Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2019;1:28–32
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2019;1:28–32

УДК 517.926.4

О СПЕКТРАХ ВЕРХНИХ ЧАСТОТ СЕРГЕЕВА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. С. ВОЙДЕЛЕВИЧ [1)]

[1)]*Институт математики НАН Беларуси,*
ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Беларусь

Известно, что спектры (множества значений) верхних и нижних частот Сергеева нулей, знаков и корней линейного дифференциального уравнения порядка выше двух с непрерывными коэффициентами принадлежат классу суслинских множеств неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой. Более того, для спектров верхних частот уравнений третьего порядка ранее доказано обращение этого результата в предположении принадлежности спектрам нуля. В настоящей работе получено обращение сформулированного утверждения для уравнений четвертого порядка и выше. А именно для произвольного содержащего нуль суслинского подмножества S неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой и натурального числа n, большего 3, построено линейное дифференциальное уравнение порядка n, спектры верхних частот Сергеева нулей, знаков и корней которого совпадают с множеством S.

Ключевые слова: линейное дифференциальное уравнение; спектр верхних частот Сергеева нулей; спектр верхних частот Сергеева знаков; спектр верхних частот Сергеева корней; суслинское множество.

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (договор № Ф17-102).

ON SPECTRA OF UPPER SERGEEV FREQUENCIES OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. S. VAIDZELEVICH [a]

[a]*Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus,*
11 Surhanava Street, Minsk 220072, Belarus

It is known that the spectra (ranges) of upper and lower Sergeev frequencies of zeros, signs, and roots of a linear differential equation of order greater than two with continuous coefficients belong to the class of Suslin sets on the nonnegative half-line of the extended real line. Moreover, for the spectra of upper frequencies of third-order equations this result was inverted under the assumption that the spectra contain zero. In the present paper we obtain an inversion of the above statement for equations of the fourth order and higher. Namely, for an arbitrary zero-containing Suslin subset S on the nonnegative half-line of the extended real line and a positive integer number n greater than three a n order linear differential equation is constructed, which spectra of the upper Sergeev frequencies of zeros, signs, and roots coincide with the set S.

Key words: linear differential equation; spectrum of the upper Sergeev frequencies of zeros; spectrum of the upper Sergeev frequencies of signs; spectrum of the upper Sergeev frequencies of roots; Suslin set.

Acknowledgements. The work was performed with financial support from the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (agreement No. Ф17-102).

Образец цитирования:
Войделевич АС. О спектрах верхних частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;1:28–32.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-28-32

For citation:
Vaidzelevich AS. On spectra of upper Sergeev frequencies of linear differential equations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;1:28–32. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-28-32

Автор:
Алексей Сергеевич Войделевич – кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений.

Author:
Aliaksei S. Vaidzelevich, PhD (physics and mathematics); senior researcher at the department of differential equations.
voidelevich@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-7466-4761

Введение

Для заданного натурального n через $\widetilde{\mathcal{E}}^n$ обозначим множество линейных однородных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\,\dot{y} + a_n(t)\,y = 0,\ \ t \in \mathbb{R}_+ \stackrel{\text{def}}{=} [0, +\infty), \tag{1}$$

с непрерывными коэффициентами $a_i(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ i = \overline{1, n}$. Будем отождествлять уравнение (1) и строку $a = a(\cdot) = \big(a_1(\cdot), \ldots, a_n(\cdot)\big)$ его коэффициентов и поэтому обозначать уравнение (1) также через a. Пусть $S(a)$ – множество решений уравнения a, $S_*(a)$ – множество его ненулевых решений, т. е. $S_*(a) = S(a)\setminus\{0\}$.

Для ненулевого решения $y(\cdot)$ уравнения (1) точка $t \in \mathbb{R}_+$ называется точкой смены знака, если в любой окрестности этой точки функция $y(\cdot)$ принимает значения разных знаков. Нуль t функции $y(\cdot)$ называется корнем кратности k, если в точке t ее первые $k - 1$ производных равны нулю, а k-я производная отлична от нуля.

Символом $\varkappa$ обозначим величину, принимающую значения во множестве $\{0, -, +\}$. Для ненулевого решения $y(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ уравнения $a \in \widetilde{\mathcal{E}}^n$ через $\nu^{\varkappa}\big(y(\cdot);\, t\big)$ обозначим число нулей, если $\varkappa = 0$; число смен знака, если $\varkappa = -$; сумму кратностей корней, если $\varkappa = +$, функции $y(\cdot)$ на полуинтервале $[0, t)$. Очевидно, что величины $\nu^{\varkappa}\big(y(\cdot);\, t\big)$ при любом $t \geq 0$ конечны.

Определение 1 [1; 2]. Верхней частотой Сергеева нулей ($\hat{\nu}^0[y]$), знаков ($\hat{\nu}^-[y]$) и корней ($\hat{\nu}^+[y]$) решения $y(\cdot) \in S_*(a)$ уравнения (1) называется величина

$$\hat{\nu}^{\varkappa}[y] \stackrel{\text{def}}{=} \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{\pi}{t}\,\nu^{\varkappa}\big(y(\cdot);\, t\big), \tag{2}$$

где символ $\varkappa$ равен 0, – и + соответственно.

Определение 2. Спектрами $\hat{\nu}^0\big(S_*(a)\big)$, $\hat{\nu}^-\big(S_*(a)\big)$ и $\hat{\nu}^+\big(S_*(a)\big)$ верхних частот Сергеева нулей, знаков и корней уравнения (1) называются множества, состоящие из верхних частот Сергеева нулей, знаков и корней всех решений из $S_*(a)$ соответственно.

Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется [3, с. 213; 4, с. 489] суслинским множеством прямой $\mathbb{R}$, если оно является непрерывным образом множества иррациональных чисел, рассматриваемого в естественной топологии. Множество $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ – суслинское множество расширенной числовой прямой, если оно представимо в виде объединения суслинского множества прямой $\mathbb{R}$ и некоторого (в том числе и пустого) подмножества множества $\{-\infty, +\infty\}$.

Как следует из теоремы Штурма и отмечено в [1; 2], спектры верхних частот Сергеева нулей, знаков и корней уравнения первого порядка содержат только нуль, а уравнения второго порядка совпадают между собой и состоят из одного неотрицательного числа. В работе [5] доказано, что спектры верхних частот Сергеева нулей, знаков и корней линейного дифференциального уравнения порядка выше двух принадлежат классу суслинских множеств неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой, и получено обращение этого утверждения для спектров верхних частот уравнений третьего порядка в предположении принадлежности спектрам нуля.

Естественно возникает вопрос, насколько точным является приведенное в [5] описание спектров верхних частот Сергеева уравнений порядка выше трех. В настоящей работе в предположении принадлежности спектрам нуля установлена точность указанного описания.

Результаты и их обсуждение

Для доказательства основного результата приведем и докажем ряд вспомогательных утверждений.

Утверждение 1. Пусть $x(\cdot)$ – решение уравнения

$$x^{(n)}(t) = b_0(t) + \sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1}(t)\,x^{(j)}(t),\ t \geq 0, \tag{3}$$

где $b_j(\cdot),\ j = \overline{0, n}$, – непрерывные функции, определенные при $t \geq 0$ и принимающие положительные значения.

Тогда если $x^{(j)}(0) > 0,\ j = \overline{0,\ n-1}$, то при всех $t \ge 0$ верны неравенства $x^{(i)}(t) > 0,\ \ i = \overline{0,\ n},$ и

$$x(t) \ge \int\limits_0^t dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt_2 \ldots \int\limits_0^{t_{n-1}} b_0(t_{n-1})\, dt_{n-1}. \tag{4}$$

Доказательство. Из равенства (3) следует, что $x^{(n)}(0) > 0$. Через T обозначим множество всех моментов времени $t > 0$, для которых существует такое $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, зависящее от t, что $x^{(k)}(t) = 0$. Докажем, что множество T пусто. Предположим противное. Нетрудно видеть, что T является замкнутым, а значит, корректно определен момент времени $t^* = \min T$. Так как $t^* \in T$, то $x^{(k)}(t^*) = 0$ для некоторого $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Более того, $x^{(i)}(t) > 0,\ \ i = \overline{0,\ n}$, при $t \in [0,\ t^*)$. Из равенства (3) следует, что $k < n$. Так как $x^{(k)}(t^*) = x^{(k)}(0) + \int\limits_0^{t^*} x^{(k+1)}(\tau)\, d\tau$, то $x^{(k)}(t^*) \ge x^{(k)}(0) > 0$. Данное противоречие показывает, что $x^{(i)}(t) > 0,\ i = \overline{0,\ n}$, при всех $t \ge 0$. Наконец, проинтегрировав n раз неравенство $x^{(n)}(t) \ge b_0(t)$, получаем неравенство (4).

Утверждение 2. Для произвольной локально ограниченной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ существует такая бесконечно дифференцируемая функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $g(t) > f(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Для произвольного целого числа k через $g_k(\cdot)$ обозначим такую функцию из класса $C^\infty(\mathbb{R})$, что $g_k \big|_{\mathbb{R}\setminus(k-1,\ k+2)} \equiv 0,\ \ g_k \big|_{[k,\ k+1]} \equiv 1$, а на интервалах $(k-1,\ k)$ и $(k+1,\ k+2)$ функция $g_k(\cdot)$ строго монотонно возрастает и убывает соответственно. Существование функции $g_k(\cdot)$ следует из [6, с. 54]. Через M_k обозначим $\sup\limits_{t \in [k,\ k+1]} f(t)$. Так как функция $f(\cdot)$ локально ограничена, то $M_k \in \mathbb{R}$. Наконец, рассмотрим функцию

$$g(t) \overset{\text{def}}{=} 1 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} M_k\, g_k(t),\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Непосредственная проверка показывает, что функция $g(\cdot)$ корректно определена, $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ и при всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $g(t) > f(t)$.

Лемма. *Для заданных функций $x_i \in C^n(\mathbb{R}_+)$, $i = \overline{1,\ n}$, вронскиан $W(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)(\cdot)$ которых отличен от нуля в каждой точке неотрицательной полуоси $\mathbb{R}_+$, существует такая положительная функция $x \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, что*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{x_i(t)}{x(t)} = 0,\ \ i = \overline{1,\ n},\ \text{и}\ W(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ x)(t) \ne 0\ \ \text{при}\ t \in \mathbb{R}_+.$$

Доказательство. Для произвольной функции $y \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ разложим определитель Вронского системы функций $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ по последнему столбцу:

$$W(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ y) = c_n y^{(n)} + c_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + c_0 y,$$

где $c_i(\cdot)$ – непрерывные на $\mathbb{R}_+$ функции, $i = \overline{0,\ n}$, при этом $c_n(\cdot) \equiv W(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)(\cdot)$.

Через $b_i(\cdot)$, $i = \overline{1,\ n}$, обозначим бесконечно дифференцируемую функцию, заданную на $\mathbb{R}_+$, для которой справедливо неравенство $b_i(t) \ge \max\left(1,\ -c_{i-1}(t)c_n^{-1}(t)\right)$ при всех $t \ge 0$. Пусть $h(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ – функция, удовлетворяющая при всех $t \ge 0$ неравенству $h(t) \ge \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i(t)|$. Выберем функцию $b_0(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ из условия $b_0(t) \ge \max\left(1,\ \left(t^{n+1} h(t)\right)^n\right)$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$. Существование функций $h(\cdot)$ и $b_i(\cdot)$, $i = \overline{0,\ n}$, следует из утверждения 2.

Пусть $x(\cdot)$ – произвольное решение уравнения (3) с положительными начальными данными. Тогда в силу утверждения 1 имеем

$$W(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ x) = c_n\left(x^{(n)} + \frac{c_{n-1}}{c_n} x^{(n-1)} + \ldots + \frac{c_0}{c_n} x\right) = c_n\left(b_0 + \sum_{j=0}^{n-1}\left(b_{j+1} + \frac{c_j}{c_n}\right) x^{(j)}\right) \ne 0.$$

Более того, из неравенства (4) следует неравенство $x(t) \ge t^{n+1}h(t)$ при всех $t \ge 0$, а значит, и равенство $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{x_i(t)}{x(t)} = 0,\ i = \overline{1,\, n}$. Наконец, так как коэффициенты уравнения (3) принадлежат классу $C^\infty(\mathbb{R}_+)$, то этому классу гладкости принадлежит и его решение $x(\cdot)$.

Утверждение 3. Для произвольных различных действительных чисел k_1, k_2 и натурального числа $n > 2$ найдется такая функция $x(\cdot) \in C^\infty([0,\, 1])$, что

$$\dot{x}(0) = k_1,\ \dot{x}(1) = k_2,\ x^{(i)}(0) = x^{(i)}(1) = 0,\ i = \overline{2,\, n},\ \text{и}\ \ddot{x}(t) \ne 0\ \text{при}\ t \in (0,\, 1).$$

Доказательство. Прямой проверкой легко убедиться, что функция

$$x(t) \stackrel{\text{def}}{=} k_1 t + \frac{k_2 - k_1}{B(n,\, n)} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\tau \xi^{n-1}(1-\xi)^{n-1} d\xi,\ t \in [0,\, 1],$$

где $B(n,\, n)$ – значение бета-функции, равное $\dfrac{\left((n-1)!\right)^2}{(2n-1)!}$, обладает необходимыми свойствами.

Перейдем к формулировке и доказательству основного результата работы.

Теорема. *Для произвольного суслинского множества $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, содержащего нуль, и натурального числа $n \ge 3$ существует уравнение $a \in \widetilde{\mathcal{E}}^n$, спектры верхних частот Сергеева нулей, знаков и корней которого совпадают с множеством $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Зафиксируем какое-либо суслинское множество $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, содержащее нуль. Методом математической индукции по n – порядку дифференциального уравнения – докажем более сильное утверждение. А именно покажем, что для любых натуральных чисел $m \ge n \ge 3$ найдется такое уравнение $a \in \widetilde{\mathcal{E}}^n$, удовлетворяющее условию теоремы, что все его решения принадлежат классу $C^m(\mathbb{R}_+)$.

С помощью утверждения 3 база индукции при $n = 3$ может быть установлена построениями, аналогичными приведенным в работе [5].

Предположим, что для некоторого n и произвольного $m \ge n$ построено такое уравнение $a \in \widetilde{\mathcal{E}}^n$, что $\hat{\nu}^0(S_*(a)) = \hat{\nu}^-(S_*(a)) = \hat{\nu}^+(S_*(a)) = \mathcal{A}$ и $S_*(a) \subset C^m(\mathbb{R}_+)$. Пусть $m \ge n + 1$. Выберем произвольную фундаментальную систему $\{x_1(\cdot),\, x_2(\cdot),\, \ldots,\, x_n(\cdot)\} \subset C^m(\mathbb{R}_+)$ решений уравнения a. Следуя доказанной лемме, дополним выбранную систему функцией $x_{n+1}(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$. Так как вронскиан $W(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{n+1})(t)$ отличен от 0 при $t \ge 0$, то существует уравнение $b \in \widetilde{\mathcal{E}}^{n+1}$ с фундаментальной системой решений $\{x_1(\cdot),\, x_2(\cdot),\, \ldots,\, x_{n+1}(\cdot)\}$. Докажем равенства

$$\hat{\nu}^0(S_*(b)) = \hat{\nu}^-(S_*(b)) = \hat{\nu}^+(S_*(b)) = \mathcal{A}. \tag{5}$$

Так как произвольное решение $x(\cdot)$ уравнения a является решением уравнения b, то имеют место включения $\mathcal{A} \subset \hat{\nu}^0(S_*(b))$, $\mathcal{A} \subset \hat{\nu}^-(S_*(b))$ и $\mathcal{A} \subset \hat{\nu}^+(S_*(b))$. Пусть $x(\cdot)$ – произвольное решение уравнения b, которое не является решением уравнения a. Тогда существуют такие постоянные $c_1,\, c_2,\, \ldots,\, c_{n+1}$, для которых справедливо равенство $x = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_{n+1}x_{n+1}$, при этом $c_{n+1} \ne 0$. Так как $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{x_i(t)}{x_{n+1}(t)} = 0$, $i = \overline{1,\, n}$, то при всех достаточно больших $t \ge 0$ значение $x(t)$ отлично от 0. Следовательно, $\hat{\nu}^0[x] = \hat{\nu}^-[x] = \hat{\nu}^+[x] = 0$. Поэтому из принадлежности $0 \in \mathcal{A}$ следуют равенства (5). Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. Сергеев ИН. Определение характеристических частот линейного уравнения. *Дифференциальные уравнения.* 2004; 40(11):1573.

2. Сергеев ИН. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения. В: *Труды семинара им. И. Г. Петровского. Выпуск 25.* Москва: Издательство Московского университета; 2006. с. 249–294.

3. Хаусдорф Ф. *Теория множеств.* Москва: ОНТИ; 1937.
4. Куратовский К. *Топология. Том 1*. Москва: Мир; 1966. 594 с.
5. Барабанов ЕА, Войделевич АС. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II. *Дифференциальные уравнения.* 2016;52(12):1595–1609.
6. Гелбаум Б, Олмстед Дж. *Контрпримеры в анализе.* Голубов БИ, переводчик. Москва: Мир; 1967.

References

1. Sergeev IN. Definition of characteristic frequencies of linear equation. *Differentsial'nye uravneniya*. 2004;40(11):1573. Russian.
2. Sergeev IN. The determination and properties of characteristic frequencies of linear equations. In: *Trudy seminara im. I. G. Petrovskogo. Vypusk 25*. Moscow: Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta; 2006. p. 249–294. Russian.
3. Hausdorff F. *Teoriya mnozhestv* [Set theory]. Moscow: Ob'edinennoe nauchno-tekhnicheskoe izdatel'stvo; 1937. Russian.
4. Kuratowski K. *Topology. Volume 1*. Jaworowski J, translator. New York: Academic Press; 1966. Co-published by the PWN-Polish Scientific Publishers.
Russian edition: Kuratowski K. *Topologiya. Tom 1*. Moscow: Mir; 1966. 594 p.
5. Barabanov EA, Voidelevich AS. Remark on the theory of Sergeev frequencies of zeros, signs, and roots for solutions of linear differential equations: II. *Differentsial'nye uravneniya*. 2016;52(12):1595–1609. Russian.
6. Gelbaum B, Olmsted J. *Counterexamples in analysis.* San Francisco: Holden-day; 1964. 200 p.
Russian edition: Gelbaum B, Olmsted J. *Kontrprimery v analize.* Golubov BI, translator. Moscow: Mir; 1967.

Статья поступила в редколлегию 21.06.2018.
Received by editorial board 21.06.2018.