

$c_2 - a_2, c_2 - a_2, b_1, b_2, b_1; c_1, c_2, c_2; \frac{y-v}{x+y}, \frac{x-u}{x}, \frac{x-u}{x+y}$ ), поэтому для него имеет место

**Теорема 2.** Интегральное уравнение (1) тогда и только тогда имеет решение  $f(x, y) \in R_{q,r}, q < \min(0, \operatorname{Re} b_1), r < \min(0, \operatorname{Re} b_2)$ , когда  $g(x, y) \in I_{x,y}^{c_1, c_2}(R_{q,r})$ . При этом решение единственно.

Вид решения уравнения (1) определяется теоремой

**Теорема 3.** Если  $\operatorname{Re} a_1, \operatorname{Re} a_2 > 0$  и  $g(x, y) \in I_{x,y}^{c_1, c_2}(R_{q,r})$ , где  $q$  и  $r$  удовлетворяют условиям теоремы 2, то уравнение (1) обращается по следующей формуле:

$$f(x, y) = x^{-b_2}(x+y)^{-b_1} I_{x,y}^{-a_1, -a_2} x^{b_2}(x+y)^{b_1} I_{x,y}^{a_1-c_1, a_2-c_2} g(x, y). \quad (3)$$

### Список литературы

1. E x t o n H. Multiple Hypergeometric Functions and Applications.— Chichester: Ellis Horwood Ltd, 1976.
2. K a r l s s o n W. // Math. Scand. 1974. V. 34. P. 243.
3. M o u r y a D. P. // Proc. Indian Acad. Sci. 1970. A72. N 4. P. 173.
4. R a i n a R. K. // Indian J. Pure and Appl. Math. 1984. V. 15. N 5. P. 510.

Поступила в редакцию 02.10.86.

УДК 519.633

Е. В. РАДКЕВИЧ

### РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ПЕРВОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ БЮРГЕРСА

В статье предлагаются разностные схемы с расширенной областью устойчивости. Построено и исследовано первое дифференциальное приближение.

В области  $Q = (G \cup \Gamma) \times [0 \leq t \leq T]$ ,  $G(0 < x_n < l_n), n = \overline{1, p}$ ,  $\Gamma$  — граница области  $G$ , рассмотрим следующую граничную задачу для уравнений Бюргерса:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + \sum_{k=1}^p u_k \frac{\partial u_n}{\partial x_k} = \mu \sum_{k=1}^p \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_k^2}, \quad n = \overline{1, p}, \quad \mu > 0, \quad (1)$$

$$u_n(x, 0) = \varphi_n(x), \quad u_n|_{\Gamma} = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_p).$$

На сетке  $\omega_{h,\tau}$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ ,  $h = (h_1, \dots, h_p)$ ,  $\tau = \frac{h_k}{\alpha_k}$  предлагается разностная схема (приняты обозначения из [1, 2]):

$$\begin{aligned} & \tau^{-1} \left( \hat{y}_n - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p y_{n, i_k - s_k} \right) + \sum_{k=1}^p (\sigma_{1,k} (\hat{y}_k^+ y_{n, \bar{x}_k, i_k} + \\ & + \hat{y}_k^- y_{n, x_k, i_k}) + (1 - \sigma_{1,k}) (y_k^+ y_{n, \bar{x}_k, i_k - s_k} + y_k^- y_{n, x_k, i_k - s_k})) = \\ & = \mu \sum_{k=1}^p (\sigma_{2,k} y_{n, \bar{x}_k, x_k, i_k} + (1 - \sigma_{2,k}) y_{n, x_k, x_k, i_k - s_k}), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $y_{n, i_k - s_k} = y_{n, i_1, \dots, i_k - s_k, \dots, i_p}$ ,  $s_k = \operatorname{sign} y_k$ ,  $y_k^- = (y_k - 1/ps_k \alpha_k \pm |y_k - 1/ps_k \alpha_k|)/2$ .

**Теорема.** Если  $\sigma_{1,k} = 0$ ,  $\sigma_{2,k} = 1$  и выполняется условие  $\alpha_k \geq \geq 0,5 p \mu h_{\max}$ , то разностная схема (2) устойчива и справедливо неравен-

ство  $\|\hat{y}_h\|_C \leq \|y_h\|_C$ , где  $u_{k_{\max}} = \max_{x,t} |u_k|$ ,  $\|\cdot\|_C$  — сеточный аналог нормы  $C$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ .

Доказательство теоремы проводится мажорантным методом.

Проведенный в [3, 4] анализ свойств разностных схем различного порядка аппроксимации показал, что наиболее характерные свойства приближенных решений определяются в основном слагаемыми, содержащими производные  $u_{xx}$ ,  $u_{xxx}$  для схем первого и второго порядков соответственно. Схема (2) имеет порядок аппроксимации  $O(h + \tau)$ , поэтому для качественной демонстрации влияния аппроксимационной вязкости [5] рассмотрим первое дифференциальное приближение

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + \sum_{k=1}^p u_k \frac{\partial u_n}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^p (\mu + \tilde{\mu}_k) \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_k^2}, \quad s_{1,k} = \text{sign} \left( u_k - \frac{1}{p} s_h \alpha_k \right), \quad (3)$$

$$\tilde{\mu}_k = 0,5\tau (|u_k| (\alpha_k - |u_k|) + \alpha_k s_h (s_{1,k} s_k + 1) \left( u_k - \frac{1}{p} s_h \alpha_k \right)).$$

Выбором  $\alpha_k$  можно регулировать значения  $\tilde{\mu}_k$ . Так, например,  $\tilde{\mu}_k = 0$  при  $\alpha_k = 0,5p \max_{x,t} |u_k| (3 + \sqrt{9 - 8/p})/2$ . Отметим, что при  $p = 1$   $\tilde{\mu}_1 = 0$ , если  $\alpha_1 = 0,5 \max_{x,t} |u|$  или  $\alpha_1 = \max_{x,t} |u|$ .

В качестве теста рассмотрена задача (1) при  $p = 2$  со следующими начальными значениями:  $u_1(x_1, x_2, 0) = 2 \sin(\pi x_1/2) \sin(\pi x_2)$ ,  $u_2(x_1, x_2, 0) = \cos^2(\pi \eta)$ ,  $\eta = \sqrt{0,5(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 0,5)^2}$ ,  $0 \leq x_1 \leq 2$ ,  $0 \leq x_2 \leq 1$ .

Численные расчеты проводились с использованием схемы (2) и разностной схемы

$$\tau^{-1} (\hat{y}_n - y_n) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p y_h ((s_k + 1) y_{n, \bar{x}_k, i_k} - (s_k - 1) y_{n, x_k, i_k}) = \mu \sum_{k=1}^p \hat{y}_{n, \bar{x}_k, x_k, i_k}. \quad (4)$$

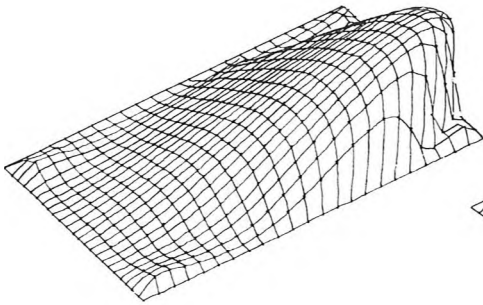


Рис. 1

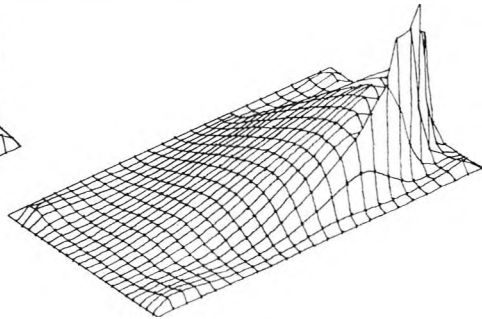


Рис. 2

На рис. 1 и 2 показаны результаты, полученные по схемам (2) и (4) при значениях параметров  $\mu = 0,001$ ,  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 1$ .

Разностная схема (2) позволяет получить достаточно точные результаты при крупных шагах сетки и малых значениях  $\mu$  при относительно несложной реализации, так как нелинейные конвективные члены вычисляются на нижнем временном слое ( $\sigma_{1,k} = 0$ ). Схема (4) при таких же параметрах дает сильно осциллирующее решение.

## Список литературы

1. Абрашии В. Н., Муха В. А. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 7. С. 1264.
2. Радкевич Е. В. // Материалы республ. науч. совещ.: Применение матем. методов и вычислит. техники при решении народно-хозяйств. задач. Гомель, 1986. С. 68.
3. Мухин С. И., Попов С. Б., Попов Ю. П. Препринт № 150 / ИМП имени М. В. Келдыша. М., 1981.
4. Иванов М. Я., Корецкий В. В., Курочкина Н. Я. // ЧММСС. 1980. Т. 11. № 1. С. 85.
5. Яненко Н. Н., Шокин Ю. И. // Докл. АН БССР. 1968. Т. 182. № 2. С. 280.

Поступила в редакцию 19.06.86.

УДК 621.325

С. Ю. ЛОШКАРЕВА

## О ЧИСЛЕ ПАКЕТОВ МАКСИМАЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ В $\Omega$ -СЕТИ

Рассматривается система коммутации, известная под названием  $\Omega$ -сети [1—3];  $\Omega$  — сеть  $D_l$ , связывающая  $N = 2^l$  входных и выходных полюсов, состоит из  $\log_2 N$  каскадов, в каждом из которых имеется  $\frac{N}{2}$  узлов — двоичных коммутаторов. Путь от входного коммутатора  $p$  к выходному коммутатору  $q$  определяется двоичным разложением чисел  $p$  и  $q$  [3, 4]. Функционирование  $\Omega$ -сети в рассматриваемой модели определяется следующим образом [5].

1. На входы  $\Omega$ -сети подается пакет сигналов  $\pi$ , определяемый подстановкой  $\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 2^l - 1 \\ i_0 & i_1 & \dots & i_{2^l - 1} \end{pmatrix}$ , где число  $i_p$  указывает номер выходного полюса для сигнала, поступившего на  $p$ -й входной полюс сети. Таким образом,  $\pi$  есть подстановка номеров адресов и не зависит от конкретного набора сигналов, поэтому задача рассматривается для некоторого фиксированного набора из 0 и 1 длины  $2^l$ ;  $(p, i_p)$  называем далее связью из пакета  $\pi$ ; при этом разные сигналы могут быть адресованы одному полюсу, т. е. подстановка может быть вырожденной.

2. В случае, когда два сигнала направляются одновременно в один и тот же выходной полюс  $q$  коммутатора  $u$ , приоритет прохождения имеет сигнал, пришедший с  $q$ -го входного полюса  $u$ ; блокируемый сигнал освобождает занятый им путь.

3. Часть связей, не реализованная в  $j$ -ом такте работы пакета по тем же правилам начинает реализовываться в  $j + 1$ -ом такте.

**Определение 1.** Пучком связей  $X$  длины  $T$  назовем множество связей  $X = \{s_1, \dots, s_T\}$  такое, что связь  $s_j$  проходит сеть  $D_l$  в  $j$ -й такт работы пакета  $\pi$ ,  $s_j$  блокирует  $s_{j+1}$ .

Очевидно, что число тактов прохождения пакета  $\pi$  через  $\Omega$ -сеть  $D_l$  равно максимальной длине пучков связей в  $\pi$ .

Легко видеть, что максимальная длина пучков связей в  $D_l$  равна  $2^l$ . Для этого достаточно все сигналы адресовать одному выходу сети. В [3] была доказана следующая

**Лемма 1.**  $\Omega$ -сеть  $D_l$  размерности  $2^l$  можно представить в виде схемы, изображенной на рисунке (а).

**Следствие 1.**  $\Omega$ -сеть  $D_l$  можно представить в виде схемы (б). Здесь  $K_1, K_l$  — каскады из  $2^{l-1}$  параллельно соединенных двоичных коммутаторов,  $D_{l-1}^i$  —  $\Omega$ -сети размерности  $2^{l-1}$ .

Подсчитаем число пучков максимальной длины следующим образом: имея две схемы  $D_{l-1}$  с их максимальными пучками, опишем такое их соединение в схему  $D_l$  (согласно рисунку (б)), чтобы получить один максимальный пучок для  $D_l$ . Из строения сети и вырожденности  $\pi$  следует, что все максимальные пучки могут быть получены таким способом.