**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2018 Т. 10 № 4 С. 421–430**
DOI: 10.20537/2076-7633-2018-10-4-421-430

УДК: 534

Оценка собственных частот крутильных колебаний композиционного нелинейно вязкоупругого вала

И. А. Тарасюк[a], А. С. Кравчук

Белорусский государственный университет,
Механико-математический факультет,
Беларусь, 220030, г. Минск, пр. Независимости, д. 4

E-mail: [a] ivan.a.tarasyuk@gmail.com

Получено 13.11.2017.
Принято к публикации 05.04.2018.

С целью обобщения уравнения крутильных колебаний на случай нелинейно деформируемых реологически активных валов в статье представлена методика линеаризации эффективной функции мгновенного деформирования материала. В работе рассматриваются слоистые и структурно неоднородные, в среднем изотропные валы из нелинейно вязкоупругих компонент. Методика заключается в определении аппроксимирующего модуля сдвига материала посредством минимизации среднеквадратического отклонения при приближении эффективной диаграммы мгновенного деформирования линейной функцией.

Представленная методика позволяет в аналитическом виде произвести оценку величин частот свободных колебаний слоистых и структурно неоднородных нелинейно вязкоупругих цилиндрических стержней. Это, в свою очередь, предоставляет возможность существенно сократить ресурсы при вибрационном анализе, а также отследить изменения значений собственных частот при изменении геометрических, физико-механических и структурных параметров валов, что особенно важно на начальных этапах моделирования и проектирования. Кроме того, в работе показано, что только выраженная нелинейность эффективного уравнения состояния материала оказывает значимое влияние на частоты свободных колебаний, и в некоторых случаях нелинейностью при определении собственных частот можно пренебречь.

В качестве уравнений состояния компонент композиционного материала в статье рассматриваются уравнения нелинейной наследственности с функциями мгновенного деформирования в виде билинейных диаграмм Прандтля. Для гомогенизации уравнений состояния слоистых цилиндрических стержней в работе применяются гипотезы Фойгта об однородности деформаций и Рейсса об однородности напряжений в объеме композиционного тела. При использовании данных предположений получены эффективные секущий и касательный модули сдвига, пределы пропорциональности, а также ядра ползучести и релаксации продольно, аксиально и поперечно-слоистых валов. Кроме того, в работе получены указанные эффективные характеристики структурно неоднородного, в среднем изотропного цилиндрического стержня с помощью ранее предложенного авторами метода гомогенизации, основанного на определении параметров деформирования материала по правилу смеси для уравнений состояния по Фойгту и Рейссу.

Ключевые слова: композиционный материал, гомогенизация, крутильные колебания, нелинейная вязкоупругость

Работа выполнена при поддержке гранта БРФФИ № Ф17М-009.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2018 VOL. 10 NO. 4 P. 421–430
DOI: 10.20537/2076-7633-2018-10-4-421-430

MODELS IN PHYSICS AND TECHNOLOGY

UDC: 534

Estimation of natural frequencies of torsional vibrations of a composite nonlinearly viscoelastic shaft

I. A. Tarasyuk[a], A. S. Kravchuk

Belarusian State University,
Mechanical and Mathematical Faculty,
4 Nezavisimosti ave., Minsk, Belarus, 220030

E-mail: [a] ivan.a.tarasyuk@gmail.com

Received 13.11.2017.
Accepted for publication 05.04.2018.

The article presents a method for linearization the effective function of material instantaneous deformation in order to generalize the torsional vibration equation to the case of nonlinearly deformable rheologically active shafts. It is considered layered and structurally heterogeneous, on average isotropic shafts made of nonlinearly viscoelastic components. The technique consists in determining the approximate shear modulus by minimizing the root-mean-square deviation in approximation of the effective diagram of instantaneous deformation.

The method allows to estimate analytically values of natural frequencies of layered and structurally heterogeneous nonlinearly viscoelastic shaft. This makes it possible to significantly reduce resources in vibration analysis, as well as to track changes in values of natural frequencies with changing geometric, physico-mechanical and structural parameters of shafts, which is especially important at the initial stages of modeling and design. In addition, the paper shows that only a pronounced nonlinearity of the effective state equation has an effect on the natural frequencies, and in some cases the nonlinearity in determining the natural frequencies can be neglected.

As equations of state of the composite material components, the article considers the equations of nonlinear heredity with instantaneous deformation functions in the form of the Prandtl's bilinear diagrams. To homogenize the state equations of layered shafts, it is applied the Voigt's hypothesis on the homogeneity of deformations and the Reuss' hypothesis on the homogeneity of stresses in the volume of a composite body. Using these assumptions, effective secant and tangential shear moduli, proportionality limits, as well as creep and relaxation kernels of longitudinal, axial and transversely layered shafts are obtained. In addition, it is obtained the indicated effective characteristics of a structurally heterogeneous, on average isotropic shaft using the homogenization method previously proposed by the authors, based on the determination of the material deformation parameters by the rule of a mixture for the Voigt's and the Reuss' state equations.

Keywords: composite material, homogenization, torsional vibrations, nonlinear viscoelasticity

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2018, vol. 10, no. 4, pp. 421–430 (Russian).

The work was supported by BRFFR grant No. F17M-009.

1. Введение

Задача о крутильных колебаниях неоднородных и композиционных валов возникает в различных теоретических и прикладных областях таких отраслей, как машиностроение и строительство, биомеханика и акустика. Излишняя вибрация и резонанс приводят к повреждениям и снижению производительности, что обуславливает важность мер по уменьшению или устранению крутильных колебаний цилиндрических структурных элементов сооружений, механизмов и органических систем, а также подчеркивает значимость исследований в данной области.

В работе [Кравчук и др., 2015b], посвященной крутильным колебаниям композиционных цилиндрических стержней, было получено динамическое уравнение для структурно неоднородного, в среднем изотропного вала из нелинейно упругих компонент:

$$\langle\rho\rangle J_0 \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \int_0^R 2\pi r^3 \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \left\langle \psi'\left(r\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\right\rangle dr, \tag{1}$$

где $\langle\psi(\varepsilon_{x\theta})\rangle$ — эффективная функция деформирования, $\langle\rho\rangle$ — средняя плотность материала, J_0 — полярный момент инерции сечения радиусом R.

Кроме того, в статье [Кравчук и др., 2015a] было проведено исследование влияния реологического поведения валов на кручение и крутильные колебания для уравнений состояния материала по наследственной теории, теории технического старения, а также модели Кельвина-Фойгта. В данной работе было проведено обобщение уравнения (1) на случай композиционных цилиндрических стержней из нелинейных наследственно вязкоупругих материалов:

$$\langle\rho\rangle J_0 \langle J(t_0)\rangle \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \int_0^R 2\pi r^3 \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \left\langle \psi'\left(r\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\right\rangle dr, \tag{2}$$

где $\langle\psi(\varepsilon_{x\theta})\rangle$ — эффективная функция мгновенного деформирования, $\langle J(t)\rangle = 1 + \int_0^t \langle\Gamma(t,\tau)\rangle d\tau$ и $\langle\Gamma(t,\tau)\rangle$ — эффективные функция и ядро ползучести, t_0 — время действия ползучести.

В предыдущих работах авторам не удалось привести полноценные примеры методического решения поставленной задачи для конкретных видов нелинейности. Кроме того, не был предложен аналитический способ анализа влияния нелинейности компонент на собственные частоты вала. Очевидно, уравнение (1) может быть получено из (2) в случае равенства нулю эффективного ядра ползучести, поэтому в настоящей работе рассматривается теоретически наиболее общий случай — нелинейно вязкоупругое поведение композиционного материала.

В продолжение указанных теоретических исследований в данной работе предполагается, что функции $\psi_k(\varepsilon_{x\theta})$ мгновенного нелинейно упругого деформирования компонент материала стержня аппроксимируются билинейными диаграммами Прандтля. Это позволит получить наиболее простые и наглядные аналитические результаты, а также определить в явном виде эффективные функции мгновенного деформирования и ползучести, входящие в уравнения (1) и (2), согласно разработанному ранее методу гомогенизации [Тарасюк, Кравчук, 2014].

Отметим, что рассмотрение в качестве уравнения мгновенного деформирования диаграммы Прандтля, производная которой не является непрерывной, не позволяет получить физически достоверный результат при решении уравнений (1) и (2). Поэтому в работе предлагается методика линеаризации уравнений колебаний, основанная на среднеквадратичном приближении эффективной диаграммы мгновенного деформирования композиционного материала линейной функцией. Это позволяет получить наиболее простую и адекватную оценку интегрального влияния нелинейностей компонент на собственные частоты крутильных колебаний вала.

2. Гомогенизация уравнения состояния композиционного вала

С целью получения уравнений крутильных колебаний нелинейно вязкоупругого композиционного вала, рассмотрим материал, состоящий из n компонент с объемными долями γ_k. Предполагается, что реологическое поведение k-ой компоненты соответствует закону наследственности [Горшков и др., 2005; Ржаницын, 1968; Работнов, 1966]:

$$\sigma_{x\theta,k}(t)=\psi_k(\varepsilon_{x\theta,k})\left(1-\int_0^t R_k(t,\tau)d\tau\right)=\varepsilon_{x\theta,k}\Pi_k(t),$$

$$\varepsilon_{x\theta,k}(t)=\psi_k^{-1}(\sigma_{x\theta,k})\left(1+\int_0^t \Gamma_k(t,\tau)d\tau\right)=\sigma_{x\theta,k}J_k(t),$$

где $\psi_k(\varepsilon_{x\theta,k})$ и $\psi_k^{-1}(\sigma_{x\theta,k})$ — функция мгновенного деформирования и ее обратная, $\Gamma_k(t,\tau)$ и $R_k(t,\tau)$ — ядра ползучести и релаксации, $J_k(t)$ и $\Pi_k(t)$ — функции ползучести и релаксации.

Применение уравнений состояния в указанном виде оправданно тем, что одно из них будет использоваться при получении эффективных характеристик композиционного материала по Фойгту при гипотезе постоянных деформациях, а второе — по Рейссу при гипотезе постоянных напряжениях. Таким образом, предполагается, что реологическое поведение k-ой компоненты композиционного цилиндрического стержня при кручении определяется уравнениями:

$$\sigma_{x\theta,k}(t)=\begin{cases}G_k^e\varepsilon_{x\theta,k}\Pi_k(t), & \varepsilon_{x\theta,k}\le\tau_k^p/G_k^e,\\ \left(G_k^p\varepsilon_{x\theta,k}+\tau_k^p\left(1-G_k^p/G_k^e\right)\right)\Pi_k(t), & \varepsilon_{x\theta,k}>\tau_k^p/G_k^e,\end{cases}\tag{3}$$

$$\varepsilon_{x\theta,k}(t)=\begin{cases}\sigma_{x\theta,k}J_k(t)/G_k^e, & \sigma_{x\theta,k}\le\tau_k^p,\\ \left(\sigma_{x\theta,k}-\tau_k^p\left(1-G_k^p/G_k^e\right)\right)J_k(t)/G_k^p, & \sigma_{x\theta,k}>\tau_k^p,\end{cases}\tag{4}$$

где G_k^e и G_k^p — секущий и касательный модули сдвига, τ_k^p — предел пропорциональности.

Рассмотрим малый элемент композиционного вала. Предполагается, что концентрации компонент выделенного элемента совпадают с объемными долями γ_k всего вала. Элемент минимальной длины, удовлетворяющий данному условию, называется макроточкой композиционного материала. Для определения эффективных параметров деформирования исследуется макроточка композиционного вала, на границах которой задаются воздействия, имитирующие возникающие в цилиндрическом стержне при кручении [Кравчук и др., 2015a; Кравчук и др., 2015b]. Принцип реализации метода гомогенизации заключается в следующем: если композиционное тело в среднем изотропно, к нему могут быть применены гипотезы Фойгта и Рейсса, согласно которым в объеме композиционного тела однородными являются деформации [Voigt, 1966] и напряжения [Reuss, 1929].

Рассмотрим уравнение релаксации (3) k-ой компоненты вала. Умножая обе части соотношения на объемную долю γ_k и суммируя по всем компонентам материала, применяя гипотезу об однородности деформаций в объеме композиционного тела [Voigt, 1966], получим оценочное уравнение состояния реологически активного композиционного вала по Фойгту:

$$\langle\sigma_{x\theta}(t)\rangle_V=\begin{cases}\langle G\rangle_V^e\langle\Pi(t)\rangle_V\varepsilon_{x\theta}, & \varepsilon_{x\theta}\le\langle\tau\rangle_V^p/\langle G\rangle_V^e,\\ \left(\langle G\rangle_V^p\varepsilon_{x\theta}+\langle\tau\rangle_V^p\left(1-\langle G\rangle_V^p/\langle G\rangle_V^e\right)\right)\langle\Pi(t)\rangle_V, & \varepsilon_{x\theta}>\langle\tau\rangle_V^p/\langle G\rangle_V^e,\end{cases}\tag{5}$$

где эффективные вязкоупругие характеристики по Фойгту имеют вид

$$\langle G\rangle_V^X=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k G_k^X,\quad \langle\Pi(t)\rangle_V=1-\int_0^t\langle R(t,\tau)\rangle_V\,d\tau,\quad \langle\tau\rangle_V^p=\frac{\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\tau_k^p\left(1-G_k^p/G_k^e\right)\sum_{k=1}^{n}\gamma_k G_k^e}{\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\left(G_k^e-G_k^p\right)},$$

$$\langle R(t,\tau)\rangle_V=\frac{\sum_{k=1}^{n}\gamma_k G_k^e R_k(t,\tau)}{3\sum_{k=1}^{n}\gamma_k G_k^e}+\frac{\sum_{k=1}^{n}\gamma_k G_k^p R_k(t,\tau)}{3\sum_{k=1}^{n}\gamma_k G_k^p}+\frac{\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\tau_k^p\left(1-G_k^p/G_k^e\right)R_k(t,\tau)}{3\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\tau_k^p\left(1-G_k^p/G_k^e\right)} \tag{6}$$

и соответствуют продольно и аксиально-слоистым структурам вала. Для сокращения записи верхний индекс X принимает значения e для секущего и p для касательного модулей сдвига.

Эффективное ядро ползучести по Фойгту может быть получено методом итерированных ядер [Ржаницын, 1968; Работнов, 1977]:

$$\langle\Gamma(t,\tau)\rangle_V=\sum_{i=1}^{\infty}\langle R_i(t,\tau)\rangle_V, \tag{7}$$

где $\langle R_1(t,\tau)\rangle_V=\langle R(t,\tau)\rangle_V$, $\langle R_{i+1}(t,\tau)\rangle_V=\int_\tau^t\langle R(t,x)\rangle_V\langle R_i(x,\tau)\rangle_V\,dx.$

В случае разностных ядер для определения эффективного ядра ползучести по Фойгту может быть применено преобразование Лапласа $\mathcal{L}$ [Ржаницын, 1968; Работнов, 1977]:

$$\langle\Gamma(t)\rangle_V=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathcal{L}\left(\langle R(t)\rangle_V\right)}{1-\mathcal{L}\left(\langle R(t)\rangle_V\right)}\right).$$

Перейдем к рассмотрению уравнения ползучести (4) k-ой компоненты. Умножая обе части выражения на объемную долю γ_k и суммируя по всем компонентам, при использовании гипотезы об однородности напряжений в композиционном объеме [Reuss, 1929], получим оценочное уравнение состояния реологически активного композиционного вала по Рейссу:

$$\langle\varepsilon_{x\theta}(t)\rangle_R=\begin{cases}\sigma_{x\theta}\langle J(t)\rangle_R\big/\langle G\rangle_R^e, & \sigma_{x\theta}\le\langle\tau\rangle_R^p,\\ \left(\sigma_{x\theta}-\langle\tau\rangle_R^p\left(1-\langle G\rangle_R^p/\langle G\rangle_R^e\right)\right)\langle J(t)\rangle_R\big/\langle G\rangle_R^p, & \sigma_{x\theta}>\langle\tau\rangle_R^p,\end{cases} \tag{8}$$

где эффективные вязкоупругие характеристики по Рейссу имеют вид

$$\langle G\rangle_R^X=1\Big/\sum_{k=1}^{n}\gamma_k/G_k^X,\quad \langle J(t)\rangle_R=1+\int_0^t\langle\Gamma(t,\tau)\rangle_R\,d\tau,\quad \langle\tau\rangle_R^p=\frac{\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\tau_k^p\left(1/G_k^p-1/G_k^e\right)}{\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\left(1/G_k^p-1/G_k^e\right)},$$

$$\langle\Gamma(t,\tau)\rangle_R=\frac{\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\Gamma_k(t,\tau)/G_k^e}{3\sum_{k=1}^{n}\gamma_k/G_k^e}+\frac{\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\Gamma_k(t,\tau)/G_k^p}{3\sum_{k=1}^{n}\gamma_k/G_k^p}+\frac{\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\tau_k^p\left(1/G_k^p-1/G_k^e\right)\Gamma_k(t,\tau)}{3\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\tau_k^p\left(1/G_k^p-1/G_k^e\right)} \tag{9}$$

и описывают деформирование поперечно-слоистого цилиндрического стержня.

Эффективное ядро релаксации по Рейссу может быть определено методом итерированных ядер [Ржаницын, 1968; Работнов, 1977]:

$$\langle R(t,\tau)\rangle_R = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\langle \Gamma_i(t,\tau)\rangle_R, \tag{10}$$

где $\langle \Gamma_1(t,\tau)\rangle_R = \langle \Gamma(t,\tau)\rangle_R$, $\langle \Gamma_{i+1}(t,\tau)\rangle_R = \int_\tau^t \langle \Gamma(t,x)\rangle_R \langle \Gamma_i(x,\tau)\rangle_R\,dx.$

В случае разностных ядер эффективное ядро релаксации по Рейссу можно получить с помощью преобразования Лапласа $\mathcal{L}$ [Ржаницын, 1968; Работнов, 1977]:

$$\langle R(t)\rangle_R = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathcal{L}(\langle \Gamma(t)\rangle_R)}{1+\mathcal{L}(\langle \Gamma(t)\rangle_R)}\right).$$

Выражения (6)–(7) и (9)–(10) образуют вилку Фойгта–Рейсса эффективных характеристик композиционного вала, т. е. являются верхней и нижней оценками истинных вязкоупругих параметров деформирования. Недостатком полученной вилки Фойгта–Рейсса является большой разброс значений при оценке свойств материала. Для уменьшения диапазона эффективных характеристик структурно неоднородного, в среднем изотропного цилиндрического стержня применим метод гомогенизации, согласно которому оценочные напряжения и деформации могут быть получены из правила смеси для уравнений состояния по Фойгту и Рейссу [Тарасюк, Кравчук, 2014]:

$$\langle \varepsilon_{x\theta}(t)\rangle_\sigma^\alpha = (1-\alpha)\langle \varepsilon_{x\theta}(t)\rangle_V + \alpha\langle \varepsilon_{x\theta}(t)\rangle_R, \tag{11}$$

$$\langle \sigma_{x\theta}(t)\rangle_\varepsilon^\alpha = (1-\alpha)\langle \sigma_{x\theta}(t)\rangle_V + \alpha\langle \sigma_{x\theta}(t)\rangle_R, \tag{12}$$

где $0<\alpha<1$.

Интегрируя параметры деформирования композиционного вала, определяемые из соотношения (11), по α на интервале [0, 1], получим уравнение ползучести, имеющее аналогичный выражению (8) вид с эффективными вязкоупругими характеристиками, определяющими первую границу новой вилки:

$$\langle G\rangle_\sigma^X = \frac{\langle G\rangle_V^X\langle G\rangle_R^X}{\langle G\rangle_V^X-\langle G\rangle_R^X}\ln\frac{\langle G\rangle_V^X}{\langle G\rangle_R^X}, \qquad \langle J(t)\rangle_\sigma = 1+\int_0^t\langle \Gamma(t,\tau)\rangle_\sigma\,d\tau,$$

$$\langle\tau\rangle_\sigma^p = \frac{\langle\tau\rangle_V^p A_V-\langle\tau\rangle_R^p A_R}{A_V-A_R} - A_V A_R\frac{\langle\tau\rangle_V^p-\langle\tau\rangle_R^p}{(A_V-A_R)^2}\ln\frac{A_V}{A_R},$$

$$\begin{aligned}\langle \Gamma(t,\tau)\rangle_\sigma &= \\ &= \frac{\langle \Gamma(t,\tau)\rangle_V\langle\tau\rangle_V^p A_V-\langle \Gamma(t,\tau)\rangle_R\langle\tau\rangle_R^p A_R}{3(\langle\tau\rangle_V^p A_V-\langle\tau\rangle_R^p A_R)} + \sum_{X=e,p}\frac{\langle \Gamma(t,\tau)\rangle_R\langle G\rangle_V^X-\langle \Gamma(t,\tau)\rangle_V\langle G\rangle_R^X}{3(\langle G\rangle_V^X-\langle G\rangle_R^X)} + \\ &+ \frac{\langle \Gamma(t,\tau)\rangle_V-\langle \Gamma(t,\tau)\rangle_R}{3}\left(\frac{\langle\tau\rangle_V^p A_V\langle\tau\rangle_R^p A_R}{(\langle\tau\rangle_V^p A_V-\langle\tau\rangle_R^p A_R)^2}\ln\frac{\langle\tau\rangle_R^p A_R}{\langle\tau\rangle_V^p A_V} + \sum_{X=e,p}\frac{\langle G\rangle_V^X\langle G\rangle_R^X}{(\langle G\rangle_V^X-\langle G\rangle_R^X)^2}\ln\frac{\langle G\rangle_V^X}{\langle G\rangle_R^X}\right),\end{aligned} \tag{13}$$

где $A_V = 1/\langle G\rangle_V^p - 1/\langle G\rangle_V^e$, $A_R = 1/\langle G\rangle_R^p - 1/\langle G\rangle_R^e$.

Вторая граница эффективных деформационных характеристик композиционного цилиндрического стержня определяется аналогично из соотношения (12):

$$\langle G\rangle_\varepsilon^X=\frac{\langle G\rangle_V^X+\langle G\rangle_R^X}{2},\qquad \langle \Pi(t)\rangle_\varepsilon=1-\int_0^t\langle R(t,\tau)\rangle_\varepsilon d\tau,$$

$$\langle \tau\rangle_\varepsilon^p=\frac{\langle \tau\rangle_V^p+\langle \tau\rangle_R^p}{2}+(C_V-C_R)\left(\langle \tau\rangle_V^p\langle G\rangle_R^e-\langle \tau\rangle_R^p\langle G\rangle_V^e\right)\frac{B_V{}^2-B_R{}^2-2B_VB_R\ln(B_V/B_R)}{2(B_V-B_R)^3},$$

$$\langle R(t,\tau)\rangle_\varepsilon= \tag{14}$$

$$=\frac{\langle R(t,\tau)\rangle_V\langle \tau\rangle_V^pC_V-\langle R(t,\tau)\rangle_R\langle \tau\rangle_R^pC_R}{3\left(\langle \tau\rangle_V^pC_V-\langle \tau\rangle_R^pC_R\right)}+\sum_{X=e,p}\frac{\langle R(t,\tau)\rangle_V\langle G\rangle_V^X-\langle R(t,\tau)\rangle_R\langle G\rangle_R^X}{3\left(\langle G\rangle_V^X-\langle G\rangle_R^X\right)}-$$

$$-\frac{\langle R(t,\tau)\rangle_V-\langle R(t,\tau)\rangle_R}{3}\left(\frac{\langle \tau\rangle_V^pC_V\langle \tau\rangle_R^pC_R}{\left(\langle \tau\rangle_V^pC_V-\langle \tau\rangle_R^pC_R\right)^2}\ln\frac{\langle \tau\rangle_V^pC_V}{\langle \tau\rangle_R^pC_R}+\sum_{X=e,p}\frac{\langle G\rangle_V^X\langle G\rangle_R^X}{\left(\langle G\rangle_V^X-\langle G\rangle_R^X\right)^2}\ln\frac{\langle G\rangle_V^X}{\langle G\rangle_R^X}\right),$$

где $B_V=\langle G\rangle_V^e-\langle G\rangle_V^p$, $B_R=\langle G\rangle_R^e-\langle G\rangle_R^p$ и $C_V=B_V\big/\langle G\rangle_V^e$, $C_R=B_R\big/\langle G\rangle_R^e$.

Эффективные ядра ползучести и релаксации для границ (13) и (14) определяются методом итерированных ядер, либо с помощью преобразования Лапласа для ядер разностного типа.

На рис. 1 для сравнения представлены Фойгта–Рейсса (сплошные линии 1 и 2) и авторский (пунктирные линии 3 и 4) диапазоны эффективных функций ползучести и релаксации двухкомпонентного цилиндрического стержня. Объемные доли, плотность и вязкоупругие характеристики деформирования компонент композиционного материала приведены в таблице 1.

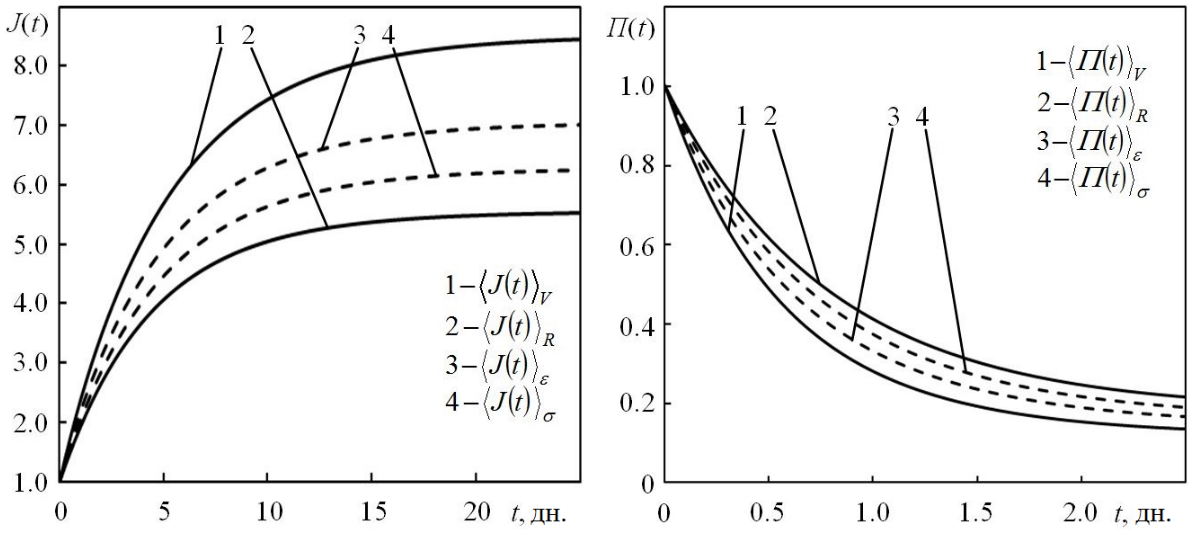

Рис. 1. Диапазоны эффективных функций ползучести $J(t)$ и релаксации $\Pi(t)$ двухкомпонентного вала

Таблица 1. Характеристики компонент композиционного материала круглого стержня

k	γ_k	ρ_k, кг/м^3	G_k^e, ГПа	G_k^p, ГПа	τ_k^p, ГПа	$\Gamma_k(t,\tau)$	$R_k(t,\tau)$
1	0.35	2100	21.00	1.00	0.002	$2e^{-0.13(t-\tau)}$	$2e^{-2.13(t-\tau)}$
2	0.65	1800	3.70	0.03	0.050	$e^{-0.24(t-\tau)}$	$e^{-1.24(t-\tau)}$

Как видно из рис. 1, разброс значений эффективных функций ползучести и релаксации, определяемых с помощью разработанной авторами методики гомогенизации, значительно меньше вилки Фойгта–Рейсса. Можно показать, что данное утверждение распространяется и на другие эффективные параметры деформирования (13)–(14). Ввиду малости полученной вилки эффективные деформационные характеристики вала могут быть определены как среднее арифметическое соответствующих величин:

$$\begin{gathered}
\langle G\rangle^{X}=\frac{\langle G\rangle_{\sigma}^{X}+\langle G\rangle_{\varepsilon}^{X}}{2},\quad \langle\Gamma(t,\tau)\rangle=\frac{\langle\Gamma(t,\tau)\rangle_{\sigma}+\langle\Gamma(t,\tau)\rangle_{\varepsilon}}{2},\qquad \langle J(t)\rangle=1+\int_{0}^{t}\langle\Gamma(t,\tau)\rangle d\tau,\\
\langle\tau\rangle^{p}=\frac{\langle\tau\rangle_{\sigma}^{p}+\langle\tau\rangle_{\varepsilon}^{p}}{2},\qquad \langle R(t,\tau)\rangle=\frac{\langle R(t,\tau)\rangle_{\sigma}+\langle R(t,\tau)\rangle_{\varepsilon}}{2},\qquad \langle\Pi(t)\rangle=1-\int_{0}^{t}\langle R(t,\tau)\rangle d\tau.
\end{gathered}\tag{15}$$

3. Оценка собственных частот композиционного вала

Для решения уравнения крутильных колебаний (2) необходимо произвести дифференцирование эффективной функции $\langle\psi(\varepsilon_{x\theta})\rangle$ по $\varepsilon_{x\theta}$. Однако рассмотрение в качестве уравнения мгновенного деформирования билинейной диаграммы Прандтля, производная которой не является непрерывной, не позволяет получить физически достоверный результат.

В случае малости мгновенной нелинейно упругой области в сравнении с областью мгновенного линейно упругого деформирования, а также в случае малого различия эффективных секущих и касательных модулей сдвига для получения приближенного аналитического выражения собственных частот крутильных колебаний рассмотрим простейшее решение (2).

Для этого произведем приближение эффективной диаграммы Прандтля с помощью линейной функции посредством минимизации среднеквадратического отклонения. В этом случае аппроксимирующий секущий модуль сдвига примет вид:

$$\langle\widetilde{G}\rangle=\frac{1}{2\beta^{3}}\left(\langle G^{e}\rangle(3\beta^{2}-1)+\langle G^{p}\rangle(\beta-1)^{2}(1+2\beta)\right),\tag{16}$$

где $\beta\geq 1$ и $\beta\langle\tau\rangle^{p}/\langle G\rangle$ — предельно допустимая деформация.

Таким образом, частота собственных колебаний композиционного вала из реологически активных материалов при закреплении одного конца стержня и отсутствии крутящего момента на другом, согласно (16), определяется выражением:

$$\omega_{i}=\frac{(2i-1)\pi}{2l}\sqrt{\frac{\langle G^{e}\rangle(3\beta^{2}-1)+\langle G^{p}\rangle(\beta-1)^{2}(1+2\beta)}{2\beta^{3}\langle\rho\rangle\langle J(t_{0})\rangle}},\tag{17}$$

где l — длина цилиндрического стержня, t_0 — время действия ползучести.

Количество N частот (17), которые могут быть вычислены с помощью данного метода гомогенизации, определяется длиной волны и характерной длиной макроточки Δl: $l/N\gg\Delta l$.

На рис. 2 представлена зависимость низшей собственной частоты ω_1 двухкомпонентного вала длиной 1 м от времени действия ползучести t_0 при отношении предельно допустимой деформации к пределу пропорциональности $\beta=1$ (пунктирная линия) и $\beta=1.5$ (сплошная линия). Характеристики компонент материала приведены в таблице 1. Как видно из рис. 2, только выраженная нелинейность уравнения состояния оказывает значительное влияние на собственные частоты. Если участок нелинейной деформации значительно меньше участка линейной, то нелинейностью при определении собственных частот можно пренебречь.

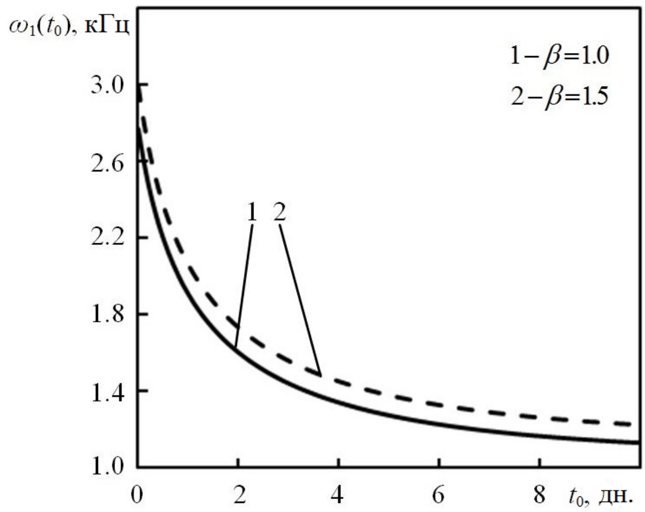

Рис. 2. Зависимость частоты свободных колебаний ω_1 композиционного вала от времени действия ползучести t_0 для различных коэффициентов β

4. Заключение

Исследовано влияние реологии на крутильные колебания композиционного нелинейно вязкоупругого вала по наследственной теории. Предполагается, что нелинейные функции мгновенного деформирования компонент композиционного материала аппроксимируются билинейными диаграммами Прандтля.

Применен новый метод гомогенизации, основанный на оценке диапазона эффективных вязкоупругих характеристик с использованием гипотез Фойгта и Рейсса об однородности деформаций и напряжений в объеме композиционного тела.

В аналитическом виде получены оценочные выражения для эффективных секущих и касательных модулей сдвига, пределов пропорциональности, ядер ползучести и релаксации.

Для случаев малой по сравнению с областью мгновенной упругости материала области нелинейно упругого деформирования и малого различия эффективных секущих и касательных модулей сдвига в явном виде получено оценочное выражение для собственных частот крутильных колебаний композиционного вала из реологически активных компонент.

Список литературы (References)

Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

Gorshkov A. G., Starovoitov E. I., Yarovaya A. V. Mehanika sloistyh vyazkouprugoplasticheskih ehlementov konstrukcij [Mechanics of laminated viscoelastoplastic structural elements]. — Moscow: FIZMATLIT, 2005 (in Russian).

Кравчук А. С., Кравчук А. И., Тарасюк И. А. Реология круглого структурно-неоднородного композиционного стержня при кручении и крутильных колебаниях // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2015a. — Т. 81, № 11. — С. 53–61.

Kravchuk A. S., Kravchuk A. I., Tarasyuk I. A. Reologiya kruglogo strukturno-neodnorodnogo kompozicionnogo sterzhnya pri kruchenii i krutil'nyh kolebaniyah [Rheology of a circular structurally heterogeneous composite rod under torsion and torsional vibrations] // Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov. — 2015a. — Vol. 81, No. 11. — P. 53–61 (in Russian).

Кравчук А. С., Кравчук А. И., Тарасюк И. А. Уравнения крутильных колебаний круглого продольно волокнистого, поперечно слоистого и структурно неоднородного композиционного стержня // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2015b. — № 4. — С. 147–159.

Kravchuk A. S., Kravchuk A. I., Tarasyuk I. A. Uravneniya krutil’nyh kolebanij kruglogo prodol’no voloknistogo, poperechno sloistogo i strukturno neodnorodnogo kompozicionnogo sterzhnya [Equation of torsional vibrations of a circular longitudinally fibrous, cross layered and structurally heterogeneous composite rod] // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika. — 2015b. — No. 4. — P. 147–159 (in Russian).

Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука, 1966.

Rabotnov Yu. N. Polzuchest’ ehlementov konstrukcij [Creep of structural elements]. — Moscow: Nauka, 1966 (in Russian).

Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. — М.: Наука, 1977.

Rabotnov Yu. N. Elementy nasledstvennoj mehaniki tverdyh tel [Elements of hereditary mechanics of solids]. — Moscow: Nauka, 1977 (in Russian).

Ржаницын А. Р. Теория ползучести. — М.: Стройиздат, 1968.

Rzhanicyn A. R. Teoriya polzuchesti [Creep theory]. — Moscow: Strojizdat, 1968.

Тарасюк И. А., Кравчук А. С. Сужение «вилки» Фойгта–Рейсса в теории упругих структурно неоднородных в среднем изотропных композиционных тел без применения вариационных принципов // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки. — 2014. — № 3. — URL: http://www.apriori-journal.ru/seria2/3-2014/Tarasyuk-Kravchuk.pdf (дата обращения 13.11.2017).

Tarasyuk I. A., Kravchuk A. S. Suzhenie «vilki» Fojgta–Rejssa v teorii uprugih strukturno neodnorodnyh v srednem izotropnyh kompozicionnyh tel bez primeneniya variacionnyh principov [Reducing the Voigt–Reuss range in the theory of elastic structurally heterogeneous composite on average isotropic bodies without application of variational principles] // APRIORI. Seriya: Estestvennye i tehnicheskie nauki. — 2014. — No. 3 (in Russian). Available at: http://www.apriori-journal.ru/seria2/3-2014/Tarasyuk-Kravchuk.pdf (accessed 13.11.2017).

Hill R. The Elastic Behaviour of a Crystalline Aggregate // Proceedings of the Physical Society. — 1952. — Vol. 65, No. 5. — P. 349–354.

Peters S. T. Handbook of Composites. — London: Chapman & Hall, 1998.

Reuss A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. — 1929. — Vol. 9, No. 1. — P. 49–58.

Voigt W. Lehrbuch der Kristallphysik. — Stuttgart: B.G. Teubner Verlag, 1966.