УДК 517.544.8+948.3

Е. А. КРУШЕВСКИЙ

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ СДВИГАМИ ВНУТРЬ ОБЛАСТИ

Решения линейного функционального уравнения с несколькими сдвигами внутрь области, имеющими одну неподвижную точку (см. [3]), с аналитическими коэффициентами

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{n} G_k(z)\,\varphi[h^k z] + g(z),\ |z| \leqslant 1,\ |h| < 1 \tag{1}$$

в классе аналитических функций являются решениями задачи сопряжения с несколькими сдвигами

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} G_k(t)\,\varphi[h^k t] + g(t),\quad |t| = 1 \tag{2}$$

и гёльдеровскими коэффициентами $G_k(t)$, $g(t)$, причем будем предполагать, что $G_n(e^{i\theta}) \neq 0$.

Для решения задачи (2) введем в кольце $|h| < |z| \leqslant 1$ новые неизвестные функции $\Phi_k(z) = \varphi[h^{k-1}z]$, $k = \overline{1, n}$. Продолжим функции $\Phi_k(z)$ внутрь круга $|z| \leqslant |h|$ по формуле $\Phi_k(hz) = \Phi_k(z)$; таким образом, функции $\Phi_k(z)$ автоморфны относительно бесконечной циклической группы, порожденной преобразованием $T: z \longmapsto hz$ (см. [2]). С учетом этого задача сопряжения (2) переходит в векторно-матричную задачу Римана для n пар функций на римановой поверхности, гомеоморфной тору (см. [2])

$$\Phi^+(t) = A(t)\Phi^-(t) + g(t),\ |t| = 1, \tag{3}$$

$$A(z) = \begin{pmatrix} G_1(z) & G_2(z) & \dots & G_{n-1}(z) & G_n(z) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{matrix} \Phi(z) = (\Phi_1(z), \dots, \Phi_n(z))^T, \\ f(z) = (g(z), 0, \dots, 0)^T, \end{matrix}$$

матрица которой невырождена $(\det A(t) = (-1)^{n-1} G_n(t) \neq 0)$.

В случае постоянных коэффициентов G_k задача (3) легко решается путем доумножения слева на матрицу трансформации S ($A = S^{-1}JS$, J — жорданова нормальная форма матрицы A). Для вектор-функции $\Psi(z) = S\Phi(z)$, составляющие которой также являются автоморфными относительно группы T, получаем задачу $\Psi^+(t) = J\Psi^-(t) + Sf(t)$, $|t| = 1$ с треугольной матрицей. Эта задача решается непосредственно по формулам, приведенным в [1] и [2], тем самым находится решение уравнения (1) в кольце $|h|^n < |z| \leqslant 1$. Продолжение этого решения внутрь круга $|z| \leqslant |h|^n$ всегда возможно ($G_n \neq 0$) по формуле

$$\varphi[h^{n+1}z] = \frac{1}{G_n}\left(\varphi[hz] - \sum_{k=1}^{n-1} G_k \varphi[h^{k+1}z] - g(hz)\right).$$

Справедлива (см. [3])

Теорема. Функциональное уравнение (1) имеет единственное решение в классе аналитических функций, если для любого целого m, $\sum_{k=1}^{n} G_k(0)\,h^{mk} \neq 1$. Если же для $m_1, \dots, m_p$ $\sum_{k=1}^{n} G_k(0)\,h^{m_s k} = 1$, то при выполнении p условий разрешимости $\int_L g(\tau)\frac{d\tau}{\tau^{m_s+1}} = 0$ решение уравнения (1) существует и зависит от p произвольных комплексных постоянных.

З а м е ч а н и е 1. Уравнение (1) может иметь и различные сдвиги h_1 и h_2; необходимо лишь, чтобы существовало рациональное число p/q, $h_1 = h_2^{p/q}$, тогда размерность задачи (3) равна pq.

З а м е ч а н и е 2. Подобным способом можно решить уравнение (1) и в некоторых случаях переменных коэффициентов.

Список литературы

1. З в е р о в и ч Э. И., К р у ш е в с к и й Е. А., М и т ю ш е в В. В. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1986. № 1. С. 43.
2. К р у ш е в с к и й Е. А. Краевые задачи с разрывными коэффициентами для кольца // Редкол. ж. «Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук». Минск, 1986. 23с. Деп. в ВИНИТИ 11.04.86. № 2619-В86.
3. М и т ю ш е в В. В. О решении общей краевой задачи линейного сопряжения для нескольких концентрических окружностей / Редкол. ж. «Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук». Минск, 1983. 10 с. Деп. в ВИНИТИ 29.04.83. № 2279-83.

Поступила в редакцию 26.06.86.

УДК 517.948.32

Г. В. ГРИНКЕВИЧ

ДВУМЕРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ФУНКЦИЕЙ САРАНА F_M В ЯДРЕ

Рассмотрим следующее двумерное интегральное уравнение Вольтерра первого рода:

$$\frac{1}{\Gamma(c_1)\,\Gamma(c_2)}\int_0^x\int_0^y (x-u)^{c_1-1}(y-v)^{c_2-1}\,F_M\Big(a_1,\ a_2,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ b_1;\ c_1,\ c_2,\ c_2;\ \frac{v-y}{u+v},\ \frac{u-x}{u},\ \frac{u-x}{u+v}\Big) f(u,\ v)\,du dv = g(x,\ y); \qquad (1)$$

$\operatorname{Re} c_1$, $\operatorname{Re} c_2$, $\operatorname{Re}(a_2-b_2)$, $\operatorname{Re}(b_1-a_1-a_2)>0$; $0\leqslant x\leqslant d<\infty$, $0\leqslant y\leqslant d'<\infty$. Здесь $g(x,\ y)$ — заданная, $f(x,\ y)$ — искомая функции, а $F_M(a_1,\ a_2,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ b_1;\ c_1,\ c_2,\ c_2;\ x,\ y,\ z)$ — гипергеометрическая функция Сарана [1, 2]. Функцию $f(x,\ y)$ будем искать в классе функций, для которых $(x+y)^q x^r f(x,\ y)\in L=L((0,\ d)\times(0,\ d'))$. В дальнейшем этот класс обозначим $R_{q,r}$. Через $I_{x,\,y}^{\nu,\,\nu'}$ обозначим оператор двумерного дробного интегродифференцирования [3, 4], а через $I_{x,\,y}^{\nu,\,\nu'}(P)$ — образ некоторого пространства функций P после действия оператором $I_{x,\,y}^{\nu,\,\nu'}$.

Для следующего уравнения

$$\int_0^x\int_0^y \frac{(x-u)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\,\frac{(y-v)^{\gamma'-1}}{\Gamma(\gamma')}\left(\frac{u+v}{x+y}\right)^{\alpha}\left(\frac{u}{x}\right)^{\beta}\mu(x,\ y,\ u,\ v)\,f(u,\ v)\,du dv = g(x,\ y); \qquad (2)$$

$\operatorname{Re}\gamma$, $\operatorname{Re}\gamma'>0$, $x\in[0,\ d]$, $y\in[0,\ d']$, $0<d,\ d'<\infty$, справедлива

Теорема 1. Если функция $\mu(x,\ y,\ u,\ v)$ дифференцируема n раз по x и n' раз по y, где $n=[\operatorname{Re}\gamma]+1$, $n'=[\operatorname{Re}\gamma']+1$, и все эти смешанные производные ограничены, а $\mu(x,\ y,\ x,\ y)\neq 0$, то уравнение (2) тогда и только тогда имеет решение $f(x,\ y)\in R_{q,r}$, $q<\min(0,\ \operatorname{Re}\alpha)$, $r<\min(0,\ \operatorname{Re}\beta)$, когда $g(x,\ y)\in I_{x,\,y}^{\gamma,\,\gamma'}(R_{q,r})$. Причем решение это единственно.

Уравнение (1) является частным случаем более общего уравнения (2), при $\gamma=c_1$, $\gamma'=c_2$, $\alpha=b_1$, $\beta=b_2$ и $\mu(x,\ y,\ u,\ v)=F_M\Big(c_1-a_1,$