

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖАЮ

Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям

О.Н. Здрок

« _____ » 2020 г.

Регистрационный № УД- 9465/уч.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ГЕОМЕТРИИ

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 03 01 Математика (по направлениям)

Направление специальности

1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность)

2020 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта ОСВО 1-31 03 01-2013, учебного плана по направлению специальности 1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность) № G31-140/уч. 30.08.2013.

СОСТАВИТЕЛЬ:

Сергей Гаврилович Кононов – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета, кандидат физ.-мат. наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Владимир Владимирович Шлыков – профессор кафедры математики и методики преподавания математики физико-математического факультета БГПУ, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор

Геннадий Васильевич Матвеев, доцент кафедры высшей математики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физ.-мат. наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой геометрии, топологии и методики преподавания математики (протокол № 11 от 14.05.2020)

Научно-методическим Советом БГУ
(протокол № 5 от 17.06.2020)

Зав. кафедрой геометрии, топологии
и методики преподавания математики

Д.Ф. Базылев

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Главной целью дисциплины «*Дополнительные главы геометрии*» является ознакомление студентов, обучающихся по специальности 1-31 03 01 Математика (по направлениям), направление специальности 1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность), с некоторыми классическими разделами геометрии, не входящими в программы ранее пройденных геометрических дисциплин: «Аналитическая геометрия» и «Дифференциальная геометрия и топология». Без знания этой части геометрии математическое образование является неполным.

Для достижения главной цели решаются следующие задачи:

- определяются проективное, эллиптическое и гиперболическое пространства и основные связанные с ними понятия;
- излагаются важнейшие результаты, описывающие свойства фигур в каждом из этих пространств;
- проводится сравнительный анализ особенностей новых геометрий, их совпадения и различия между собой, проводится сравнение с евклидовой геометрией;
- проводятся практические занятия, на которых разбираются типичные задачи и построения, помогающие более глубокому усвоению новых геометрий, предлагаются задачи и упражнения для самостоятельной работы.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к циклу специальных дисциплин компонента учреждения высшего образования.

В процессе изучения дисциплины с появлением новых геометрий учащиеся значительно расширяют свой математический кругозор, учатся доказывать теоремы и проводить вычисления, основываясь на неевклидовых метриках. В лекциях и на практических занятиях необходимо использовать конструкции и результаты аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, а также таких дисциплин, как «*Алгебра и теория чисел*», «*Математический анализ*», «*Дифференциальные уравнения*», «*Теория функций комплексных переменных*».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «*Основания геометрии*» должно обеспечить формирование следующих академических, социально-личностных и профессиональных компетенций:

академические компетенции:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач;

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

социально-личностные компетенции:

СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

СЛК-6. Уметь работать в команде.

профессиональные компетенции:

ПК-5. Заниматься аналитической и научно-исследовательской деятельностью в области математики и информационных технологий.

ПК-6. Использовать и развивать современные информационные технологии и средства автоматизации управленческой деятельности.

В результате изучения дисциплины обучающийся должен:

знать:

- понятие вещественной проективной плоскости и ее модели;
- особенности сферической геометрии: расстояние между точками; связь между суммой углов сферического треугольника и его площадью; теоремы косинусов и синусов для сферического треугольника
- двойное отношение точек проективной прямой и его инвариантность относительно некоторых геометрических преобразований;
- три модели гиперболической плоскости; вид прямых и типы их взаимного расположения; различные формулы для вычисления гиперболического расстояния;
- основные факты элементарной гиперболической геометрии: соотношения между длинами сторон и величинами углов в гиперболическом треугольнике, формулы для вычисления площади треугольника, длины окружности и площади круга;
- сходство и различия трех классических геометрий: евклидовой, сферической и гиперболической;

уметь:

- вычислять простое и сложное отношение точек на аффинной и проективной прямой по заданным аффинным и однородным координатам точек;
- находить расстояние между точками гиперболической плоскости в ее различных моделях;
- определять взаимное расположение прямых на гиперболической плоскости; вычислять величину угла параллельности;
- проводить с помощью циркуля и линейки основные геометрические построения в различных моделях гиперболической плоскости: строить середину отрезка, делить угол пополам, опускать перпендикуляр из точки на прямую;

владеть:

- методом координат при решении основных задач проективной, сферической и гиперболической геометрий;
- понятиями и фактами алгебры, топологии, математического анализа, теории функций комплексного переменного при доказательстве основных результатов и решении задач проективной, сферической и гиперболической геометрий.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 5 семестре дневной формы получения высшего образования. Всего на изучение учебной дисциплины «*Дополнительные главы геометрии*» отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 138 часов, в том числе 72 аудиторных часа, из них: лекции – 36 часов, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации по учебной дисциплине – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Элементы проективной геометрии

Тема 1.1. Вещественная проективная плоскость как связка прямых в E^3 (первая модель)

Вещественная проективная плоскость как связка прямых в трехмерном евклидовом пространстве (первая модель). Прямые на проективной плоскости, их взаимное расположение. Фигуры второго порядка на вещественной проективной плоскости.

Тема 1.2. Вещественная проективная плоскость как пополненная евклидова плоскость E^2 (вторая модель)

Вещественная проективная плоскость как евклидова плоскость, пополненная несобственными точками (вторая модель). Связь между первой и второй моделями. Евклидова карта проективной плоскости.

Тема 1.3. Однородные координаты на проективной плоскости. Связь аффинных и однородных координат точек во второй модели

Однородные координаты на проективной плоскости относительно данного репера. Однородные и аффинные координаты точек проективной плоскости в ее второй модели.

Простое и двойное отношения точек прямой, их групповые свойства. Гармонические четверки точек. Проективное пространство как множество одномерных подпространств векторного пространства (третья модель).

Тема 1.4. Фигуры первого и второго порядков на проективной плоскости

Прямые на проективной плоскости, их взаимное расположение и задание в однородных координатах. Фигуры второго порядка на проективной плоскости, их уравнения и классификация. Единство эллипса, гиперболы и параболы с точки зрения проективной геометрии.

Тема 1.5. Проективные преобразования. Проективная группа и проективная геометрия

Проективные преобразования, их выражение в однородных координатах. Проективная группа и проективная геометрия. Двойное отношение точек – основной инвариант проективной геометрии.

Раздел 2. Основные факты сферической геометрии

Тема 2.1. Начальные понятия сферической геометрии: сферические прямые, расстояние между точками, углы.

Большие окружности на сфере как кривые, минимизирующие расстояние между точками. Сферические прямые, расстояние на сфере. Сферические углы, двуугольники, треугольники

Тема 2.2. Площади сферических двуугольников и треугольников. Сумма углов треугольника

Площадь сферического двуугольника и треугольника. Связь площади треугольника с суммой его углов.

Тема 2.3. Группа движений сферы, сферическая геометрия

Движения двумерной сферы. Разложение произвольного движения в композицию симметрий. Группа движений сферы и сферическая геометрия.

Тема 2.4. Элементарная сферическая геометрия. Евклидова геометрия как предельный случай сферической геометрии

Теорема Пифагора в сферической геометрии. Теоремы косинусов и синусов в сферической геометрии. Длина сферической окружности и площадь сферического круга. Предельные варианты формул сферической геометрии, их совпадение с формулами евклидовой геометрии.

Раздел 3. Гиперболическая геометрия (геометрия Лобачевского)

Тема 3.1. Аксиоматика Гильберта геометрии Лобачевского

Аксиоматика Гильберта евклидовой и гиперболической геометрии. Абсолютная геометрия. Проблема 5 постулата

Тема 3.2. Простое и сложное (двойное) отношение точек прямой

Простое и сложное (двойное) отношения точек аффинной и проективной прямой. Выражение двойного отношения в координатах.

Тема 3.3. Неевклидова метрика на интервале и в круге. Модель Клейна гиперболической плоскости

Метрика на интервале и в круге на основе двойного отношения точек. Модель Клейна гиперболической плоскости (первая модель). Проверка выполнения аксиом. Движения в гиперболической геометрии. Транзитивность группы движений при действии на гиперболической плоскости.

Тема 3.4. Преобразование инверсии и его свойства

Инверсия, ее координатное выражение и свойства. Инвариантность двойного отношения точек прямой или окружности при инверсиях. Стереografическое отображение как ограничение инверсии на сферу.

Тема 3.5. Модели Пуанкаре плоскости Лобачевского в круге и на евклидовой полуплоскости

Модель Пуанкаре гиперболической плоскости в круге (вторая модель). Переход от модели в круге к модели Пуанкаре в полуплоскости (третья модель). Вид прямых в третьей модели гиперболической плоскости, различные формулы для вычисления расстояния между точками. Теорема об описании движений гиперболической плоскости в третьей модели.

Тема 3.6. Взаимное расположение прямых на плоскости Лобачевского.

Параллельные и расходящиеся прямые на плоскости Лобачевского, формула для вычисления угла параллельности. Три типа пучков прямых и их ортогональные траектории в различных моделях плоскости Лобачевского.

Тема 3.7. Элементарная гиперболическая геометрия

Теорема Пифагора, теоремы косинусов и синусов в гиперболической геометрии. Формула для вычисления длин кривых в третьей модели плоскости Лобачевского. Длина гиперболической окружности и площадь гиперболического круга.

Тема 3.8. Плоскость Лобачевского как двумерное многообразие с римановой метрикой

Плоскость Лобачевского как вещественное многообразие с римановой метрикой.. Взаимосвязь евклидовой, сферической и гиперболической геометрий.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Элементы проективной геометрии	10			8		1	
1.1	Вещественная проективная плоскость как связка прямых в E^3 (первая модель)	2			2			
1.2	Вещественная проективная плоскость как пополненная евклидова плоскость E^2 (вторая модель)	2						Опро
1.3	Однородные координаты на проективной плоскости. Связь аффинных и однородных координат точек во второй модели	2			2			Опрос, шение дач
1.4	Фигуры первого и второго порядков на проективной плоскости	2			2			Опро
1.5	Проективные преобразования. Проективная группа и проективная геометрия	2			2		1	Индивидуальное дани
2	Основные факты сферической геометрии	6			2		1	
2.1	Начальные понятия сферической геометрии: сферические прямые, расстояние между точками, углы.	1						

2.2	Площади сферических дву- угольников и треугольни- ков. Сумма углов треуголь- ника	2	2					Опрос решени задач
2.3	Группа движений сферы, сферическая геометрия	1						Опрос
2.4	Элементарная сферическая геометрия. Евклидова гео- метрия как предельный случай сферической гео- метрии	2			2		1	Индивид альное дание
3	Гиперболическая геомет- рия (геометрия Лобачев- ского)	20			18		4	
3.1	Аксиоматика Гильберта геометрии Лобачевского	1			1			
3.2	Простое и сложное (двой- ное) отношение точек пря- мой	2			2		1	Опрос
3.3	Неевклидова метрика на интервале и в круге. Мо- дель Клейна гиперболиче- ской плоскости	2			3			Опрос решени задач
3.4	Преобразование инверсии и его свойства	2			2		1	Индивид альное дание
3.5	Модели Пуанкаре плоско- сти Лобачевского в круге и на евклидовой полуплоско- сти.	6			5		1	Опрос
3.6	Взаимное расположение прямых на плоскости Лоба- чевского.	2			2			Опрос решени задач
3.7	Элементарная гиперболи- ческая геометрия	2			2		1	индивид альное дание
3.8	Плоскость Лобачевского как двумерное многообра- зие с римановой метрикой	3			1			Опрос
	Итого:	36			30		6	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Миронова Е.П., Цыренова В.Б. Проективная геометрия, учебное пособие, Улан-Удэ, Изд-во Бурятского государственного университета, 2017, 90 с.
2. Кононов С.Г. Аналитическая геометрия, учеб. пособие, – Минск, БГУ, 2014. 238 с.
3. Прасолов В.В. Геометрия Лобачевского – М., МЦНМО, 2004, 88 с.
4. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии, учебное пособие, – Москва, Наука, 1976, 384 с.
5. Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии. Под редакцией В.Т. Воднева, – Минск, Высшая школа, 1970, 374 с.

Перечень дополнительной литературы

1. Берже М. Геометрия, т.2, – М., Мир, 1984, 368 с.
2. Клейн Ф. Неевклидова геометрия, – М. – Л.: ОНТИ, 1936, 358 с.
3. Ефимов Н.В. Высшая геометрия, учебное пособие, 5 изд. М. Наука, 1971, 576 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

При оценке результатов опроса следует обращать внимание на точность формулировок определений, условий и заключений теорем, умение привести примеры и решить несложные задачи.

При оценке решения задач лабораторных работ обращается внимание на точность ответа, скорость решения и выбор оптимального алгоритма решения.

При проверке индивидуальных заданий оценивается степень самостоятельности выполнения задания, полнота, владение современными графическими средствами.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Дополнительные главы геометрии» учебным планом предусмотрен зачет.

Рекомендуется ставить зачет студенту при условии, что его средняя оценка по совокупности указанных выше пунктов выше 5 баллов.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 1.5. Проективные преобразования. Проективная группа и проективная геометрия (1 ч).

Форма контроля - Индивидуальное задание: каждому студенту предлагается в течение 1 часа решить две задачи из учебного пособия [4]. Одна из них выбирается среди №№ 1346 – 1387, вторая – среди №№ 1388 – 1438.

Тема 2.4. Элементарная сферическая геометрия. Евклидова геометрия как предельный случай сферической геометрии (1 ч).

Форма контроля - Индивидуальное задание: каждому студенту предлагается в течение 1 часа решить одну задачу из учебного пособия [5], которые выбираются среди №№ 762 – 816.

Тема 3.4. Преобразование инверсии и его свойства. (1 ч).

Форма контроля - Индивидуальное задание: каждому студенту предлагается в течение 1 часа решить одну задачу из учебного пособия [4], которые выбираются среди №№ 1256 – 1289.

Тема 3.7. Элементарная гиперболическая геометрия. (1 ч).

Форма контроля - Индивидуальное задание: каждому студенту предлагается в течение 1 часа решить одну задачу из учебного пособия [3], которые выбираются среди №№ 1 – 20, п. 4. Гиперболическая элементарная геометрия.

По темам 3.2 Простое и сложное (двойное) отношение точек прямой и 3.5. Модели Пуанкаре плоскости Лобачевского в круге и на евклидовой полуплоскости каждому из студентов предлагается самостоятельно проработать материал учебного пособия [3], п. 2. Проективная геометрия и п 4. Гиперболическая элементарная геометрия соответственно. В дальнейшем эти задания контролируются путем опроса.

Примерная тематика лабораторных занятий

Занятие 1. Вещественная проективная плоскость (2 часа).

Занятие 2. Однородные координаты на проективной плоскости (2 часа).

Занятие 3. Фигуры 1 и 2 порядков на проективной плоскости. (2 часа).

Занятие 4. Проективные преобразования (2 часа).

Занятие 5. Элементарная сферическая геометрия (2 часа).

Занятие 6. Аксиоматика Гильберта евклидовой и гиперболической геометрий (2 часа).

Занятие 7. Простое и сложное (двойное) отношение точек прямой (2 часа).

Занятие 8. Неевклидова метрика на интервале и в круге. (2 часа).

Занятие 9. Преобразование инверсии и его свойства (2 часа).

Занятие 10. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского в круге. и на евклидовой полуплоскости. (2 часа).

Занятия 11 и 12. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского на евклидовой полуплоскости (4 часа).

Занятие 13. Взаимное расположение прямых на плоскости Лобачевского. (2 часа).

Занятие 14. Элементарная гиперболическая геометрия (2 часа).

Занятие 15. Плоскость Лобачевского как двумерное многообразие с римановой метрикой (2 часа).

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется **практико-ориентированный подход**, который предполагает:

- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

Кроме того, используется **метод анализа конкретных ситуаций (кейс-метод)**, который предполагает:

- приобретение студентом знаний и умений для решения практических задач;
- анализ ситуации, используя профессиональные знания, собственный опыт, дополнительную литературу и иные источники.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуются следующие формы самостоятельной работы:

- поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по индивидуально заданной проблеме курса;
- выполнение домашних заданий по тематике лабораторных работ;
- изучение материала, выделенного на самостоятельную проработку;
- изучение материала согласно вопросам, предложенным к зачету и подготовка ответов на них.

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Первая и вторая модели вещественной проективной плоскости.
2. Однородные координаты на проективной плоскости.
3. Фигуры первого и второго порядков на проективной плоскости и их изображения на евклидовых картах проективной плоскости.
4. Параллельное и центральное проектирования и их свойства.
5. Проективные преобразования.
6. Двойное отношение точек – основной инвариант проективных преобразований.

7. Основные понятия сферической геометрии: расстояние, прямые, углы, треугольники, окружности.
8. Площадь сферического треугольника.
9. Теоремы косинусов и синусов для сферического треугольника
10. Группа движений двумерной сферы и сферическая геометрия.
11. Двойное отношение точек и гиперболическое расстояние на интервале.
12. Модель Клейна плоскости Лобачевского (I модель).
13. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского в круге (II модель).
14. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского на евклидовой полуплоскости (III модель).
15. Формулы для вычисления расстояния между точками в моделях Пуанкаре плоскости Лобачевского.
16. Преобразование инверсии и его свойства.
17. Дробно-линейные преобразования и гиперболические движения полуплоскости.
18. Гиперболические треугольники и гиперболическая тригонометрия.
19. Взаимное расположение прямых на плоскости Лобачевского. Угол параллельности.
20. Три типа пучков прямых и их ортогональные траектории на плоскости Лобачевского.
21. Совпадения и отличия трех классических геометрий (евклидовой, сферической и гиперболической).

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Дополнительные главы алгебры	Кафедра высшей алгебры и защиты информации	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 11 от 14. 05.2020)

Ж ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УВО
на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики (протокол № ____ от ____ 201_ г.)

Заведующий кафедрой

(ученая степень, ученое звание) (подпись) (И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

(ученая степень, ученое звание) (подпись) (И.О.Фамилия)