БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.987, 519.214.8, 519.722

Сокол
Эдвард Эдуардович

Асимптотика распределения эмпирических мер на фазовых пространствах бесконечного объема

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 — вещественный,
комплексный и функциональный анализ

Минск, 2021

Научная работа выполнена в Белорусском государственном университете.

Научный руководитель — **Бахтин Виктор Иванович,**
доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры
функционального анализа и
аналитической экономики
Белорусского государственного университета.

Официальные оппоненты: **Миротин Адольф Рувимович,**
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математического анализа и
дифференциальных уравнений
УО «Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины»;

Шилин Андрей Петрович,
кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры высшей математики
и математической физики
Белорусского государственного университета.

Оппонирующая организация — **ГНУ «Институт математики НАН Беларуси».**

Защита состоится 25 июня 2021 г. в 10:00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по адресу: 220030, г. Минск, ул. Ленинградская, 8 (корпус юридического факультета), ауд. 407. Телефон ученого секретаря: +375 (17) 209-57-09, email: mardvilko@bsu.by.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан 18 мая 2021 г.

Учёный секретарь
совета по защите диссертаций Д 02.01.07
кандидат физико-математических наук
доцент Т. С. Мардвилко

ВВЕДЕНИЕ

Пусть на вещественной прямой задано абсолютно непрерывное распределение вероятностей P с плотностью $\varphi(x) = dP(x)/dx$ по отношению к мере Лебега. Его *энтропия* определяется формулой

$$H(P) = -\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \ln \varphi(x)\, dx.$$

Каков содержательный смысл этой величины? Существует ли какой-нибудь математический объект, для которого некоторая естественная количественная характеристика (например, объем) является однозначной функцией от энтропии?

Традиционно энтропию принято считать мерой хаотичности. Но такое объяснение не дает ответа на поставленный вопрос, потому что оно не связывает энтропию ни с какой другой количественной характеристикой хаоса, которую можно определить и измерить независимо от энтропии.

Рассмотрим конечный алфавит $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_r\}$. Каждая конечная последовательность $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega^n$ порождает эмпирическую меру $\delta_{x,n}$ на Ω, которая определяется следующим образом:

$$\delta_{x,n}(\omega) = \frac{\#\{t \leqslant n \mid x_t = \omega\}}{n}, \qquad \omega \in \Omega,$$

где $\#$ обозначает мощность множества. Другими словами, $\delta_{x,n}(\omega)$ — это относительная частота буквы ω в слове $x = (x_1, \dots, x_n)$. Очевидно, $\delta_{x,n}$ является вероятностной мерой на Ω.

Пусть на Ω задано распределение вероятностей $P = (P(\omega_1), \dots, P(\omega_r))$. Энтропия распределения P определяется формулой

$$H(P) = -\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \ln P(\omega).$$

В этом случае содержательный смысл энтропии раскрывает известная теорема Макмиллана[1], которая утверждает, что число тех последовательностей $x = (x_1, \dots, x_n)$ длины n, для которых эмпирическая мера $\delta_{x,n}$ близка к P, имеет асимптотику порядка $e^{nH(P)}$.

Будет ли теорема Макмиллана верна в случае счетного алфавита Ω? Как может выглядеть ее аналог, если мы заменим Ω на произвольное (в том числе несчетное) фазовое пространство X? Эти и близкие к ним вопросы исследуются в данной работе. Полученные результаты позволяют дать ответ

[1]Ширяев, А. Н. Вероятность. В 2-х кн. / А. Н. Ширяев. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва: МЦНМО, 2004. — Кн. 1. — 520 с.

на изначально сформулированный вопрос о содержательном смысле $H(P)$. А именно, энтропия непрерывного распределения на вещественной прямой определяет показатель экспоненциальной асимптотики меры Лебега множества таких последовательностей $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, которые порождают эмпирические меры на $\mathbb{R}$, близкие к P. Близость вероятностных мер здесь следует понимать в смысле *тонкой топологии* (которая определяется так же, как и слабая топология, но с использованием интегрируемых функций вместо ограниченных).

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами, темами

Тема диссертации соответствует приоритетному направлению фундаментальных и прикладных научных исследований Республики Беларусь (подпрограмма «Математические методы» ГПНИ «Конвергенция», а также подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем» ГПНИ «Конвергенция–2020»). Работа над диссертацией проводилась на кафедрах нелинейного анализа и аналитической экономики и функционального анализа и аналитической экономики в рамках следующих госбюджетных научно-исследовательских работ Белорусского государственного университета.

1. Государственная программа научных исследований 2011–2015 гг., тема 1.4.04.1 «Методы некоммутативного гармонического анализа в теории динамических систем с приложениями к задачам математической физики и экологии», номер гос. регистрации 20113525, финансовый номер 465/25.

2. Государственная программа научных исследований 2016-2020 гг., тема 1.4.04 «Неавтономные динамические системы с переходными режимами: спектральный и фрактальный анализ с приложениями к физическим, экономическим и экологическим моделям», номер гос. регистрации 20161427, финансовый номер 768/25.

Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы является раскрытие содержательного смысла информационной функции Кульбака—Лейблера (частным случаем которой является энтропия Шеннона) на пространствах с бесконечным объемом.

Основные *задачи* диссертации состоят в следующем:

1. Доказать теорему Макмиллана для счетного алфавита.

2. Обобщить локальный принцип больших уклонений для эмпирических мер на пространства с бесконечным объемом.

3. Исследовать возможность определения информационной функции Кульбака—Лейблера с помощью разбиений фазового пространства.

Объектами исследования являются энтропия Шеннона и информационная функция Кульбака—Лейблера на пространствах с бесконечным объемом.

Предметом исследования являются информационные свойства энтропии на счетном фазовом пространстве и связь информационной функции Кульбака—Лейблера с асимптотикой вероятностей больших уклонений на пространствах с бесконечным объемом.

Научная новизна

В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Доказана теорема Макмиллана в случае счетного алфавита.

2. Локальный принцип больших уклонений для эмпирических мер обобщен на пространства с бесконечным объемом.

3. Исследован альтернативный подход к определению информационной функции Кульбака—Лейблера на пространствах с бесконечным объемом.

Положения, выносимые на защиту

1. Теорема Макмиллана для счетного алфавита.

2. Обобщение локального принципа больших уклонений для эмпирических мер на пространства с бесконечным объемом.

3. Определение информационной функции Кульбака—Лейблера с помощью разбиений фазового пространства и его свойства.

Личный вклад соискателя ученой степени

Основные результаты диссертации получены автором лично. Роль научного руководителя заключалась в постановке задач и обсуждении полученных результатов. Результаты опубликованных в соавторстве статей [4, 5] принадлежат авторам на паритетных началах.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты, вошедшие в диссертационную работу, докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

1. 72-я научная конференция студентов и аспирантов БГУ, 11–22 мая 2015 г., Минск, Беларусь;

2. 73-я научная конференция студентов и аспирантов БГУ, 16–25 мая 2016 г., Минск, Беларусь;

3. Международная научная конференция «XII Белорусская математическая конференция БМК–2016», 5–10 сентября 2016 г., Минск, Беларусь;

4. Научно-методический семинар им. академика Ф. Д. Гахова кафедры теории функций механико-математического факультета БГУ, 17 марта 2021 г., Минск, Беларусь.

Опубликование результатов диссертации

Результаты диссертации опубликованы в 6 научных работах, в числе которых 4 статьи в научных изданиях в соответствии с пунктом 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (общим объемом 1.67 авторского листа), статья в сборнике материалов научной конференции и тезисы доклада на научной конференции.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения и библиографического списка.

Первая глава содержит краткий обзор литературы по теме диссертационного исследования.

Во второй главе доказывается теорема Макмиллана в случае счетного алфавита. Также доказывается непрерывность энтропии в тонкой топологии. Кроме того, приводится пример, показывающий невозможность дословного переноса теоремы Макмиллана со случая конечного алфавита на случай счетного алфавита.

В третьей главе определяется и исследуется информационная функция Кульбака—Лейблера в случае σ-конечных подстилающих мер и обобщается локальный принцип больших уклонений для эмпирических мер.

Четвертая глава посвящена исследованию вопроса о возможности альтернативного подхода к определению информационной функции Кульбака—Лейблера с помощью разбиений фазового пространства.

Полный объем диссертации составляет 65 страниц. Библиографический список содержит 45 наименований, включая собственные публикации соискателя ученой степени.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Глава 1 содержит краткий обзор литературы с выдержками из теории информации и теории динамических систем, в частности, рассматриваются энтропия Шеннона и теорема Макмиллана. Также в обзоре представлена информация об исследованиях, связанных с принципом больших уклонений и информационной функцией Кульбака—Лейблера.

Глава 2 посвящена энтропии Шеннона и теореме Макмиллана, которая с конечного множества (алфавита) обобщается на счетное множество.

Пусть задан конечный алфавит $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_r\}$ и распределение вероятностей P на нем. Напомним, что *энтропия* распределения P определяется формулой

$$H(P) = -\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)\ln P(\omega). \tag{2.1}$$

Здесь предполагается, что если $P(\omega) = 0$, то соответствующее слагаемое $P(\omega)\ln P(\omega)$ также равно нулю.

Каждая конечная последовательность $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega^n$ порождает *эмпирическую меру* $\delta_{x,n}$ на множестве Ω, которая определяется следующим образом:

$$\delta_{x,n}(\omega) = \frac{\#\{t \leqslant n \mid x_t = \omega\}}{n}, \qquad \omega \in \Omega, \tag{2.2}$$

где $\#$ обозначает мощность множества. Другими словами, $\delta_{x,n}(\omega)$ — это относительная частота буквы ω в слове $x = (x_1, \dots, x_n)$. Очевидно, $\delta_{x,n}$ является вероятностной мерой на Ω.

Теорема Макмиллана в случае конечного Ω утверждает, что число тех последовательностей $x = (x_1, \dots, x_n)$, для которых эмпирическая мера $\delta_{x,n}$ близка к P, имеет асимптотику порядка $e^{nH(P)}$. Точная формулировка следующая.

Теорема 2.1.[2] *Для любой вероятностной меры P на конечном множестве Ω и любого числа $\varepsilon > 0$ существует такая малая окрестность $O(P)$, для которой выполняется оценка*

$$\#\bigl\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega^n \bigm| \delta_{x,n} \in O(P)\bigr\} < e^{n(H(P)+\varepsilon)}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

С другой стороны, для любой вероятностной меры P на конечном множестве Ω, любого числа $\varepsilon > 0$ и любой окрестности $O(P)$ имеет место асимптотическая оценка

$$\#\bigl\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega^n \bigm| \delta_{x,n} \in O(P)\bigr\} > e^{n(H(P)-\varepsilon)}, \qquad n \to \infty. \tag{2.4}$$

[2] Ширяев, А. Н. Вероятность. В 2-х кн. / А. Н. Ширяев. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва: МЦНМО, 2004. — Кн. 1. — 520 с.

Рассмотрим теперь *счетный* алфавит $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$. К сожалению, оценка (2.3) для него оказывается неверна. Это происходит из-за того, что энтропия, как функция меры, принимает значение $+\infty$ на всюду плотном множестве вероятностных мер. Более того, это множество оказывается всюду плотно в любой топологии, состоящей из поглощающих окрестностей. Чтобы обойти эту проблему, в диссертации вводится тонкая топология, содержащая непоглощающие окрестности.

Обозначим через $M_1(\Omega)$ множество всех вероятностных мер на Ω. Введем на $M_1(\Omega)$ *тонкую топологию* с помощью системы окрестностей

$$O(P) = \left\{ Q \,:\, \left| \sum_{\omega\in\Omega} f_k(\omega)Q(\omega) - \sum_{\omega\in\Omega} f_k(\omega)P(\omega) \right| < \varepsilon, \quad k = \overline{1,m} \right\}, \qquad (2.5)$$

где m — любое натуральное число, а f_k — произвольные функции, для которых ряд $\sum_\omega f_k(\omega)P(\omega)$ сходится абсолютно. При этом сумма ряда $\sum_\omega f_k(\omega)Q(\omega)$ считается конечной лишь тогда, когда он сходится абсолютно; если же абсолютной сходимости нет, то считается, что $Q \notin O(P)$.

Замечание 2.2. Слабая топология на пространстве $M_1(\Omega)$ отличается от тонкой лишь тем, что в определении (2.5) рассматриваются только ограниченные функции f_k. Поэтому тонкая топология сильнее слабой.

Для энтропии, задаваемой с помощью формулы (2.1), в разделе 2.2 диссертации доказывается следующая теорема.

Теорема 2.3. *Энтропия непрерывна в тонкой топологии на $M_1(\Omega)$.*

Далее, в разделе 2.3 доказывается следующее обобщение теоремы Макмиллана на случай счетного алфавита Ω.

Теорема 2.5. *Для любой вероятностной меры $P \in M_1(\Omega)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такая тонкая окрестность $O(P)$, для которой выполняется неравенство*

$$\#\bigl\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega^n \bigm| \delta_{x,n} \in O(P)\bigr\} < e^{n(H(P)+\varepsilon)}, \qquad n \in \mathbb{N}. \qquad (2.20)$$

С другой стороны, для любой вероятностной меры $P \in M_1(\Omega)$, любого числа $\varepsilon > 0$ и любой тонкой окрестности $O(P)$ найдется такое конечное множество $X \subset \Omega$, для которого выполняется асимптотическая оценка

$$\#\bigl\{x = (x_1, \dots, x_n) \in X^n \bigm| \delta_{x,n} \in O(P)\bigr\} > e^{n(H(P)-\varepsilon)}, \qquad n \to \infty. \qquad (2.21)$$

Замечание 2.6. Если $H(P) = +\infty$, то разность $H(P) - \varepsilon$ в оценке (2.21) следует заменить на $1/\varepsilon$.

Следствие 2.7. *Для любой вероятностной меры $P \in M_1(\Omega)$, любого числа $\varepsilon > 0$ и любой тонкой окрестности $O(P)$ выполняется оценка*

$$\#\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega^n \mid \delta_{x,n} \in O(P)\} > e^{n(H(P)-\varepsilon)}, \qquad n \to \infty.$$

В разделе 2.4 диссертации построен пример, доказывающий, что в случае счетного алфавита Ω для любой вероятностной меры $P \in M_1(\Omega)$ и любой ее *слабой* окрестности $O(P)$ неравенство (2.20) нарушается.

Напомним, что норма меры P в пространстве l_1 определяется формулой

$$\|P\| = \sum_{\omega \in \Omega} |P(\omega)|.$$

Пример 2.10. Для любого $C > 0$ и всякой окрестности $O_\varepsilon(P)$ меры P в пространстве l_1 существует такое конечное множество $X \subset \Omega$, что при всех достаточно больших n

$$\#\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n \mid \delta_{x,n} \in O_\varepsilon(P)\} > e^{nC}.$$

Из этого примера следует, что при $H(P) < +\infty$ неравенство (2.20) нарушается для любой окрестности $O_\varepsilon(P)$ в l_1 (и тем более для любой слабой окрестности $O(P)$).

Чтобы обобщить теорему Макмиллана на случай счетного алфавита возможен альтернативный подход, не требующий введения тонкой топологии.

Для любой вероятностной меры $P \in M_1(\Omega)$ и любого конечного подмножества $X \subset \Omega$ будем обозначать через $P_X(\omega)$ условную вероятность при условии $\omega \in X$, определяемую следующим соотношением

$$P_X(\omega) = \begin{cases} \dfrac{P(\omega)}{P(X)}, & \text{если } \omega \in X, \\ 0, & \text{если } \omega \notin X. \end{cases}$$

Тогда если заменить счетное Ω на достаточно большое конечное подмножество $X \subset \Omega$, а меру P — на условную меру P_X, то оценки (2.20) и (2.21) также будут справедливы. А именно верна следующая теорема.

Теорема 2.14. *Для любой вероятностной меры $P \in M_1(\Omega)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое конечное множество $\Omega_0 \subset \Omega$, что для любого конечного $X \supset \Omega_0$ существует такая окрестность $O(P_X) \subset M_1(X)$ условного распределения P_X, что выполняется оценка*

$$\#\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n \mid \delta_{x,n} \in O(P_X)\} < e^{n(H(P)+\varepsilon)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

С другой стороны, для любой окрестности $O(P_X) \subset M_1(X)$ выполняется асимптотическая оценка

$$\#\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n \mid \delta_{x,n} \in O(P_X)\} > e^{n(H(P)-\varepsilon)}, \qquad n \to \infty.$$

Глава 3 посвящена изучению информационной функции Кульбака—Лейблера (для краткости, будем иногда использовать термин «действие Кульбака») и обобщению локального принципа больших уклонений для эмпирических мер.

Будем рассматривать произвольное множество X с заданной σ-алгеброй его подмножеств $\mathfrak{A}$. Всюду ниже термин «мера» будет использоваться для обозначения *неотрицательных* (счетно- или конечно-аддитивных) мер на измеримом пространстве $(X, \mathfrak{A})$.

Введем следующие обозначения:

$B(X)$ — пространство вещественнозначных ограниченных измеримых функций на $(X, \mathfrak{A})$;

$M_1(X)$ — множество счетно-аддитивных вероятностных мер на $(X, \mathfrak{A})$;

$M(X)$ — множество всех конечных счетно-аддитивных мер на $(X, \mathfrak{A})$;

$M_\sigma(X)$ — совокупность σ-конечных счетно-аддитивных мер на $(X, \mathfrak{A})$.

В случае вероятностной меры $\nu \in M_1(X)$ (целевая мера) и конечной меры $\mu \in M(X)$ (подстилающая мера) действие Кульбака $\rho(\nu, \mu)$ определяется следующим образом: если мера ν абсолютно непрерывна относительно μ, то

$$\rho(\nu, \mu) = \int_X \varphi \ln \varphi \, d\mu, \quad \text{где } \varphi = \frac{d\nu}{d\mu}, \tag{3.1}$$

в противном случае значение $\rho(\nu, \mu)$ считают равным $+\infty$. В формуле (3.1) считается, что $\varphi \ln \varphi = 0$ при $\varphi = 0$. Поэтому значение $\rho(\nu, \mu)$ лежит в промежутке $(-\infty, +\infty]$.

Каждой конечной последовательности $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ сопоставим эмпирическую меру $\delta_{x,n} \in M_1(X)$, которая сосредоточена на множестве $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и приписывает каждой точке x_i меру $1/n$.

Фиксируем какую-нибудь вероятностную меру $\mu \in M_1(X)$ и будем рассматривать элементы последовательности $x = (x_1, \ldots, x_n)$ как независимые случайные величины с одинаковым распределением вероятностей μ. Тогда эмпирическая мера $\delta_{x,n}$ сама будет случайной величиной со значениями в $M_1(X)$. Нас будет интересовать асимптотика ее распределения. Локальный принцип больших уклонений утверждает, что в первом приближении эта асимптотика экспоненциальная с показателем $-n\rho(\nu, \mu)$.

Для описания асимптотики распределения эмпирических мер нам потребуются две топологии на множестве $M_1(X)$. Первая из них — это слабая топология, формируемая с помощью системы окрестностей вида

$$O(\mu) = \left\{ \nu \in M_1(X) : \left| \int_X f_i \, d\nu - \int_X f_i \, d\mu \right| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, k \right\}, \tag{3.2}$$

где $\mu \in M_1(X)$, $f_1, \dots, f_k \in B(X)$ и $\varepsilon > 0$. Вторая топология порождается также с помощью системы окрестностей вида (3.2), но функции $f_1, \dots, f_k$ берутся из пространства $L^1(X, \mu)$. В таком случае считается, что окрестность $O(\mu)$ содержит лишь те меры ν, для которых все интегралы $\int_X f_i \, d\nu$ сходятся. Эту топологию на $M_1(X)$ будем называть *тонкой*. Легко видеть, что слабая топология на $M_1(X)$ содержится в тонкой топологии, но обратное включение, вообще говоря, не имеет места.

Фиксируем конечную счетно-аддитивную меру $\mu \in M(X)$ и обозначим через μ^n ее декартову степень, определенную на X^n. Тогда асимптотика распределения эмпирических мер описывается следующей теоремой, являющейся обобщением локального принципа больших уклонений на случай конечных подстилающих мер.

Теорема 3.1.[3] *Для любых мер $\nu \in M_1(X)$, $\mu \in M(X)$ и числа $\varepsilon > 0$ найдется такая слабая окрестность $O(\nu) \subset M_1(X)$, что*

$$\mu^n \bigl\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in X^n \bigm| \delta_{x,n} \in O(\nu) \bigr\} \leqslant e^{-n(\rho(\nu,\mu) - \varepsilon)}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

С другой стороны, для любых мер $\nu \in M_1(X)$, $\mu \in M(X)$, положительного числа ε и тонкой окрестности $O(\nu) \subset M_1(X)$ имеет место асимптотическая оценка

$$\mu^n \bigl\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in X^n \bigm| \delta_{x,n} \in O(\nu) \bigr\} \geqslant e^{-n(\rho(\nu,\mu) + \varepsilon)}, \qquad n \to \infty. \tag{3.4}$$

Замечание 3.2. При $\rho(\nu, \mu) = +\infty$ разность $\rho(\nu, \mu) - \varepsilon$ в (3.3) следует заменить на $1/\varepsilon$.

Недостатком теоремы 3.1 является то, что она не охватывает случай бесконечной меры μ. В частности, она не объясняет смысл энтропии $H(\nu)$ абсолютно непрерывного распределения вероятностей ν на вещественной прямой

$$H(\nu) = -\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \ln \varphi(x) \, dx, \qquad \varphi(x) = \frac{d\nu(x)}{dx}.$$

Эта энтропия только знаком отличается от действия Кульбака $\rho(\nu, \mu)$, где $\mu(dx) = dx$ — обычная мера Лебега. Но мера Лебега на вещественной прямой *бесконечна*. Поэтому желательно распространить теорему 3.1 на случай бесконечных мер μ.

Вообще говоря, прямое обобщение теоремы 3.1 для бесконечных мер μ неверно. Это было продемонстрировано в примере 2.10.

---

[3] Бахтин, В. И. Спектральный потенциал, действие Кульбака и большие уклонения эмпирических мер на измеримых пространствах / В. И. Бахтин // Теория вероятн. и ее примен. — 2014. — Т. 59, № 4. — С. 625–638.

Однако, оказывается, чтобы распространить теорему 3.1 на случай σ-конечных мер μ, достаточно заменить в оценке (3.3) слабую окрестность на тонкую и модифицировать определение действия Кульбака. Для этого нам потребуется понятие спектрального потенциала.

Обозначим через $\overline{B}(X)$ множество всех ограниченных сверху измеримых функций на измеримом пространстве $(X, \mathfrak{A})$. *Спектральным потенциалом* условимся называть нелинейный функционал

$$\lambda(\varphi, \mu) = \ln \int_X e^{\varphi}\, d\mu, \quad \varphi \in \overline{B}(X), \quad \mu \in M_\sigma(X).$$

Если интеграл в этой формуле расходится, то будем считать $\lambda(\varphi, \mu) = +\infty$. Таким образом, $\lambda(\varphi, \mu)$ может принимать значения в промежутке $(-\infty, +\infty]$.

Для краткости введем обозначение

$$\nu[f] = \int_X f\, d\nu,$$

где $\nu \in M_1(X)$, $f \in \overline{B}(X)$. Если интеграл расходится, то полагаем $\nu[f] = -\infty$.

Определим *действие Кульбака* $\rho(\nu, \mu)$ как функцию от пары аргументов $\nu \in M_1(X)$ и $\mu \in M_\sigma(X)$ следующим образом:

$$\rho(\nu, \mu) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \exists\, A \in \mathfrak{A}\colon\ \mu(A) = 0,\ \nu(A) > 0, \\ \sup\limits_{\psi \in \overline{B}(X)} \bigl\{ \nu[\psi] - \lambda(\psi, \mu) \bigr\}, & \text{если } \nexists\, A \in \mathfrak{A}\colon\ \mu(A) = 0,\ \nu(A) > 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

В случае, когда мера μ конечна, определение действия Кульбака (3.5) совпадает с прежним определением (3.1). Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3.6. *Если мера $\nu \in M_1(X)$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mu \in M_\sigma(X)$ и $\varphi = d\nu/d\mu$, то*

$$\rho(\nu, \mu) = \int_X \varphi \ln \varphi\, d\mu, \qquad \text{если} \quad \int_{\varphi<1} \varphi \ln \varphi\, d\mu > -\infty, \tag{3.6}$$

$$\rho(\nu, \mu) = -\infty, \qquad \text{если} \quad \int_{\varphi<1} \varphi \ln \varphi\, d\mu = -\infty. \tag{3.7}$$

В частности, для конечных мер μ имеет место альтернатива (3.6).

Следующая теорема является основным результатом для случая вероятностных мер ν и σ-конечных мер μ и служит обобщением локального принципа больших уклонений на случай бесконечных подстилающих мер.

Теорема 3.7. *Для любых мер $\nu \in M_1(X)$, $\mu \in M_\sigma(X)$ и числа $\varepsilon > 0$ найдется такая тонкая окрестность $O(\nu) \subset M_1(X)$, что*

$$\mu^n\bigl\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n \bigm| \delta_{x,n} \in O(\nu)\bigr\} \leqslant e^{-n(\rho(\nu,\mu)-\varepsilon)}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.17}$$

С другой стороны, для любых мер $\nu \in M_1(X)$, $\mu \in M_\sigma(X)$, числа $\varepsilon > 0$ и тонкой окрестности $O(\nu) \subset M_1(X)$ верна асимптотическая оценка

$$\mu^n\bigl\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n \bigm| \delta_{x,n} \in O(\nu)\bigr\} \geqslant e^{-n(\rho(\nu,\mu)+\varepsilon)}, \qquad n \to \infty. \tag{3.18}$$

Замечание 3.8. В этой теореме при $\rho(\nu, \mu) = +\infty$ разность $\rho(\nu, \mu) - \varepsilon$ в (3.17) следует заменить на $1/\varepsilon$, а если $\rho(\nu, \mu) = -\infty$, то сумму $\rho(\nu, \mu) + \varepsilon$ в (3.18) следует заменить на $-1/\varepsilon$.

Возможен еще один подход к обобщению теоремы 3.1 с использованием лишь слабой топологии. Его идея состоит в том, чтобы в оценках (3.3), (3.4) заменить пространство X достаточно большим подмножеством $Y \subset X$ с конечной мерой $\mu(Y)$, а вероятностную меру $\nu \in M_1(X)$ заменить ее условным распределением на Y. Для формулировки результатов в данном случае прежде дадим несколько определений.

Для всякой вероятностной меры $\nu \in M_1(X)$ и измеримого подмножества $Y \subset X$, удовлетворяющего условию $\nu(Y) > 0$, определим условную меру $\nu_Y \in M_1(X)$ по правилу

$$\nu_Y(A) = \frac{\nu(A \cap Y)}{\nu(Y)}, \qquad A \in \mathfrak{A}.$$

Будем говорить, что действие Кульбака $\rho(\nu, \mu)$ *корректно определено*, если мера ν имеет плотность $\varphi = d\nu/d\mu$, и при этом конечен хотя бы один из двух интегралов

$$\int_{\varphi<1} \varphi \ln \varphi \, d\mu, \qquad \int_{\varphi\geqslant 1} \varphi \ln \varphi \, d\mu. \tag{3.26}$$

Во всех остальных случаях будем говорить, что действие Кульбака *некорректно определено.*

Теорема 3.11. *Пусть для некоторой пары мер $\nu \in M_1(X)$ и $\mu \in M_\sigma(X)$ действие Кульбака $\rho(\nu, \mu)$ корректно определено. Тогда для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $X_\varepsilon \in \mathfrak{A}$ с конечной мерой $\mu(X_\varepsilon)$, что для любого множества $Y \in \mathfrak{A}$, содержащего X_ε и имеющего конечную меру $\mu(Y)$,*

а) существует слабая окрестность $O(\nu_Y) \subset M_1(Y)$, удовлетворяющая оценке

$$\mu^n\bigl\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in Y^n \bigm| \delta_{x,n} \in O(\nu_Y)\bigr\} \leqslant e^{-n(\rho(\nu,\mu)-\varepsilon)}, \qquad n \in \mathbb{N}; \tag{3.27}$$

б) для любой тонкой окрестности $O(\nu_Y) \subset M_1(Y)$ выполняется оценка

$$\mu^n\bigl\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in Y^n \bigm| \delta_{x,n} \in O(\nu_Y)\bigr\} \geqslant e^{-n(\rho(\nu,\mu)+\varepsilon)}, \qquad n \to \infty. \quad (3.28)$$

Кроме того, для любого числа $\varepsilon > 0$ и любой тонкой окрестности $O(\nu) \subset M_1(X)$ существует такое множество $Y \in \mathfrak{A}$ с конечной мерой $\mu(Y)$, что

$$\mu^n\bigl\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in Y^n \bigm| \delta_{x,n} \in O(\nu)\bigr\} \geqslant e^{-n(\rho(\nu,\mu)+\varepsilon)}, \qquad n \to \infty. \quad (3.29)$$

Теорема 3.12. *Пусть для некоторой пары мер $\nu \in M_1(X)$ и $\mu \in M_\sigma(X)$ действие Кульбака $\rho(\nu, \mu)$ некорректно определено. Тогда найдется такое множество $X_0 \in \mathfrak{A}$ с конечной мерой $\mu(X_0)$, что для всякого $Y \in \mathfrak{A}$, содержащего X_0 и имеющего конечную меру $\mu(Y)$, и любого $\varepsilon > 0$ существует слабая окрестность $O(\nu_Y) \subset M_1(Y)$, удовлетворяющая оценке*

$$\mu^n\bigl\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in Y^n \bigm| \delta_{x,n} \in O(\nu_Y)\bigr\} \leqslant e^{-n/\varepsilon}, \qquad n \in \mathbb{N}. \quad (3.30)$$

Замечание 3.13. Стоит отметить, что в условиях теоремы 3.12 возможно равенство $\rho(\nu, \mu) = -\infty$. В этом случае оценки (3.30) и (3.18) имеют противоположный смысл. Однако противоречия здесь нет, поскольку указанные оценки даются для разных множеств.

В изложенных выше результатах рассматривались счетно-аддитивные целевые меры $\nu \in M_1(X)$. Однако для некоторых последовательностей эмпирических мер их предельными точками могут оказаться конечно-аддитивные вероятностные меры. Таким образом, чтобы полностью описать асимптотику распределения эмпирических мер желательно получить оценки (3.17), (3.18) и для конечно-аддитивных мер ν.

Обозначим через $N_1(X)$ множество всех конечно-аддитивных вероятностых мер на $(X, \mathfrak{A})$. Конечно-аддитивные вероятностные меры $\nu \in N_1(X)$ отождествляются с положительными нормированными линейными функционалами на пространстве ограниченных измеримых функций $B(X)$ (то есть такими функционалами, которые принимают неотрицательные значения на неотрицательных функциях и единичное значение на единичной функции). Пользуясь этим отождествлением, интеграл от функции $f \in B(X)$ по мере $\nu \in N_1(X)$ будем обозначать как $\nu[f]$. Если же $f \in \overline{B}(X)$, то положим

$$\nu[f] = \lim_{c \to -\infty} \nu[f \vee c], \quad \text{где } f \vee c = \max\{f, c\}.$$

Тем самым выражение $\nu[f]$ определено для функций $f \in \overline{B}(X)$ и принимает значения в промежутке $[-\infty, +\infty)$.

Теперь определим *действие Кульбака* $\rho(\nu, \mu)$ как функцию от пары аргументов $\nu \in N_1(X)$ и $\mu \in M_\sigma(X)$ по формуле (3.5).

Теорема 3.14. *Если мера $\nu \in N_1(X)$ не имеет плотности относительно $\mu \in M_\sigma(X)$, то $\rho(\nu,\mu)$ принимает значение $+\infty$ или $-\infty$. Если при этом мера μ конечна или ν счетно-аддитивна, то имеет место равенство $\rho(\nu,\mu) = +\infty$.*

Зададим тонкую топологию на множестве $N_1(X)$ окрестностями вида

$$O(\nu) = \left\{ \delta \in N_1(X) : \left|\delta[f_i] - \nu[f_i]\right| < \varepsilon, \quad i = 1,\dots,k \right\},$$

где $\nu \in N_1(X)$, $\varepsilon > 0$, а функции $f_1,\dots,f_k \in \overline{B}(X)$ таковы, что все значения $\nu[f_i]$ конечны. Как видно, это определение аналогично (3.2).

Меру $\nu \in N_1(X)$ будем называть *собственной* (относительно меры $\mu \in M_\sigma(X)$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $A \in \mathfrak{A}$, что $\mu(A) < +\infty$ и $\nu(A) > 1 - \varepsilon$. Если же, наоборот, существует такое $\varepsilon > 0$, что из неравенства $\nu(A) > 1-\varepsilon$ вытекает $\mu(A) = +\infty$, то меру ν будем называть *несобственной* относительно μ. Очевидно, в случае конечной меры μ все меры $\nu \in N_1(X)$ являются собственными. В случае произвольной σ-конечной меры μ все счетно-аддитивные меры $\nu \in M_1(X)$ являются собственными.

Теперь переформулируем теоремы 3.7 и 3.12 для случая конечно-аддитивных мер ν (теорема 3.11 не рассматривается, поскольку в ней предполагается, что действие Кульбака $\rho(\nu,\mu)$ корректно определено, что влечет счетную аддитивность меры ν).

Теорема 3.16. *Для любых мер $\nu \in N_1(X)$, $\mu \in M_\sigma(X)$ и числа $\varepsilon > 0$ найдется такая тонкая окрестность $O(\nu) \subset N_1(X)$, что*

$$\mu^n\bigl\{x = (x_1,\dots,x_n) \in X^n \bigm| \delta_{x,n} \in O(\nu)\bigr\} \leqslant e^{-n(\rho(\nu,\mu)-\varepsilon)}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.33}$$

С другой стороны, для любых мер $\nu \in N_1(X)$, $\mu \in M_\sigma(X)$, числа $\varepsilon > 0$ и тонкой окрестности $O(\nu) \subset N_1(X)$ выполняется асимптотическая оценка

$$\mu^n\bigl\{x = (x_1,\dots,x_n) \in X^n \bigm| \delta_{x,n} \in O(\nu)\bigr\} \geqslant e^{-n(\rho(\nu,\mu)+\varepsilon)}, \qquad n \to \infty. \tag{3.34}$$

Замечание 3.17. В этой теореме при $\rho(\nu,\mu) = +\infty$ разность $\rho(\nu,\mu) - \varepsilon$ в (3.33) следует заменить на $1/\varepsilon$, а если $\rho(\nu,\mu) = -\infty$, то сумму $\rho(\nu,\mu) + \varepsilon$ в (3.34) следует заменить на $-1/\varepsilon$.

Теорема 3.19. *Если для пары мер $\nu \in N_1(X)$ и $\mu \in M_\sigma(X)$ действие Кульбака $\rho(\nu,\mu)$ некорректно определено, и мера ν собственная относительно μ, то найдется такое множество $X_0 \in \mathfrak{A}$ с конечной мерой $\mu(X_0)$, что для всякого $Y \in \mathfrak{A}$, содержащего X_0 и имеющего конечную меру $\mu(Y)$, и любого $\varepsilon > 0$ существует слабая окрестность $O(\nu_Y) \subset N_1(Y)$, удовлетворяющая оценке*

$$\mu^n\bigl\{x = (x_1,\dots,x_n) \in Y^n \bigm| \delta_{x,n} \in O(\nu_Y)\bigr\} \leqslant e^{-n/\varepsilon}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.37}$$

Глава 4 посвящена исследованию вопроса о возможности альтернативного подхода к определению информационной функции Кульбака—Лейблера с помощью разбиений фазового пространства.

Напомним, что информационная функция Кульбака—Лейблера от пары аргументов $\nu \in M_1(X)$ и $\mu \in M(X)$ определяется по формуле (3.1). С другой стороны, определение информационной функции может базироваться на конечных измеримых разбиениях пространства X.[4] Таким образом, в случае счетно-аддитивной вероятностной меры ν имеются два разных определения информационной функции: с помощью формулы (3.1) и с помощью измеримых разбиений пространства. В четвертой главе осуществляется проверка, когда и в каком смысле эти определения эквивалентны.

Пусть $G = \{X_1, X_2, \dots\}$ — произвольное дискретное, то есть конечное либо счетное, разбиение X на измеримые подмножества X_i. Определим для пары аргументов $\nu \in M_1(X)$ и $\mu \in M(X)$ информационную функцию $\rho'(\nu, \mu)$ с помощью формулы

$$\rho'(\nu, \mu) = \sup_G \sum_{X_i \in G} \nu(X_i) \ln \frac{\nu(X_i)}{\mu(X_i)}. \tag{4.3}$$

Если $\nu(X_i) = 0$, то тогда соответствующее слагаемое в (4.3) считаем равным нулю (в том числе и при равенстве $\mu(X_i) = 0$). Если же $\nu(X_i) > 0$ и $\mu(X_i) = 0$, то соответствующее слагаемое и вся сумма в формуле (4.3) считаются равными $+\infty$.

Теорема 4.2.[5] *Для $\nu \in M_1(X)$ и $\mu \in M(X)$ выполняется равенство*

$$\rho(\nu, \mu) = \rho'(\nu, \mu).$$

Далее исследуется возможность обобщения теоремы 4.2 на случай бесконечной меры μ. Пусть $\nu \in M_1(X)$ и $\mu \in M_\sigma(X)$. В этой ситуации согласно теореме 3.6 информационную функцию $\rho(\nu, \mu)$ можно определить следующим образом:

$$\rho(\nu, \mu) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \nexists\ \varphi(x) = \dfrac{d\nu(x)}{d\mu(x)}, \\[2ex] \displaystyle\int_X \varphi \ln \varphi \, d\mu, & \text{если } \exists\ \varphi(x) = \dfrac{d\nu(x)}{d\mu(x)} \quad \text{и} \quad \displaystyle\int_{\varphi<1} \varphi \ln \varphi \, d\mu > -\infty, \\[2ex] -\infty, & \text{если } \exists\ \varphi(x) = \dfrac{d\nu(x)}{d\mu(x)} \quad \text{и} \quad \displaystyle\int_{\varphi<1} \varphi \ln \varphi \, d\mu = -\infty. \end{cases}$$

---

[4] Бахтин, В. И. Спектральный потенциал, действие Кульбака и принцип больших уклонений для конечно-аддитивных мер / В. И. Бахтин // Тр. Ин-та матем. — 2015. — Т. 23, № 2. — С. 11–23.

[5] Vajda, I. On the f-divergence and singularity of probability measures / I. Vajda // Period. Math. Hung. — 1972. — Vol. 2. — P. 223–234.

Функцию $\rho'(\nu, \mu)$ по-прежнему будем определять формулой (4.3).

Теорема 4.4. *Пусть мера $\nu \in M_1(X)$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mu \in M_\sigma(X)$, и плотность $\varphi = d\nu/d\mu$ удовлетворяет условию*

$$\int_{\varphi<1} \varphi \ln \varphi \, d\mu > -\infty.$$

Тогда выполняется равенство

$$\rho(\nu, \mu) = \rho'(\nu, \mu).$$

Чтобы целиком описать связь функций $\rho(\nu, \mu)$ и $\rho'(\nu, \mu)$ для целевой меры $\nu \in M_1(X)$ и подстилающей меры $\mu \in M_\sigma(X)$ остались два случая, которые теоремы 4.2 и 4.4 не охватывают:

1. Мера $\nu \in M_1(X)$ не абсолютно непрерывна по отношению к бесконечной мере $\mu \in M_\sigma(X)$;

2. Мера $\nu \in M_1(X)$ абсолютно непрерывна относительно бесконечной меры $\mu \in M_\sigma(X)$ с плотностью $\varphi = d\nu/d\mu$, удовлетворяющей условию

$$\int_{\varphi<1} \varphi \ln \varphi \, d\mu = -\infty. \tag{4.11}$$

В случае 1 по определению $\rho(\nu, \mu) = +\infty$. С другой стороны, для этого случая в главе 4 диссертации приводится такой пример, для которого сумма отрицательных слагаемых в правой части (4.3) обращается в $-\infty$ (при любом разбиении G). В этом примере равенство $\rho(\nu, \mu) = \rho'(\nu, \mu)$ нарушается.

В случае 2 по определению $\rho(\nu, \mu) = -\infty$. С другой стороны, для этого случая приводится такой пример, для которого сумма отрицательных слагаемых в правой части (4.3) обращается в $-\infty$ (при любом разбиении G), и при этом существует такое разбиение G, при котором сумма положительных слагаемых в правой части (4.3) обращается в $+\infty$. Таким образом, и в этом случае равенство $\rho(\nu, \mu) = \rho'(\nu, \mu)$ не выполняется.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Доказана непрерывность энтропии Шеннона в тонкой топологии на множестве вероятностных мер на счетном алфавите. Получено обобщение теоремы Макмиллана для счетного алфавита, а также построен пример, демонстрирующий невозможность дословного переноса этой теоремы с конечного алфавита на счетный. Предложен альтернативный вариант переноса

теоремы Макмиллана с конечного алфавита на счетный, доказан соответствующий результат. [1, 2]

2. Понятие информационной функции Кульбака—Лейблера обобщено на случай конечно-аддитивных целевых мер и σ-конечных подстилающих мер. Локальный принцип больших уклонений для эмпирических мер обобщен на пространства с бесконечным объемом. [4]

3. Исследован вопрос о возможности альтернативного подхода к определению информационной функции Кульбака—Лейблера с помощью разбиений фазового пространства. Найдены условия, при которых такое определение возможно. Приведены примеры, демонстрирующие возникающие при таком подходе проблемы, и указаны варианты их разрешения. [3]

Рекомендации по практическому использованию результатов

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут применяться в математической статистике, теории динамических систем, статистической физике. Также они могут быть использованы в учебном процессе при чтении спецкурсов по теории информации, функциональному анализу и смежным дисциплинам.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных изданиях в соответствии с пунктом 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь

1. Сокол, Э. Э. Обобщение теоремы Макмиллана на случай счетного алфавита / Э. Э. Сокол // Тр. Ин-та матем. — 2015. — Т. 23, № 1. — С. 115–122.

2. Сокол, Э. Э. Об информационном смысле энтропии в случае счетного алфавита / Э. Э. Сокол // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. — 2016. — № 1. — С. 96–100.

3. Сокол, Э. Э. Введение информационной функции Кульбака—Лейблера с помощью разбиений вероятностного пространства / Э. Э. Сокол // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. — 2018. — № 1. — С. 59–67.

4. Bakhtin, V. The Kullback—Leibler Information Function For Infinite Measures [Electronic resource] / V. Bakhtin, E. Sokal // Entropy. — 2016. — Vol. 18, iss. 12: 488. — Mode of access: https://doi.org/10.3390/e18120448. — Date of access: 15.12.2016.

Статьи в сборниках материалов научных конференций

5. Бахтин, В. И. Локальный принцип больших уклонений для эмпирических мер по отношению к бесконечным мерам / В. И. Бахтин, Э. Э. Сокол // XII Белорусская математическая конференция: материалы Междунар. науч. конф., Минск, 5 – 10 сентября 2016 г. В 5 ч. / Институт математики НАН Беларуси; ред. С. Г. Красовский. — Минск, 2016. — Ч. 1. — С. 40–41.

Тезисы

6. Сокол, Э. Э. Контрпример к принципу больших уклонений для бесконечных мер / Э. Э. Сокол // Сборник работ 73-й научной конференции студентов и аспирантов Белорусского государственного университета, Минск, 16 – 25 мая 2016 г. В 3 ч. / БГУ, Гл. управление науки; отв. за выпуск С. Г. Берлинская. — Минск, 2016. — Ч. 1. — С. 17–19.

РЕЗЮМЕ

Сокол Эдвард Эдуардович

Асимптотика распределения эмпирических мер на фазовых пространствах бесконечного объема

Ключевые слова: энтропия Шеннона, эмпирическая мера, теорема Макмиллана, информационная функция Кульбака—Лейблера, локальный принцип больших уклонений, тонкая топология.

Целью диссертационной работы является раскрытие содержательного смысла информационной функции Кульбака—Лейблера на пространствах с бесконечным объемом.

В диссертации использовались методы теории меры, выпуклого анализа и теории больших уклонений для эмпирических мер.

Получены следующие новые результаты:

— доказана теорема Макмиллана в случае счетного алфавита;

— локальный принцип больших уклонений для эмпирических мер обобщен на пространства с бесконечным объемом;

— исследован альтернативный подход к определению информационной функции Кульбака—Лейблера на пространствах с бесконечным объемом.

Результаты могут быть использованы в математической статистике, теории динамических систем, статистической физике и в учебном процессе при чтении специальных курсов по теории информации, функциональному анализу и смежным дисциплинам.

РЭЗЮМЭ

Сокал Эдвард Эдуардавіч

Асімптотыка размеркавання эмпірычных мер на фазавых прасторах бесканечнага аб'ему

Ключавыя словы: энтрапія Шэнана, эмпірычная мера, тэарэма Макмілана, інфармацыйная функцыя Кульбака—Лэйблера, лакальны прынцып вялікіх ухіленняў, тонкая тапалогія.

Мэтай дысертацыйнай працы з'яўляецца раскрыцце змястоўнага сэнсу інфармацыйнай функцыі Кульбака—Лэйблера на прасторах з бесканечным аб'емам.

У дысертацыі выкарыстоўваліся метады тэорыі меры, выпуклага аналіза і тэорыі вялікіх ухіленняў для эмпірычных мер.

Атрыманы наступныя новыя вынікі:

— даказана тэарэма Макмілана для злічальнага алфавіта;

— лакальны прынцып вялікіх ухіленняў для эмпірычных мер абагульнены на прасторы з бесканечным аб'емам;

— даследаваны альтэрнатыўны падыход да азначэння інфармацыйнай функцыі Кульбака—Лэйблера на прасторах з бесканечным аб'емам.

Вынікі могуць быць выкарыстаны ў матэматычнай статыстыцы, тэорыі дынамічных сістэм, статыстычнай фізіцы і ў навучальным працэсе пры чытанні спецыяльных курсаў па тэорыі інфармацыі, функцыянальнаму аналізу і сумежным дысцыплінам.

SUMMARY

Sokal Edvard

An asymptotics of distribution of empirical measures on phase spaces with infinite volume

Keywords: Shannon entropy, empirical measure, McMillan theorem, Kullback—Leibler information function, local large deviation principle, fine topology.

The purpose of the thesis is to reveal the substantial meaning of the Kullback—Leibler information function on the spaces with infinite volume.

The methods of measure theory, convex analysis and large deviation theory for empirical measures were used in the research.

The following new results were obtained:

— McMillan theorem for countable alphabet was proved;

— the local large deviation principle for empirical measures was generalized on the case of spaces with infinite volume;

— an alternative approach to the definition of Kullback—Leibler information function on spaces with infinite volume was investigated.

The results can be used in mathematical statistics, dynamical systems theory, statistical physics, and in the educational process when reading special courses on information theory, functional analysis, and related disciplines.