БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.956.4

НИКИТИН
Александр Игоревич

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНЫМИ НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Минск, 2021

Научная работа выполнена в УО «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова».

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ –

Гладков Александр Львович,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой
математической кибернетики
Белорусского государственного университета.

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:

Шушкевич Геннадий Чеславович,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры
современных технологий программирования
УО «Гродненский государственный
университет им. Янки Купалы»;
Козловская Инесса Станиславовна,
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры
компьютерных технологий и систем ФПМИ
Белорусского государственного университета.

ОППОНИРУЮЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ –

ГНУ «Институт математики
НАН Беларуси».

Защита состоится **14 мая 2021 года** в **10.00** на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по адресу: Минск, ул. Ленинградская 8 (корпус юридического факультета), ауд. 407. Телефон ученого секретаря: 209-57-09.
Почтовый адрес: пр-т Независимости 4, Минск, 220030.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан «7» апреля 2021 года.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций
кандидат физ.-мат. наук доцент Т. С. Мардвилко

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные параболические и стационарные уравнения лежат в основе математических моделей самых разнообразных явлений и процессов в механике, физике, технологии, биофизике, биологии, экологии и многих других областях знаний. С позиций конструктивных исследований каждая нелинейная параболическая задача обладает своей индивидуальностью и, вообще говоря, не может быть решена на основе единого подхода. Как правило, для анализа даже отдельных и весьма частных свойств решений требуется целый спектр методов качественного исследования. Этот факт подчеркивает глубокую содержательность даже простейших модельных задач для нелинейных уравнений и систем уравнений с частными производными.

После публикации статьи японского математика Х. Фуджита[1] в 1966 году одной из самых популярных проблем стала проблема существования глобальных решений различных задач для нелинейных параболических уравнений. Ежегодно по этой тематике публикуется большое количество статей. Несколько последних десятилетий стали интенсивно изучаться задачи с нелокальными нелинейностями, как в уравнении, так и в граничном условии. В основном рассматриваются задачи с постоянными коэффициентами в уравнении и граничных условиях. В данной работе исследуется влияние переменных коэффициентов на условия глобальной разрешимости начально-краевых задач для систем полулинейных параболических уравнений с нелокальными граничными условиями, что является мало изученным.

Единственность решения задачи является необходимым условием ее корректности. Имеется достаточно много результатов о единственности решений начально-краевых задач для нелинейных параболических уравнений и систем с локальными граничными условиями. Однако практически нет результатов о единственности решений начально-краевых задач для нелинейных параболических систем уравнений с нелокальными граничными условиями и нелинейностями, неудовлетворяющими условию Липшица. В настоящей диссертации доказывается единственность решений двух таких задач, а также указаны условия при которых единственность нарушается.

---

[1]Fujita, H. On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \triangle u + u^{1+a}$ / H. Fujita // Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo. Section 1A. – 1966. – Vol. 13. – P. 109–124.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами, проектами и темами

Диссертация выполнена на кафедре геометрии и математического анализа учреждения образования «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова» с 2011 по 2019 год в соответствии со следующими научными темами: в рамках задания 1.2.03 «Нелинейные параболические и эллиптические уравнения и системы» (номер государственной регистрации 20111878) подпрограммы «Разработка и исследование математических методов и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, экономики и социальных наук» государственной программы научных исследований на 2011–2015 годы «Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа устойчивого инновационного развития» («Конвергенция»); в рамках задания 1.2.03 «Нелинейные параболические и стационарные уравнения и системы» (номер государственной регистрации 20161890) подпрограммы «Методы математического моделирования сложных систем» государственной программы научных исследований на 2016–2020 годы «Конвергенция-2020».

Цель и задачи исследования

Целью данной диссертации является исследование решений начально-краевых задач для систем полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями.

Для достижения этой цели в диссертации необходимо было решить следующие задачи:

— исследовать вопрос единственности и неединственности решений;

— определить достаточные условия существования и отсутствия глобальных решений.

Объектом исследования являются начально-краевые задачи для систем полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями.

Предметом исследования являются условия единственности и существования глобальных решений рассматриваемых задач.

Научная новизна

В диссертационной работе получены достаточные условия единственности и неединственности решений начально-краевых задач для систем полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями. Изучено влияние переменных коэффициентов на существование глобальных решений начально-краевых задач для систем полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями. Полученные достаточные условия обобщают уже известные результаты для аналогичных начально-краевых задач с постоянными коэффициентами.

Положения, выносимые на защиту

1. Условия единственности и неединственности решений начально-краевых задач для систем полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями Дирихле.

2. Достаточные условия существования и отсутствия глобальных решений начально-краевых задач для систем полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями Дирихле.

3. Условия единственности и неединственности решений начально-краевых задач для систем полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями Неймана.

4. Достаточные условия существования и отсутствия глобальных решений начально-краевых задач для систем полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями Неймана.

Личный вклад соискателя ученой степени

Диссертационная работа выполнена соискателем под руководством доктора физико-математических наук профессора Гладкова Александра Львовича. Научным руководителем поставлены задачи и предложена методика их исследования. В совместных работах идеи и методы принадлежат научному руководителю, а реализация – соискателю. Остальные работы выполнены самостоятельно и опубликованы без соавторов.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Основные результаты диссертации апробированы на следующих международных и региональных научных конференциях: международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «V Машеровские чтения» (29-30 сентября 2011 г., Витебск), региональной научно-практической конференции студентов и магистрантов «Образование XXI века» (29-30 марта 2012 г., Витебск), международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «VI Машеровские чтения» (27-28 сентября 2012 г., Витебск), международной научной конференции «XI Белорусская математическая конференция» (5-9 ноября 2012 г., Минск), международной научной конференции «Еругинские чтения – 2013» (13-16 мая 2013 г., Гродно), международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «VII Машеровские чтения» (24-25 сентября 2013 г., Витебск), региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов «Наука – образованию, производству, экономике» (13-14 марта 2014 г., Витебск), международной научно-практической конференции «VIII Машеровские чтения» (16-17 октября 2014 г., Витебск), международной научной конференции «Математическое и компьютерное моделирование» (21 ноября 2014 г., Омск), международной научной конференции «XII Белорусская математическая конференция» (5-10 сентября 2016 г., Минск), региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов «Наука – образованию, производству, экономике» (9-10 февраля 2017 г., Витебск), международной научной конференции «Еругинские чтения – 2017» (16-20 мая 2017 г., Гродно), 9-ом международном научном семинаре «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» (17-21 сентября 2018 г., Минск), международной научной конференции «Еругинские чтения – 2019» (14-17 мая 2019 г., Могилев), международной научной конференции «Математическое и компьютерное моделирование» (22 ноября 2019 г., Омск), международной научной конференции, посвященной 95-летию со дня рождения члена корреспондента АН БССР, профессора Иванова Евгения Алексеевича «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения» (17-20 декабря 2019 г., Гродно).

Результаты диссертации внедрены в учебный процесс Витебского государственного университета имени П. М. Машерова (акт о внедрении от 14.12.2017).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 22 работах, из которых: 6 статей в научных журналах, соответствующих пункту 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (объемом 4,23 авторского листа), 12 статей в сборниках материалов научных конференций, 4 тезисов.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня определений и условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения, библиографического списка и одного приложения. Полный объем диссертации — 105 страниц, из них 1 страницу занимает 1 приложение, 12 страниц – библиографический список. Библиографический список содержит 117 наименований, включая 22 собственные публикации соискателя ученой степени.

Автор выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность своему научному руководителю — доктору физико-математических наук профессору Гладкову Александру Львовичу за помощь и внимание, оказанные им при написании данной диссертации.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Глава 1 содержит аналитический обзор основных литературных источников по теме диссертации. В этой главе дается описание объектов исследования диссертационной работы.

Глава 2 содержит ряд вспомогательных утверждений, наиболее часто используемых в доказательствах на протяжении последующих глав диссертации.

Основное содержание диссертации представлено в главах 3—4. Отметим тот факт, что в диссертации рассматриваются классические решения. Пусть $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $S_T = \Omega \times (0,T)$, $\Gamma_T = S_T \bigcup \overline{\Omega} \times \{0\}$.

В третьей главе рассматривается начально-краевая задача для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями Дирихле:

$$\begin{cases} u_t = \triangle u + c_1(x,t)v^p, v_t = \triangle v + c_2(x,t)u^q, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = \int_\Omega k_1(x,y,t)u^m(y,t)dy, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ v(x,t) = \int_\Omega k_2(x,y,t)v^n(y,t)dy, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

где p, q, m, n – положительные постоянные, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ с гладкой границей $\partial\Omega$.

Будем предполагать, что для задачи (1) выполнено следующее:

$$c_i(x,t) \in C^{\alpha}_{loc}(\overline{\Omega} \times [0,+\infty)), 0 < \alpha < 1, c_i(x,t) \geq 0, i = 1,2;$$

$$k_i(x,y,t) \in C(\partial\Omega \times \overline{\Omega} \times [0,+\infty)), k_i(x,y,t) \geq 0, i = 1,2;$$

$$u_0(x), v_0(x) \in C(\overline{\Omega}), u_0(x) \geq 0, v_0(x) \geq 0 \text{ в } \Omega;$$

$$u_0(x) = \int_\Omega k_1(x,y,0)u_0^m(y)dy, v_0(x) = \int_\Omega k_2(x,y,0)v_0^n(y)dy \text{ на } \partial\Omega.$$

В разделах 3.2 и 3.3 доказаны принцип сравнения решений [6], локальное существование решения [1], а также положительность нетривиального решения задачи (1).

В разделе 3.4 рассматриваются условия единственности и неединственности решений. Получены достаточные условия единственности решений задачи (1).

Теорема 1 [1].*Пусть задача* (1) *имеет решение в* Q_T *с неотрицательными начальными данными, если* $\min(p,q,m,n) \geq 1$*, и с положительными начальными данными и нетривиальными по* y *функциями* $k_1(x,y,t)$, $k_2(x,y,t)$ *для любых* $x \in \partial\Omega$ *и* $t > 0$*, если* $\min(p,q,m,n) < 1$*. Тогда решение задачи* (1) *единственно в* Q_T.

Установлены условия, при выполнении которых решение поставленной задачи является неединственным.

Теорема 2 [1]. *Пусть* $min(pq,m,n) < 1$, $u_0(x) = v_0(x) \equiv 0$*. Предположим, что максимальное решение задачи* (1) *существует в* Q_T*. Допустим, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

$$\begin{gathered} c_1(x_0,t_0) > 0, \quad c_2(x_0,t_0) > 0 \\ \textit{для некоторых} \quad x_0 \in \Omega, t_0 \in [0,T), \ \textit{если } pq < 1, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} k_1(x,y_1,t_1) > 0 \quad \textit{для любого } x \in \partial\Omega \\ \textit{и некоторых} \quad y_1 \in \partial\Omega, t_1 \in [0,T), \ \textit{если } m < 1, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} k_2(x,y_2,t_2) > 0 \quad \textit{для любого } x \in \partial\Omega \\ \textit{и некоторых} \quad y_2 \in \partial\Omega, t_2 \in [0,T), \ \textit{если } n < 1. \end{gathered}$$

Тогда максимальное решение задачи (1) *нетривиально в* Q_T.

В Теореме 1 доказана единственность решения задачи (1) при $min(p,q,m,n) < 1$ с положительными начальными данными. Для некоторого класса функций $c_i(x,t)$ и $k_i(x,y,t)$, $i = 1,2$, показана единственность решения в случае неотрицательных начальных данных.

Теорема 3 [1]. *Пусть выполнены условия Теоремы 2 с* $t_i = 0$, $i = 0,1,2$, *но только* $u_0(x) \not\equiv 0$ *или* $v_0(x) \not\equiv 0$*. Предположим, что* $c_i(x,t) \not\equiv 0$, $i = 1,2$, *в* Q_τ *для любого* $\tau > 0$*, и* $k_i(x,y,t)$, $i = 1,2$, *не являются тривиальными функциями по* y *для любых* $x \in \partial\Omega$ *и* $0 < t < T$*. Если* $c_i(x,t)$ *и* $k_i(x,y,t)$, $i = 1,2$, *– неубывающие по переменной* t *функции на отрезке* $0 \leq t \leq t_*$ *для некоторого* $t_* > 0$*, то решение задачи* (1) *единственно.*

В разделе 3.5 доказывается глобальное существование решения задачи (1) при $max(pq,m,n) \leq 1$.

Теорема 4 [3]. *Пусть* $max(pq,m,n) \leq 1$*. Тогда задача* (1) *имеет глобальное решение при любых начальных данных.*

В разделе 3.6 рассматриваются достаточные условия существования и отсутствия глобального решения задачи (1) при $\max(pq,m,n) > 1$.

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения

$$\triangle\varphi(x)+\lambda\varphi(x)=0, x\in\Omega, \quad \varphi(x)\big|_{\partial\Omega}=0. \tag{2}$$

Пусть φ – собственная функция задачи (2), соответствующая первому собственному значению λ, которая удовлетворяет условию $\int_\Omega \varphi(x)dx=1$. Обозначим

$$\varphi_s=\sup_\Omega \varphi(x), \underline{c}_i(t)=\inf_\Omega c_i(x,t), \underline{k}_i(t)=\frac{\lambda}{\varphi_s}\inf_{\partial\Omega\times\Omega} k_i(x,y,t), i=1,2.$$

При $\max(pq,m,n)>1$ рассмотрим следующую задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} f'(t)=k_1(t)\exp(\lambda(1-m)t)f^m(t)+c_1(t)\exp(\lambda(1-p)t)g^p(t), \quad t>0,\\ g'(t)=k_2(t)\exp(\lambda(1-n)t)g^n(t)+c_2(t)\exp(\lambda(1-q)t)f^q(t), \quad t>0,\\ f(0)=\int_\Omega u_0(x)\varphi(x)dx, g(0)=\int_\Omega v_0(x)\varphi(x)dx, \end{cases} \tag{3}$$

где $k_1(t)=\underline{k}_1(t)$ при $m\geq 1$ и $k_1(t)=0$ при $m<1$, $k_2(t)=\underline{k}_2(t)$ при $n\geq 1$ и $k_2(t)=0$ при $n<1$, $c_1(t)=\underline{c}_1(t)$ при $p\geq 1$ и $c_1(t)=0$ при $p<1$, $c_2(t)=\underline{c}_2(t)$ при $q\geq 1$ и $c_2(t)=0$ при $q<1$.

Теорема 5 [3]. *Пусть* $p\geq 1, q\geq 1, pq>1$ *или* $\max(m,n)>1$ *и задача Коши* (3) *не имеет глобального решения. Тогда задача* (1) *не имеет нетривиального глобального решения.*

Из Теоремы 5 следуют условия отсутствия глобального решения задачи (1) при $m>1$ или $n>1$.

Теорема 6 [3]. *Если*

$$m>1 \text{ и } \int_0^\infty \underline{k}_1(t)\exp(\lambda(1-m)t)dt=\infty,$$

$$\text{и } c_1(x,t)\not\equiv 0 \text{ в } \Omega\times(0,\infty) \text{ или } u_0(x)\not\equiv 0 \text{ в } \Omega,$$

или

$$n>1 \text{ и } \int_0^\infty \underline{k}_2(t)\exp(\lambda(1-n)t)dt=\infty,$$

$$\text{и } c_2(x,t)\not\equiv 0 \text{ в } \Omega\times(0,\infty) \text{ или } v_0(x)\not\equiv 0 \text{ в } \Omega,$$

то задача (1) *не имеет нетривиального глобального решения.*

Получены достаточные условия отсутствия глобальных решений задачи (1) при $p\geq 1, q\geq 1, pq>1$. Для произвольного вещественного числа $\sigma\in(1,+\infty)$ и измеримой функции $r:[a,+\infty)\to R$ положим

$$r(t;\sigma)=\operatorname*{ess\,inf}_{(t/\sigma,t\sigma)\bigcap[a,+\infty)} r.$$

Теорема 7 [3]. *Если* $p \geq 1, q \geq 1, pq > 1$ *и для*

$$r_1(t) = \underline{c}_1(t) \exp(\lambda(1-p)t),\ r_2(t) = \underline{c}_2(t) \exp(\lambda(1-q)t),$$

выполнено

$$\int_a^{+\infty} t^p r_1(t;\sigma) r_2^p(t;\sigma) dt = \infty,$$

или

$$\int_a^{+\infty} t^q r_2(t;\sigma) r_1^q(t;\sigma) dt = \infty.$$

для некоторого $\sigma \in (1, \infty)$, *то задача* (1) *не имеет нетривиального глобального решения.*

Также установлены достаточные условия отсутствия нетривиального глобального решения задачи (1) при $pq > 1$ и $\min(p,q) < 1$. Определим функции

$$\gamma_1(t) = \frac{t^{1-p} \exp(\lambda(1-pq)t) \underline{c}_2^p(t)}{\underline{c}_1(t)}, \quad \gamma_2(t) = \frac{t^{1-q} \exp(\lambda(1-pq)t) \underline{c}_1^q(t)}{\underline{c}_2(t)}.$$

Теорема 8 [3]. *Пусть* $pq > 1$ *и* $\underline{c}_i(t) > 0$, $i = 1, 2$ *при* $t > t_0 \geq 0$. *Если* $p < 1 < q$ *и*

$$\int_{t_1}^{\infty} \underline{c}_1(\theta) \theta^{p-1} \sqrt{\min_{t_1 \leq t \leq \theta} \gamma_1(t)}\, d\theta = \infty,\ t_1 > t_0,$$

или $q < 1 < p$ *и*

$$\int_{t_1}^{\infty} \underline{c}_2(\theta) \theta^{q-1} \sqrt{\min_{t_1 \leq t \leq \theta} \gamma_2(t)}\, d\theta = \infty, t_1 > t_0,$$

то задача (1) *не имеет нетривиального глобального решения.*

Показано существование глобального решения задачи (1) для достаточно малых начальных данных. Положим

$$\overline{c}(t) = \max(\sup_{\Omega}(\exp(\lambda(1-p)t) c_1(x,t)), \sup_{\Omega}(\exp(\lambda(1-q)t) c_2(x,t)).$$

Теорема 9 [3]. *Пусть* $\min(pq, m, n) > 1$ *и выполняются неравенства*

$$\int_0^{\infty} \overline{c}(t) dt < \infty,$$

$$\int_{\Omega} k_1(x,y,t) dy \leq A_1 \exp(\sigma_1 t), x \in \partial\Omega, t > 0,$$

$$\int_{\Omega} k_2(x,y,t) dy \leq A_2 \exp(\sigma_2 t), x \in \partial\Omega, t > 0,$$

где $A_1, A_2 > 0$, $\sigma_1 < (m-1)\lambda$, $\sigma_2 < (n-1)\lambda$. *Тогда существуют глобальные решения задачи* (1) *с достаточно малыми начальными данными.*

В разделах 3.7 и 3.8 более подробно рассмотрены частные случаи задачи (1): $m = n = 1$, $pq > 1$ и $p = q = 1, \min(m,n) > 1$. Доказан ряд утверждений о существовании и отсутствии глобальных решений для этих случаев [3].

В четвертой главе рассматривается начально-краевая задача для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями Неймана:

$$\begin{cases} u_t = \triangle u + c_1(x,t)v^p, v_t = \triangle v + c_2(x,t)u^q, x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \int_\Omega k_1(x,y,t)u^m(y,t)dy, x \in \partial\Omega, t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = \int_\Omega k_2(x,y,t)v^n(y,t)dy, x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), x \in \Omega, \end{cases} \tag{4}$$

где p, q, m, n – положительные постоянные, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ с гладкой границей $\partial\Omega$, ν – единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Относительно данных задачи (4) будем предполагать следующее:

$$\begin{aligned} c_i(x,t) &\in C^\alpha_{loc}(\overline{\Omega} \times [0,+\infty)), 0 < \alpha < 1, c_i(x,t) \geq 0, i = 1,2; \\ k_i(x,y,t) &\in C(\partial\Omega \times \overline{\Omega} \times [0,+\infty)), k_i(x,y,t) \geq 0, i = 1,2; \\ u_0(x), v_0(x) &\in C^1(\overline{\Omega}), u_0(x) \geq 0, v_0(x) \geq 0 \text{ в } \Omega; \\ \frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} &= \int_\Omega k_1(x,y,0)u_0^m(y)dy, \frac{\partial v_0(x)}{\partial \nu} = \int_\Omega k_2(x,y,0)v_0^n(y)dy \text{ на } \partial\Omega. \end{aligned}$$

В разделах 4.2 и 4.3 доказаны принцип сравнения решений [2], локальное существование решения [2], а также положительность нетривиального решения для задачи (4).

В разделе 4.4 рассматриваются условия единственности и неединственности решений. Получены достаточные условия единственности решений задачи (4).

Теорема 10 [4]. *Пусть задача* (4) *имеет решение в* Q_T *с неотрицательными начальными данными в* $\overline{\Omega}$, *если* $\min(pq, pn, qm, m, n) \geq 1$, *и с положительными начальными данными в* $\overline{\Omega}$ *в противном случае. Тогда решение задачи* (4) *единственно в* Q_T.

Также показана неединственность решения задачи (4) с тривиальными начальными данными при $min(pq, m, n) < 1$.

Теорема 11 [4]. *Пусть* $min(pq, m, n) < 1$, $u_0(x) = v_0(x) \equiv 0$. *Предположим, что максимальное решение задачи* (4) *существует в* Q_T. *Допустим, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

$$\begin{gathered} c_1(x_0,t_0) > 0, \quad c_2(x_0,t_0) > 0 \\ \text{для некоторых} \quad x_0 \in \Omega, t_0 \in [0,T), \ \text{если } pq < 1, \end{gathered}$$

$$k_1(x,y_1,t_1)>0 \quad \textit{для любого } x\in\partial\Omega$$
$$\textit{и некоторых} \quad y_1\in\partial\Omega, t_1\in[0,T), \ \textit{если } m<1,$$

$$k_2(x,y_2,t_2)>0 \quad \textit{для любого } x\in\partial\Omega$$
$$\textit{и некоторых} \quad y_2\in\partial\Omega, t_2\in[0,T), \ \textit{если } n<1.$$

Тогда максимальное решение задачи (4) *нетривиально в* Q_T.

Для некоторого класса функций $c_i(x,t)$ и $k_i(x,y,t)$, $i=1,2$, доказана единственность решения задачи (4) с нетривиальными начальными данными.

Теорема 12 [4]. *Пусть выполнены условия Теоремы 11 с* $t_i=0$, $i=\ 0,1,2$, *но только* $u_0(x)\not\equiv 0$ *или* $v_0(x)\not\equiv 0$. *Предположим, что* $c_i(x,t)\not\equiv 0$, $i=1,2$, *в* Q_τ *для любого* $\tau>0$, *и* $c_i(x,t), k_i(x,y,t), i=1,2$ – *неубывающие по переменной* t *функции на отрезке* $0\le t\le \bar{t}$ *для некоторого* $\bar{t}\in(0,T]$. *Тогда решение задачи* (4) *единственно в* Q_T.

В разделе 4.5 показано существование глобальных решений задачи (4).

Теорема 13 [5]. *Пусть* $\max(pq,m,n)\le 1$. *Тогда задача* (4) *имеет глобальное решение при любых начальных данных.*

В разделе 4.6 рассматриваются достаточные условия существования и отсутствия глобального решения задачи (4) при $\max(pq,m,n)>1$.

Обозначим

$$\underline{c}_i(t)=\inf_{\Omega} c_i(x,t), \underline{k}_i(t)=\inf_{\Omega}\int_{\partial\Omega} k_i(x,y,t)dS_x, i=1,2.$$

Рассмотрим следующую задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} f'(t)=\underline{k}_1^*(t)f^m(t)+\underline{c}_1^*(t)g^p(t), t>t_0,\\ g'(t)=\underline{k}_2^*(t)g^n(t)+\underline{c}_2^*(t)f^q(t), t>t_0,\\ f(t_0)=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x,t_0)dx, g(t_0)=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v(x,t_0)dx,\end{array}\right. \tag{5}$$

где $t_0\ge 0$, $\underline{k}_1^*(t)=\underline{k}_1(t)$ при $m\ge 1$ и $\underline{k}_1^*(t)=0$ при $m<1$, $\underline{k}_2^*(t)=\underline{k}_2(t)$ при $n\ge 1$ и $\underline{k}_2^*(t)=0$ при $n<1$, $\underline{c}_1^*(t)=\underline{c}_1(t)$ при $p\ge 1$ и $\underline{c}_1^*(t)=0$ при $p<1$, $\underline{c}_2^*(t)=\underline{c}_2(t)$ при $q\ge 1$ и $\underline{c}_2^*(t)=0$ при $q<1$.

Теорема 14 [5]. *Пусть* $p\ge 1, q\ge 1, pq>1$ *или* $max(m,n)>1$ *и для некоторого* $t_0\ge 0$ *решение задачи Коши* (5) *определено только на конечном промежутке. Тогда решение задачи* (4) *не существует глобально.*

Из Теоремы 14 следуют условия отсутствия глобального решения задачи (4) при $m>1$ или $n>1$.

Теорема 15 [5]. *Если*

$$m>1, \int_0^\infty \underline{k}_1(t)dt=\infty \ \textit{и } c_1(x,t)\not\equiv 0 \ \textit{в } \Omega\times(0,\infty) \ \textit{или } u_0(x)\not\equiv 0 \ \textit{в } \Omega,$$

или

$$n > 1, \int_0^\infty \underline{k}_2(t)dt = \infty \text{ и } c_2(x,t) \not\equiv 0 \text{ в } \Omega \times (0,\infty) \text{ или } v_0(x) \not\equiv 0 \text{ в } \Omega,$$

то задача (4) *не имеет нетривиального глобального решения.*

Показано существование глобального решения задачи (4) для достаточно малых начальных данных. Введем обозначения

$$\overline{c}_i(t) = \sup_\Omega c_i(x,t), \overline{k}_i(t) = |\partial\Omega| \sup_{\partial\Omega\times\Omega} k_i(x,y,t), i = 1,2. \tag{6}$$

Предположим, что

$$\int_0^\infty \overline{c}_i(t)dt < \infty, i = 1,2, \tag{7}$$

$$\int_0^\infty \overline{k}_i(t)dt < \infty, i = 1,2, \tag{8}$$

и существуют положительные постоянные α, t_0 и K такие, что $\alpha > t_0$ и

$$\int_{t-t_0}^t \frac{\overline{k}_i(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau \leq K \text{ для всех } t \geq \alpha, i = 1,2. \tag{9}$$

Теорема 16 [5]. *Пусть* $\min(pq,m,n) > 1$ *и выполнены условия* (7)–(9). *Тогда задача* (4) *имеет глобальные ограниченные решения при достаточно малых начальных данных.*

В разделах 4.7 и 4.8 более подробно рассмотрены частные случаи задачи (4): $p = q = 1, \min(m,n) > 1$ и $m = n = 1$, $pq > 1$. Доказан ряд утверждений о существовании и отсутствии глобальных решений для этих случаев [5].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Найдены достаточные условия единственности и неединственности решений начально-краевых задач для систем полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями Дирихле [1, 8, 10, 17].

2. Получены достаточные условия существования и отсутствия глобальных решений начально-краевых задач для систем полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями Дирихле [3, 6, 7, 9, 13, 14].

3. Найдены достаточные условия единственности и неединственности решений начально-краевых задач для систем полулинейных параболических

уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями Неймана [2, 4, 12, 18, 19].

4. Получены достаточные условия существования и отсутствия глобальных решений начально-краевых задач для систем полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями Неймана [5, 11, 15, 16, 20, 21, 22].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Диссертационная работа имеет теоретический характер. Полученные результаты исследования могут найти применение у специалистов по общей теории дифференциальных уравнений с частными производными. Материалы исследований могут быть использованы при чтении спецкурсов по теории нелинейных параболических уравнений для студентов математических специальностей, написании курсовых и дипломных проектов, магистерских и кандидатских диссертаций.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи, в соответствии с п. 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь

1. Gladkov, A. Reaction-Diffusion System with Nonlinear Nonlocal Boundary Conditions [Electronic resource] / A. Gladkov, A. Nikitin // International Journal of Partial Differential Equations. – 2014. – Vol. 2014. – Mode of access: https://www.hindawi.com/journals/ijpde/2014/523656/. – Date of access: 31.05.2020.

2. Никитин, А. И. Локальное существование решений начально-краевой задачи для системы полулинейный параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями / А. И. Никитин // Веснiк Вiцебскага дзяржаўнага ўнiверсiтэта. – 2015. – № 5(89). – С. 14–19.

3. Гладков, А. Л. О существовании глобальных решений системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями / А. Л. Гладков, А. И. Никитин // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52, № 4. – С. 490–505.

4. Никитин, А. И. О единственности решений начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями / А. И. Никитин // Труды Института математики. – 2017. – Т. 25, № 2. – С. 60–69.

5. Гладков, А. Л. О глобальном существовании решений начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями Неймана / А. Л. Гладков, А. И. Никитин // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 1. – С. 88–107.

6. Гладков, А. Л. Принцип сравнения решений начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями / А. Л. Гладков, А. И. Никитин // Веснiк Вiцебскага дзяржаўнага ўнiверсiтэта. – 2019. – № 4(105). – С. 5–9.

Статьи в сборниках материалов конференций

7. Никитин, А. И. Существование и отсутствие решений начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с

нелинейными нелокальными граничными условиями / А. И. Никитин, А. Л. Гладков // V Машеровские чтения: материалы междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 29-30 сентября 2011 г. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: А. П. Солодков (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: УО «ВГУ им. П. М. Машерова», 2011. – С. 23–24.

8. Никитин, А. И. Единственность решений для систем полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями / А. И. Никитин // Образование XXI века: материалы регион. науч.-практ. конф. студентов и магистрантов, Витебск, 29-30 марта 2012 г. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: А. П. Солодков (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: УО «ВГУ им. П. М. Машерова», 2012. – С. 26.

9. Никитин, А. И. Свойства решений системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями / А. И. Никитин // VI Машеровские чтения: материалы междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 27-28 сентября 2012 г. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: А. П. Солодков (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: УО «ВГУ им. П. М. Машерова», 2012. – С. 37–38.

10. Никитин, А. И. Свойства неотрицательных решений систем полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями / А. И. Никитин // XI Белорусская математическая конференция: тезисы докладов междунар. науч. конф., Минск, 5-9 ноября 2012 г. / Ин-т математики НАН Беларуси; БГУ; редкол.: С. Г. Красовский. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2012. – Ч. 2. – С. 81–82.

11. Никитин, А. И. Глобальное существование решений системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями / А. И. Никитин // VII Машеровские чтения: материалы междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 24-25 сентября 2013 г. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: А. П. Солодков (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: УО «ВГУ им. П. М. Машерова», 2013. – С. 27.

12. Никитин, А. И. Единственность решений для систем полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями / А. И. Никитин // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XIX (66) Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, науч. сотрудников и аспирантов, Витебск, 13-14 марта 2014 г.: в 2 т. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: И. М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: УО «ВГУ им. П. М. Машерова», 2014. – Т. 1. – С. 28–29.

13. Никитин, А. И. Свойства решений системы полулинейных параболических уравнений с нелокальными граничными условиями / А. И. Никитин // VIII Машеровские чтения: материалы междунар. науч.-практ. конф.,

Витебск, 16-17 октября 2014 г. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: И. М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: УО «ВГУ им. П. М. Машерова», 2014. – С. 20.

14. Никитин, А. И. Отсутствие глобальных решений начально-краевых задач для систем полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями / А. И. Никитин // Математическое и компьютерное моделирование: сб. материалов Междунар. науч. конф., Омск, 21 ноября 2014 г. / ФГБОУ ВПО «ОмГУ им. Ф.М. Достоевского». – Омск: Изд-во Омского государственного университета, 2014. – С. 40–41.

15. Никитин, А. И. Свойства неотрицательных решений систем полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями / А. И. Никитин // XII Белорусская математическая конференция: материалы Междунар. науч. конф., Минск, 5-10 сентября 2016 г.: в 5 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси; БГУ; редкол.: С. Г. Красовский. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2016. – Ч. 2. – С. 72–73.

16. Никитин, А. И. Глобальное существование решений для систем полулинейных параболических уравнений с линейными нелокальными граничными условиями / А. И. Никитин // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XXII (69) Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 9-10 февраля 2017 г.: в 2 т. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: И. М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: УО «ВГУ им. П. М. Машерова», 2017. – Т. 1. – С. 25–26.

17. Никитин, А.И. Принцип сравнения решений начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями Дирихле / А. И. Никитин // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: материалы IV междунар. науч. конф., посвящ. 95-лет. со дня рожд. чл.-кор. АН БССР, проф. Иванова Евгения Алексеевича, Гродно, 17–20 декабря 2019 г. / Ин-т математики НАН Беларуси; БГУ; ГрГУ. – Гродно: ГрГУ им. Я. Купалы, 2019. – С. 58–59.

18. Никитин, А.И. Единственность решений начально-краевой задачи для системы линейных параболических уравнений с нелокальными граничными условиями Неймана / А. И. Никитин // Математическое и компьютерное моделирование: сб. материалов Междунар. науч. конф., Омск, 22 ноября 2019 г. / ФГБОУ ВПО «ОмГУ им. Ф.М. Достоевского». – Омск: Изд-во Омского государственного университета, 2020. – С. 17–18.

Тезисы докладов

19. Никитин, А. И. Единственность и неединственность решений систем полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями / А. И. Никитин // Еругинские чтения – 2013: тезисы докладов XV междунар. науч. конф. по дифф. ур., Гродно, 13-16 мая 2013 г. / Ин-т математики НАН Беларуси; БГУ; ГрГУ. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2013. – Ч. 2. – С. 18.

20. Никитин, А. И. Глобальное существование решений для систем линейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями / А. И. Никитин // Еругинские чтения – 2017: тезисы докладов XVII междунар. науч. конф. по дифф. ур., Минск, 16-20 мая 2017 г. / Ин-т математики НАН Беларуси; БГУ; БНТУ. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2017. – Ч. 2. – С. 19–20.

21. Gladkov, A. On global existence of solutions of semilinear parabolic systems with nonlinear nonlocal boundary condition / A. Gladkov, A. Nikitin // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: материалы 9-го междунар. науч. семинара, Минск, 17-21 сентября 2018 г. / Ин-т математики НАН Беларуси; БГУ. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2018. – С. 21–22.

22. Гладков, А. Л. Отсутствие глобальных решений начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с линейными нелокальными граничными условиями Неймана / А. Л. Гладков, А. И. Никитин // Еругинские чтения – 2019: материалы XIX междунар. науч. конф. по дифф. ур., Могилев, 14-17 мая 2019 г. / Ин-т математики НАН Беларуси; БГУ; Белорусско-росс. ун-т. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2019. – Ч. 2. – С. 14–15.

РЕЗЮМЕ

Никитин Александр Игоревич

О существовании и единственности решений начально-краевых задач для систем полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями

Ключевые слова: принцип сравнения, полулинейные параболические уравнения, нелокальные граничные условия, единственность решений, существование глобальных решений.

Цель работы: исследование решений начально-краевых задач для систем полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями.

Методы исследования: методы сравнения решений, методы математического и функционального анализа.

Полученные результаты и их новизна. Доказаны локальное существование классического решения и принцип сравнения решений, получены достаточные условия единственности и неединственности решений, получены достаточные условия существования и отсутствия глобальных решений для начально-краевых задач для систем полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями.

Рекомендации по использованию. Диссертационная работа имеет теоретический характер. Полученные результаты исследования могут найти применение у специалистов по общей теории дифференциальных уравнений с частными производными. Материалы исследований могут быть использованы при чтении спецкурсов по теории нелинейных параболических уравнений для студентов математических специальностей, написании курсовых и дипломных проектов, магистерских и кандидатских диссертаций.

Область применения: современная теория нелинейных параболических уравнений.

РЭЗЮМЭ

Нікіцін Аляксандр Ігаравіч

Аб існаванні і адзінасці рашэнняў пачаткова-краявых задач для сістэм палулінейных парабалічных раўнанняў з нелінейнымі нелакальнымі межавымі ўмовамі

Ключавыя словы: прынцып параўнання, палулінейныя парабалічныя раўнанні, нелакальныя межавыя ўмовы, адзінасць рашэнняў, існаванне глабальных рашэнняў.

Мэта працы: даследаванне рашэнняў пачаткова-краявых задач для сістэм палулінейных парабалічных раўнанняў з нелінейнымі нелакальнымі межавымі ўмовамі.

Метады даследавання: метады параўнання рашэнняў, метады матэматычнага і функцыянальнага аналізу.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. Даказаны лакальнае існаванне класічнага рашэння і прынцып параўнання рашэнняў, атрыманы дастатковыя ўмовы адзінасці і неадзінасці рашэнняў, атрыманы дастатковыя ўмовы існавання і адсутнасці глабальных рашэнняў для пачаткова-краявых задач для сістэм палулінейных парабалічных раўнанняў з нелінейнымі нелакальнымі межавымі ўмовамі.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Дысертацыйныя праца мае тэарэтычны характар. Атрыманыя вынікі даследавання могуць знайсці прымяненне ў спецыялістаў па агульнай тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў з частковымі вытворнымі. Матэрыялы даследаванняў могуць быць выкарыстаны пры чытанні спецкурсаў па тэорыі нелінейных парабалічных раўнанняў для студэнтаў матэматычных спецыяльнасцяў, напісанні курсавых і дыпломных праектаў, магістарскіх і кандыдацкіх дысертацый.

Галіна прымянення: сучасная тэорыя нелінейных парабалічных раўнанняў.

SUMMARY

Nikitin Alexander Igorevich

On existence and uniqueness of solutions of initial-boundary value problems for the systems of semilinear parabolic equations with nonlinear nonlocal boundary conditions

Keywords: comparison principle, semilinear parabolic equations, nonlocal boundary conditions, uniqueness of solutions, existence of global solutions.

Research aim: investigation of solutions of initial-boundary value problems for the systems of semilinear parabolic equations with nonlinear nonlocal boundary conditions.

Research methods: methods for comparing solutions, methods of mathematical and functional analysis.

Obtained results and their novelty. The local existence of the classical solution and the principle of comparison of solutions are proved, sufficient conditions for the uniqueness and non-uniqueness of solutions are obtained, sufficient conditions for the existence and non-existence of global solutions are obtained for initial-boundary value problems for the systems of semilinear parabolic equations with nonlinear nonlocal boundary conditions is proved.

Recommendation for use. The obtained results are of theoretical nature. The results can be used by specialists in the general theory of partial differential equations. The research materials can be used while delivering special courses on the theory of nonlinear parabolic equations for students of mathematical specialties, while writing terms and papers graduation projects, master's and PhD theses.

Application field: the modern theory of nonlinear parabolic equations.