УДК 519.283

И. И. ХОМИЧКОВ

ОДНОЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ И ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ КОКСА ВТОРОГО ПОРЯДКА

При рассмотрении систем обслуживания с повторными вызовами обычно предполагают, что входящий поток является простейшим [1] или простейшим с групповым поступлением вызовов [2]. В работе [3] получены производящие функции стационарного распределения состояний системы с эрланговским и квазигиперэкспоненциальным входящими потоками второго порядка. В данном сообщении рассматривается система обслуживания с входящим потоком Кокса второго порядка. Полученные результаты обобщают [3].

Пусть преобразование Лапласа — Стилтьеса промежутка времени между моментами поступления первичных вызовов имеет вид

$$\alpha(s) = p + \bar{p}q\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + s} + \bar{p}\bar{q}\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 + s)(\lambda_2 + s)}, \qquad (1)$$

где $\operatorname{Re} s \geqslant 0$, $\bar{p} = 1 - p$, $\bar{q} = 1 - q$, $0 \leqslant p, q \leqslant 1$; μ — интенсивность экспоненциального обслуживания; ν — интенсивность повторения.

Будем предполагать, что выполнено условие существования стационарного режима [3]: $\nu > 0$, $\lambda_1\lambda_2(\bar{p}\mu(\lambda_2 + \bar{q}\lambda_1)^{-1} < 1$.

Введем в рассмотрение стационарные вероятности состояний системы и их производящие функции: $p_i(n) = \lim\limits_{t\to\infty} P\{N(t) = n,\ C(t) = i\}$, $n \geqslant 0$, $P_i(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_i(n)x^n$, $i = 0, 1$. Здесь для произвольного момента времени t обозначено: $N(t)$ — число источников повторных вызовов в системе, $N(t) = n$, $n = \overline{0, \infty}$, $C(t)$ — число обслуживаемых вызовов, $C(t) = i$, $i = 0, 1$.

Теорема. Функции $P_i(x)$ определяются по формулам:

$$P_0(x) = C\,\frac{\lambda_2\mu^2\bar{p} + \mu\lambda_1(\bar{q}\mu + \lambda_1 + \mu pq) + x\lambda_1(\lambda_1\mu\bar{p}\bar{q} - (\mu + \lambda_2)(\lambda_1 + \mu\bar{p})}{\lambda_2\mu^2\bar{p}} \times$$

$$\times F(\alpha, \beta, \gamma; z(x)) - C\frac{g(x)\,\alpha\beta}{\lambda_2\mu^2\bar{p}\gamma(x_2 - x_1)}F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1; z(x)),$$

$$P_1(x) = C\,\frac{\lambda_1(\mu + \lambda_1)}{\mu^2\bar{p}}F(\alpha, \beta, \gamma; z(x)) -$$

$$- C\,\frac{\nu(\mu - \mu x - x\lambda_1)\,\alpha\beta}{\mu^2\bar{p}\gamma(x_2 - x_1)}F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1; z(x)),$$

где $F(.,.,.;z)$ — гипергеометрическая функция, $z(x) = (x - x_1)/(x_2 - x_1)$, $\alpha = \lambda_1/\nu$, $\beta = (\nu + \lambda_2)/\nu$,

$$\gamma = -\frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\nu)\,x_1}{\nu(x_2 - x_1)} + \frac{\mu(\lambda_2(\mu + \lambda_2) + \lambda_1(\mu\bar{q} + \lambda_1 + \mu pq) + \gamma(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu(1 + p))}{(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\mu(1 - \bar{p}\bar{q}) + (\lambda_2 + \mu)\mu p)(x_2 - x_1)},$$

$$C = \lambda_2\mu\left(\frac{\nu\alpha\beta}{\gamma(x_2 - x_1)}F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1; z(1)) +\right.$$

$$\left. + (\mu + \lambda_1)F(\alpha, \beta, \gamma; z(1))\right)^{-1}(\lambda_2 + \bar{q}\lambda_1)^{-1},$$

$g(x) = (\lambda_1\lambda_2 + \mu\lambda_1(1 - \bar{p}\bar{q}) + \lambda_2\mu p + \mu^2 p)x^2 - \mu(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu(1 + p)) \times \times x + \mu^2$,

$x_1 < x_2$ — корни квадратного уравнения $g(x) = 0$.

Схема доказательства теоремы. Используем метод этапов Эрланга [4]. Тогда, в соответствии с (1), можно считать, что каждый первичный вызов либо с вероятностью p поступает в систему одновременно с предшествующим вызовом (имеет место групповое поступление, где с вероятностью $p^{k-1}\bar{p}$ поступает k вызовов), либо с вероятностью $\bar{p}q$ проходит только один этап поступления, а с вероятностью $\bar{p}\bar{q}$ — два этапа. Длительность этапов поступления распределена по экспоненциальному закону с параметрами λ_1, λ_2 соответственно. Обозначим: $K(t)$ — номер этапа, на котором в момент времени t находится поступающий первичный вызов, $\omega(t) = (N(t), C(t), K(t))$ — однородный марковский процесс, описывающий функционирование системы. Введем стационарные вероятности состояний процесса $\omega(t)$ и их производящие функции:

$$p_i(n, k) = \lim P\{N(t) = n, C(t) = i, K(t) = k\}, \; n \geqslant 0,$$

$$P_{i,k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_i(n, k)\, x^n, \; i = 0, 1; \; k = 1, 2.$$

Относительно вероятностей $p_i(n, k)$ составляем систему уравнений стохастического равновесия, затем переходим к соответствующей системе дифференциальных уравнений относительно функций $P_{i,k}(x)$. После несложных преобразований ее удается свести к уравнению Гаусса, аналитическим решением которого в единичном круге является гипергеометрическая функция. Получив $P_{i,k}(x)$, окончательно имеем $P_i(x) = \sum_{k=1}^{2} P_{i,k}(x)$, $i = 1, 2$.

Список литературы

1. Фалин Г. И. // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1979. № 2. С. 107.
2. Фалин Г. И. // Укр. мат. ж. 1976. Т. 28. № 4. С. 96.
3. Хомичков И. И. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1987. № 1. С. 51.
4. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. М., 1979.

Поступила в редакцию 02.12.86.