ского ун-та. Сер. 1.: Физ. Мат. Мех. Минск, 1983. Деп. в ВИНИТИ 27.01.83. № 505-83.
4. Лебедев А. Л. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1986. № 1. С. 35.

Поступила в редакцию 13.02.87.

УДК 519.6

М. М. КОВАЛЕВ, НГУЕН НГИА

МНОГОГРАННИК МЕДИАН ГРАФА

Целые точки многогранника медиан графа служат допустимой областью дискретного аналога известной задачи Ферма—Вебера: в метрическом пространстве найти местоположение точек, сумма расстояний которых до данных k точек минимальна. Подмечено, что симплекс-метод на многограннике медиан графа почти всегда приводит к целочисленному оптимуму, в связи с чем Спинетто в 1976 г. сформулировал проблему: изучить строение целочисленных вершин многогранника медиан графа. Результаты работ [1—3] по частичному решению проблемы Спинетто обобщены в [4] (см. § 7); в [5] приведен критерий смежности целочисленных вершин. В предлагаемой статье дается полное решение проблемы Спинетто.

Многогранник $M(k, n)$ медиан графа задается условиями:

$$\sum_{j\in N} x_{ij}=1 \quad \forall_i \in N, \sum_{i\in N} x_{ii}=k, \qquad (1)—(2)$$

$$x_{ij}\leqslant x_{jj} \;\; \forall (i, j)\in N\times N,\; i\neq j, \qquad x_{ij}\geqslant 0 \;\; \forall (i, j)\in N\times N, \quad (3)—(4)$$

где $N=\{1, 2, \dots, n\}$.

Напомним (см. [4]), что многогранник M называется квазицелочисленным, если всякое ребро многогранника $\mathrm{conv}(M\cap Z^n)$ является ребром многогранника M. Многогранник называется связноцелочисленным, если подграф графа многогранника M, порожденный его целочисленными вершинами, является остовным подграфом графа многогранника $\mathrm{conv}(M\cap Z^n)$.

Перейдем к формулировке основной теоремы о структуре вершин многогранника k-медиан графа.

Теорема. Многогранник $M(k, n)$ k-медиан графа является

i) целочисленным при $k=1, n-1, n$;

ii) квазицелочисленным, но нецелочисленным при $k=2, 3, n-2$;

iii) связноцелочисленным, но не квазицелочисленным при $4\leqslant k\leqslant \leqslant n-3$. Доказательство теоремы основано на ряде лемм.

Лемма 1. Многогранник $M(n)$, заданный условиями (1), (3), (4), является квазицелочисленным.

Доказательство. Введя фиктивные переменные

$$y_{ij}\geqslant 0 \;\forall (i, j)\in N\times N,\; i\neq j, \qquad (5)$$

приведем ограничения (3) к виду:

$$x_{ij}-x_{jj}+y_{ij}=0 \;\forall (i, j)\in N\times N,\; i\neq j. \qquad (3')$$

Система ограничений (1), (3′), (4), (5) определяет в R^{2n^2-n} многогранник, который будем обозначать $M'(n)$. Сложением строк можем преобразовать систему ограничений, задающих многогранник $M'(n)$, к следующей эквивалентной форме: $\sum\limits_{j\in N} x_{ij}=1 \;\forall i\in N,\;\; x_{ij}+\sum\limits_{\substack{p\neq j\\ p\in N}} x_{jp}+y_{ij}=1$ $\forall (i, j)\in N\times N,\; i\neq j,\; x_{ij}\geqslant 0 \;\forall (i, j)\in N\times N,\; y_{ij}\geqslant 0\;\forall (i, j)\in N\times N,$ $i\neq j$. Последняя по теореме 7.2 из [4] определяет квазицелочисленный многогранник, откуда следует и квазицелочисленность многогранника $M(n)$.

Лемма 2 [1]. Все целочисленные точки многогранника — вершины целочисленных граней $F(\omega)=\{x\in M(k, n): x_{ii}=0 \;\; \forall i\in N\setminus\omega\}$ для каждого k-подмножества ω множества N.

Лемма 3 [4]. Пусть $\omega', \omega''\subset N$, $|\omega'\cap\omega''|=k-1$, x' и x'' — две целочисленные точки, принадлежащие соответственно граням $F(\omega')$ и $F(\omega'')$ многогранника $M(k, n)$. Тогда существует целочисленная грань $F(\omega', \omega'')$, содержащая как x', так и x''.

Доказательство теоремы.

i) Целочисленность многогранников $M(1, n)$ и $M(n, n)$ установлена в [1]. Покажем, что многогранник $M(n-1, n)$ определяется только ограничениями (1), (2), (4), а ограничения (3) являются их следствием. Действительно, если $x^0 = (x^0_{ij})$ удовлетворяет ограничениям (1), (2), (4), но не удовлетворяет ограничениям (3), то существуют такие $i_0, j_0 \in N$, $i_0 \neq j_0$, что $x^0_{i_0 j_0} > x^0_{j_0 i_0}$. Тогда, подставив $x = x^0$ в ограничения (1) при $i = i_0$, с учетом $x^0_{ij} \geqslant 0 \quad \forall (i, j) \in N \times N, k = n-1$, имеем $1 = \sum\limits_{j \in N} x^0_{i_0 j} = \sum\limits_{\substack{j \in N \\ j \neq i_0, j_0}} x^0_{i_0 j} + x^0_{i_0 i_0} + x^0_{j_0 j_0} > x^0_{i_0 i_0} + x^0_{j_0 j_0} \geqslant 1$. Полученное противоречие показывает, что x^0 должен удовлетворять ограничениям (3). Целочисленность многогранника $M(n-1, n)$ немедленно следует из абсолютной унимодулярности матрицы ограничений (1), (2), (4).

ii) Заметим, что многогранник $M(k, n)$ при $1 < k < n-1$ содержит дробную вершину x^{ps}, координаты которой определяются следующей формулой: $x_{ip} = \dfrac{n-k-1}{n-2}$, $i \in N$, $x_{jj} = \dfrac{k-1}{n-2}$, $j \neq p$, $x_{ps} = \dfrac{k-1}{n-2}$, $s \neq p$, $x_{ij} = 0$ для остальных (i, j).

Остается доказать квазицелочисленность $M(k, n)$ при $k=2, 3, n-2$. Поскольку любая целочисленная точка многогранника $M(k, n)$ является его вершиной, для доказательства квазицелочисленности достаточно показать, что всякое ребро $[x^1, x^2]$ многогранника $\mathrm{conv}(M(k, n) \cap Z^n)$ является ребром многогранника $M(k, n)$. Пусть $\omega_l = \{j : x^l_{jj} = 1, j \in N\}$, $l = 1, 2$.

Случай $k=2$ или $n-2$. Тогда в силу $|\omega_1 \cap \omega_2| \geqslant k-2$ имеет место одна из следующих возможностей: $|\omega_1 \cap \omega_2| = k-1$, k или $k-2$. В первом случае, согласно лемме 3, грань $F(\omega_1, \omega_2)$, содержащая x^1 и x^2, есть целочисленный многогранник. Поэтому $[x^1, x^2]$ — ребро $M(k, n)$. Во втором, по лемме 2, грань $F(\omega)$, где $\omega = \omega_1 = \omega_2$, содержит x^1 и x^2 и является целочисленным многогранником. Откуда следует, что $[x^1, x^2]$ также ребро $M(k, n)$. Наконец, если $|\omega_1 \cap \omega_2| = k-2$, рассмотрим грань минимальной размерности G многогранника $M(k, n)$, содержащую x^1 и x^2. Предположим, что $x^1_{ij} = x^2_{ij}$ для всех $(i, j) \in J_0 \subset N \times N$. Тогда $x_{ij} = x^1_{ij} \, \forall (i, j) \in J_0$ для любой точки $x = (x_{ij})$ этой грани, иначе существует грань меньшей размерности, содержащая x^1 и x^2. Подставив $x_{ij} = x^1_{ij}$, $(i, j) \in J_0$ в систему (1)—(4) и удалив ограничения, которые обратились в тождества, получим систему ограничений, определяющую вместе с фиксированными переменными грань G. В получившейся системе ограничений ограничения (2) можно эквивалентно заменить следующими: $x_{i_1 i_1} + x_{j_1 j_1} = 1$, $i_1 \in \omega_1 \setminus \omega_2$, $j_1 \in \omega_2 \setminus \omega_1$; $x_{i_2 i_2} + x_{j_2 j_2} = 1$, $i_2 \in \omega_1 \setminus \omega_2$, $j_2 \in \omega_2 \setminus \omega_1$, где $\{i_1, i_2\} = \omega_1 \setminus \omega_2$, $\{j_1, j_2\} = \omega_2 \setminus \omega_1$.

Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 1, легко показать, что грань G квазицелочисленная, поэтому $[x^1, x^2]$ — ребро многогранника $M(k, n)$.

Квазицелочисленность многогранника $M(k, n)$ при $k=2, n-2$ доказана. Случай $k=3$ рассматривается аналогично.

iii) Связноцелочисленность многогранника $M(k, n)$ при любом k доказана в [1]. Чтобы показать его неквазицелочисленность при $4 \leqslant k \leqslant n-3$, рассмотрим следующие две целочисленные вершины:

$$x^1 = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 1\ 0\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0 \\ 0\ 1\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0 \\ \ldots \\ 0\ 0\ \ldots\ 1\ \ldots\ 0 \end{matrix}\right\} k \\ 1\ 0\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0 \\ \ldots \\ 1\ 0\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0 \\ \left.\begin{matrix} 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0 \\ \ldots \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots\ 1\ \ldots\ 0 \end{matrix}\right\} k \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0 \\ \ldots \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно показать, что $[x^1, x^2]$ является ребром многогранника $\operatorname{conv}(M(k, n) \cap Z^n)$, но не является ребром многогранника $M(k, n)$. Теорема полностью доказана.

Список литературы

1. Ковалев М. М., Исаченко А. И., Нгуен Нгиа // Докл. АН БССР. 1978. Т. 11. № 10. С. 17.
2. Kovalajw M., Nguen Ngia, Kühn E. // Tagung Math. Optimierung. Humboldt. Universitat zu Berlin, 1977. S. 50.
3. Чинь Д. З., Нгуен Нгиа // Тоан хок. 1982. Т. 10. № 2. С. 1.
4. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. М., 1981.
5. Горунович С. А. // Кибернетика. 1985. № 5. С. 67.

Поступила в редакцию 11.12.86.

УДК 519.25

Х. Д. ШУНГАРОВ

К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ПОКРЫТИЯ ГРАФА ЗВЕЗДАМИ

1. В практике автоматизированного проектирования электронно-вычислительной аппаратуры [1, 2] возникает следующая многокритериальная задача дискретной оптимизации. Заданы: n-вершинный граф $G = (V, E)$, в котором каждое ребро $e = ij \in E$ взвешено целым числом $w(e) = w(i, j) \geqslant 0$, и множество натуральных чисел $\mathbf{H} = \{h_1, \ldots, h_T\}$. Каждому числу $h_t \in \mathbf{H}$, $t = \overline{1, T}$, соответствует h_t-звезда (звезда типа t). Множество $\mathbf{H}$ будем называть множеством типовых звезд. Напомним, что h-звездой называется полный двудольный граф $K_{1,h-1}$ [3].

Покрытием графа G звездами будем называть его остовный подграф $x = (V, E_x)$, $E_x \subseteq E$, каждая компонента связности которого представляет собой звезду, изоморфную некоторой типовой звезде из множества типовых звезд $\mathbf{H}$.

На множестве $X = \{x\}$ всех покрытий графа G задана векторная целевая функция (ВЦФ) $F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x))$, частные критерии которой $F_k(x) \to \min$, $k = \overline{1, 3}$, имеют вид: $F_1(x) = |E| - |E_x|$ — число ребер графа G, не вошедших в покрытие x; $F_2(x) = \sum_{t=1}^{T} c_t z_t$ — стоимость покрытия x, где c_t — стоимость звезды типа t; $F_3(x) = \frac{1}{|E_x|} \sum_{e \in E_x} w(e)$ — удельный вес покрытия x.

ВЦФ $F(x)$ определяет паретовское множество $\tilde{X} \subseteq X$ [4, 5]. Проблема