \leqslant k. \tag{13}$$

Пусть теперь $t \in [k-1, k]$ и $\Theta \in [m, m+1]$, $m > k$. Тогда на основании неравенства (13) и оценки $\| X_A(t, l) \| \leqslant e^{t-l}$, $l=k, \ldots, m$, получаем неравенство

$$\int\limits_{t}^{\Theta} \| X_A(t, \tau) \|^p d\tau \leqslant \int\limits_{t}^{k} \| X_A(t, \tau) \|^p d\tau + \int\limits_{k}^{k+1} \| X_A(t, k) \|^p \| X_A(k, \tau) \|^p d\tau +$$

$$+ \ldots + \int\limits_{m}^{\Theta} \| X_A(t, m) \|^p \| X_A(m, \tau) \|^p d\tau \leqslant c_p [1 + e^{p(t-k)} + \ldots + e^{p(t-m)}] \leqslant$$

$$\leqslant c_p \left(1 + \sum_{i=0}^{\infty} e^{-pi} \right) = c_p \frac{2e-1}{e-1} < 3c_p.$$

Отсюда и следует требуемое включение $A \in M^p S$.

Рассмотрим теперь возмущенную систему $\dot{x} = [A + B_\varepsilon(t)]\, x$, где у матрицы $B_\varepsilon(t)$ элемент $b_{12}(t) = \varepsilon$, $t \geqslant 0$, а все остальные равны 0. Для матрицы Коши $X_{A+B_\varepsilon}(t, \tau)$ справедлива оценка

$$\| X_{A+B_\varepsilon}(t, \tau) \| \geqslant \varepsilon \exp \int\limits_{\tau}^{t} a_1(\eta)\, d\eta \times \int\limits_{t}^{\tau} \exp \int\limits_{\tau}^{\xi} (a_2(\eta) - a_1(\eta))\, d\eta d\xi, \quad \tau \geqslant t,$$

поэтому при $\alpha_1, \alpha_3 \in [k-1, k]$ имеем неравенство

$$\int\limits_{\alpha_3}^{\alpha_1} \| X_{A+B_\varepsilon}(\alpha_3, \tau) \|^p d\tau \geqslant \varepsilon^p \int\limits_{\alpha_3}^{\alpha_1} \exp \int\limits_{\tau}^{\alpha_3} p a_1(\eta)\, d\eta \Bigl(\int\limits_{\alpha_3}^{\tau} \exp \int\limits_{\tau}^{\xi} (a_2(\eta) - a_1(\eta)) d\eta d\xi \Bigr)^p d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \varepsilon^p \int\limits_{\alpha_2}^{\alpha_1} \exp \Bigl[\int\limits_{\alpha_2}^{\alpha_3} (p - k \ln k)\, d\eta + \int\limits_{\tau}^{\alpha_2} (p + k \ln k) d\eta \Bigr] \times$$

$$\times \Bigl[\int\limits_{\alpha_2}^{\tau} \exp \int\limits_{\tau}^{\xi} (-2p^{-1} k \ln k)\, d\eta d\xi \Bigr]^p d\tau \geqslant$$

$$\geqslant c(p)\, \varepsilon^p \int\limits_{\alpha_2}^{\alpha_1} k \exp k \ln k (\alpha_2 - \tau) \Bigl[\int\limits_{\alpha_2}^{\tau} \exp 2p^{-1} k \ln k (\tau - \xi)\, d\xi \Bigr]^p d\tau \equiv F(k),$$

где $c(p) > 0$ — универсальная постоянная, зависящая лишь от p. Пусть $2\delta \in (0, 1-p)$. Тогда, вычислив внутренний интеграл в $F(k)$, получим оценку

$$F(k) \geqslant c(p)\, \varepsilon^p \int\limits_{\alpha_2+\beta}^{\alpha_1} k^{-p} \ln^{-p} k [\exp 2p^{-1} k \ln k (\tau - \alpha_2) - 1]^p d\tau \geqslant$$

$$\geqslant c(p)\, \varepsilon^p k^{-p} \ln^{-p} k [\exp p^{-1} (1 + p + \delta) \ln k - 1]\, (\alpha_1 - \alpha_2 - \beta) \geqslant$$

$$\geqslant c(p)\, \varepsilon^p k^{\delta} \ln^{-p} k \to +\infty$$

при $k \to \infty$, где $\beta = (1 + p + \delta)/2k$. Отсюда следует, что $(A + B_\varepsilon) \notin M^p S$, при всяком $\varepsilon > 0$. Необходимость, а с нею и теорема доказаны.

Список литературы

1. C o n t i R. // Tôhoku Math. Journ. Second Ser. 1980. V. 32. № 2. P. 279.
2. C o p p e l W. A. // Journ. London Math. Soc. 1964. V. 39. P. 255.
3. Д а л е ц к и й Ю. Л., К р е й н М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.
4. C o n t i R. // Funkcialay Ekvacioj. 1966. V. 9. P. 23.
5. C o n t i R. // Colloquium Math. 1967. V. 18. P. 73.
6. C o p p e l W. A. Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations. Boston, 1965.

7. Conti R. Linear Differential Equations and Control. New York, 1976.
8. Изобов Н. А., Прохорова Р. А. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 5. С. 775.
9. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова. М., 1966.

Поступила в редакцию 14.11.87.

УДК 518.61

ДИНЬ КУАНГ ТХАЙ, П. И. МОНАСТЫРНЫЙ, НГУЕН ФЫОНГ МАЙ

О ПОНИЖЕНИИ ПОРЯДКА СИСТЕМ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ В АЛГОРИТМАХ МНОЖЕСТВЕННОЙ РАЗНОСТНОЙ ПРИСТРЕЛКИ И НЕКОТОРЫХ ИХ СВОЙСТВАХ

1. В теории метода сеток и в многочисленных его приложениях важное место занимают вопросы разработки вычислительных алгоритмов для решения специальных сеточных граничных задач [1—3], в частности задач вида:

$$\vec{Y}_{j+1} + C_j\vec{Y}_j + B_j\vec{Y}_{j-1} = \vec{F}_j, \quad j = \overline{1, N-1}, \tag{1}$$

$$G_0\vec{Y}_0 + G_1\vec{Y}_1 = \vec{g}_0, \qquad H_1\vec{Y}_N + H_0\vec{Y}_{N-1} = \vec{h}_N, \qquad (2)—(3)$$

где $C_j = (c_{ik}(j))_1^M$, $B_j = (b_{ik}(j))_1^M$, $\vec{F}_j \in R^M$ — известные матрицы и векторы; $G_s = (g_{ik}(s))_1^M$, $H_s = (h_{ik}(s))_1^M$, $s = 0, 1$, $\vec{g}_0$, $\vec{h}_N \in R^N$ — заданные матрицы и векторы; $\vec{Y}_j \in R^M$, $j = \overline{0, N}$ — векторы, подлежащие определению.

Если никаких специальных и довольно частых ограничений на матрицы B_j, C_j, H_s, G_s не накладывать, то для численного решения задачи (1)—(3) нельзя будет применить практически ни одного эффективного алгоритма [1, 3, 4], предназначенного, например, для решения родственных задач в случае эллиптических разностных уравнений. Сеточная задача (1)—(3) представляет собой систему ЛАУ (линейные алгебраические уравнения) размерности $r = M(N+1)$ и r во многих случаях может быть очень большим. Это обстоятельство, в частности, при численном решении систем ЛАУ может стать причиной переполнения разрядной сетки ЭВМ, большого накопления погрешностей и т. д. Актуальна поэтому задача построения таких алгоритмов, в которых снижалась бы размерность систем ЛАУ и улучшались бы их свойства. Такие алгоритмы можно построить, используя идею множественной разностной пристрелки [5, 6, 7].

2. Пусть $N = mp + 1$, где число m определяет количество подынтегралов пристрелки, а число p — их длину [6]. Для многих задач, например, границы изменения $2 \leqslant m \leqslant 10$ являются типичными. Определим точки и параметры пристрелки: $j = 0,1$; p, $p+1$, ...; mp, $mp+1$ и $\vec{Y}_0$, $\vec{Y}_1$; $\vec{Y}_p$, $\vec{Y}_{p+1}$; ...; $\vec{Y}_{mp}$; $\vec{Y}_{mp+1}$. Возьмем в качестве начальных значений параметров пристрелки $\vec{Y}_0^{(0)}$, $\vec{Y}_1^{(0)}$; ...; $\vec{Y}_{mp}^{(0)}$, $\vec{Y}_{mp+1}^{(0)}$ и найдем решения разностных задач Коши на подынтервалах пристрелки $[(l-1)p,\ (l-1)p+1;\ lp,\ lp+1]$, $l = \overline{1, m}$. Используя условия непрерывности решения задачи (1)—(3), обычным путем [5] получим замыкающую систему вида:

$$A\vec{Y} = \vec{\Phi}, \tag{4}$$

где $\vec{Y} = (\vec{Y}_0^{(0)}, \vec{Y}_1^{(0)}, \vec{Y}_p^{(0)}, \ldots, \vec{Y}_{mp}^{(0)}, \vec{Y}_{mp+1}^{(0)}) \in R^{2(m+1)M}$, $\vec{\Phi} = (-\vec{g}_0, \vec{\Phi}_p^{(0)}, \vec{\Phi}_{p+1}^{(0)}, \ldots, \vec{\Phi}_p^{(m-1)}, \vec{\Phi}_{p+1}^{(m-1)}, \vec{h}_N) \in R^{2(m+1)M}$, а матрица A является блочной и четырехдиагональной, первая и последняя строки которой состоят из блоков типа $Q_p^{(l)}$, $Q_{p+1}^{(l)}$, $P_p^{(l)}$, $P_{p+1}^{(l)}$, $-E$, $l = \overline{0, m-1}$. В целях экономии