Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Факультет прикладной математики и информатики
Кафедра компьютерных технологий и систем

СОГЛАСОВАНО
Заведующий кафедрой
_____________В. В. Казаченок
«26» января 2021 г.

СОГЛАСОВАНО
Декан факультета
_____________ А. М. Недзьведь
«27» января 2021 г.

СОГЛАСОВАНО
Председатель
Учебно-методической комиссии факультета
___________ И. С. Козловская
«27» января 2021 г.

Уравнения математической физики

Электронный учебно-методический комплекс
для специальностей:
1-31 03 04 «Информатика»,
1-98 01 01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)»
направление специальности:
1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность (математические методы и программные системы)»

Регистрационный № 2.4.2-12/126

Автор:
Козловская Инесса Станиславовна, кандидат физико-математических наук, доцент.

Рассмотрено и утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ 20.01.2021 г., протокол № 3.

Минск 2021

УДК 517.958(075.8)
К 592

Утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ.
Протокол № 3 от 20.01.2021 г.

Решение о депонировании вынес:
Совет факультета прикладной математики и информатики
Протокол № 6 от 27.01.2021 г.

Автор:
Козловская Инесса Станиславовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики БГУ.

Рецензенты :
кафедра математической кибернетики Белорусского государственного университета (заведующий кафедрой Гладков А.Л., доктор физико-математических наук, профессор);
Корзюк В. И. Академик НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор.

Козловская, И. С. Уравнения математической физики : электронный учебно-методический комплекс для специальностей: 1-31 03 04 «Информатика», 1-98 01 01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)», направление специальности:1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность (математические методы и программные системы)» / И. С. Козловская ; БГУ, Фак. прикладной математики и информатики, Каф. компьютерных технологий и систем. – Минск : БГУ, 2021. – 149 с. : ил. – Библиогр.: с. 148–149.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Уравнения математической физики» разработан в соответствии с образовательным стандартом первой ступени высшего образования для специальностей: 1-31 03 04 «Информатика», 1-98 01 01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)», направление специальности1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность (математические методы и программные системы)» и предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Уравнения математической физики» для студентов данных специальностей. В ЭУМК содержится конспект лекций, перечень лабораторных занятий с материалами для работы, задания по управляемой самостоятельной работе.

Оглавление

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Настоящий электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) разработан в соответствии с образовательным стандартом первой ступени высшего образования для специальностей: 1-31 03 04 «Информатика», 1-98 01 01; «Компьютерная безопасность (по направлениям)», *направление специальности* 1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность (математические методы и программные системы)» и предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Уравнения математической физики» для студентов данных специальностей.

ЭУМК включает в себя разделы «Пояснительная записка», «Теоретический раздел» (краткий курс лекций), «Практический раздел» (материалы к лабораторным занятиям), «Раздел контроля знаний» и «Вспомогательный раздел»

«Пояснительная записка» содержит аннотацию и краткую информацию об ЭУМК.

«Теоретический раздел» представляет собой краткий курс лекций, охватывающее все разделы учебной программы.

В «Практическом разделе» содержатся материалы к лабораторным занятиям (задачи с разбивкой по темам) и соответствующие задания для самостоятельной работы.

В «Разделе контроля знаний» представлены примерные варианты заданий по управляемой самостоятельной работе студентов, а также вопросы к коллоквиуму и варианты контрольной работы.

«Вспомогательный раздел» содержит рекомендуемую по курсу литературу и электронные ресурсы.

ЭУМК не предъявляет специальных требований к системе. Для работы с ним необходим компьютер или портативное устройство, на котором установлено приложение для просмотра PDF-документов (например, Adobe Acrobat Reader).

ЭУМК представлен в виде двух документов:

– сопроводительный документ;

– непосредственно электронный учебно-методический комплекс.

Круг вопросов, относящихся к математической физике, чрезвычайно широк. Возникающие при этом математические задачи содержат много общих элементов и составляют предмет математической физики. Метод исследования, характеризующий эту отрасль науки, является математическим по своему существу, и хотя постановка задач математической физики, будучи тесно связанной с изучением физических проблем, имеет специфические черты, следует отметить, что предмет «Уравнения математической физики» является важной составляющей общего математического образования. Многие задачи математической физики приводят к дифференциальным уравнениям с частными производными. Наиболее часто встречаются дифференциальные уравнения 2-го порядка. Программа курса ограничена изложением аналитических методов решения задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка на примере классических уравнений теплопроводности, колебаний струны, Лапласа и других уравнений.

Цель учебной дисциплины «Уравнения математической физики» – получение студентами навыков математического моделирования физических процессов с использованием уравнений с частными производными.

Образовательная цель: формирование составной части банка знаний, получаемых будущими специалистами в процессе учебы и необходимых им в дальнейшем для успешной работы.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления, изучение алгоритмов исследования разрешимости прикладных задач.

Задачи учебной дисциплины:

1. Освоение методов решения и исследования краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными;

2. Математическое моделирование естественнонаучных процессов.

Учебная дисциплина «Уравнения математической физики относится к дисциплинам государственного компонента цикла специальных дисциплин.

Содержание учебного материала учебной программы тесно связано с содержанием ряда общепрофессиональных и специальных дисциплин, которые изучались на младших курсах, в том числе «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ и интегральные уравнения».

Лекции раскрывают основные методы и подходы по каждой теме курса. Лабораторные занятия проводятся по темам курса, которые требуют закрепления теоретических знаний, полученных на лекциях и решения конкретных задач.

Курс «Уравнения математической физики» тесно связан с курсами математического анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений, функционального анализа и численных методов.

В результате освоения учебной дисциплины «Уравнения математической физики студент должен:

знать:

- классификацию и методы приведения к каноническому виду уравнений второго порядка с двумя и многими независимыми переменными;
- методы решения и обоснования корректности задачи Коши для уравнения колебания струны и уравнения теплопроводности;
- постановку и методы решения смешанных задач для уравнений гиперболического и параболического типа;
- постановку и методы решения краевых задач для уравнений эллиптического типа;

уметь:

- приводить к каноническому виду уравнения второго порядка;
- решать задачу Коши для волнового уравнения и уравнения теплопроводности;

- решать смешанные задачи для уравнений колебания струны и теплопроводности;
- решать краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона.

владеть:

- методами математического моделирования;
- основными методами исследования Задачи Коши для дифференциальных уравнений с частными производными;
- основными методами исследования граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными;
- навыками самообразования и способами использования аппарата дифференциальных уравнений с частными производными для проведения математических и междисциплинарных исследований.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

1.1. Классификация уравнени

1.1.1. Основные понятия об уравнениях с частными производными

Уравнения с частными производными. Рассмотрим n -мерное евклидово пространство $\boldsymbol{R}^n$. Точка $\vec{x} \in \boldsymbol{R}^n$ имеет координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то есть $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Пусть $\Omega \subset R^n$-область в пространстве$\boldsymbol{R}^n$. Зададим функцию $u = u(\vec{x}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, зависящую от n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и определенную в каждой точке $\vec{x} \in \Omega$. Область Ω может совпадать со всем пространством.

Частной производной первого порядка $\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_i}$ от функции u по переменной x_i в фиксированной точке $\vec{x} \in \Omega$ называется предел

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{u(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+\Delta x_i,x_{i+1},\ldots,x_n) - u(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)}{\Delta x_i}.$$

Если предел существует в каждой точке $\vec{x} \in \Omega$, то функция u называется дифференцируемой в области Ω по переменной x_i, а функция $\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_i}$ является функцией, определенной в каждой точке $\vec{x} \in \Omega$.

Частные производные более высокого порядка определяются по индукции:

$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ - производные второго порядка;

$\frac{\partial^3 u}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\right)$ - производные третьего порядка и т. д.

В теоретических исследованиях, как правило, рассматривают не отдельные функции в области Ω, а множества функций, удовлетворяющих определенным свойствам гладкости, то есть дифференцируемости.

Определение 1.1. Множество функций $C^m(\Omega)$ называется пространством m раз непрерывно дифференцируемых функций в области Ω. Функция $u = u(\vec{x}) \in C^m(\Omega)$, если u определена и непрерывна в области Ω и существуют всевозможные частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \ldots, \quad \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

до порядка m включительно, которые определены и непрерывны в области Ω. $C^\infty(\Omega)$-пространство любое число раз непрерывно дифференцируемых функций в области Ω.

Пространство $C^m(\Omega)$ линейное, так как для $\forall\ u_1,\ u_2 \in C^m(\Omega)$ функция $\alpha u_1 + \beta u_2 \in C^m(\Omega)$ для произвольных постоянных α, β.

В частном случае $m = 0$ $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ - пространство непрерывных функций.

Часто рассматривается более узкое пространство $C_0^m(\Omega)$ - пространство всех ограниченных непрерывных функций $u(\vec{x})$, имеющих ограниченные и непрерывные производные до порядка m включительно в области Ω.

Рассмотрим произвольную функцию $F(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_N) \in C(R^{n+N})$, зависящую от $n + N$ независимых переменных. Будем предполагать, что существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial F}{\partial z_i}$, причем $\frac{\partial F}{\partial z_N} \neq 0$.

Определение 1.2. Дифференциальным уравнением с частными производными относительно неизвестной функции $u(\vec{x})$ называется отношение

$$F\left(\vec{x}\,; u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = 0. \qquad (1.1)$$

Введем сокращенное обозначение $L(u) \equiv F\left(\vec{x}\,; u, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right)$, где L - дифференциальный оператор, действующий на функции $u(\vec{x}) \in C^m(\Omega)$ и преобразующий их в элементы пространства непрерывных функций, то есть $L: C^m(\Omega) \to C(\Omega)$.

Определение 1.3. Классическим решением уравнения (1.1) в области Ω называется функция $u(\vec{x}) \in C^m(\Omega)$, которая при подстановке в отношение (1.1) обращает его в тождество на множестве Ω.

Как видно, в уравнение (1.1) входит производная от функции u наибольшего порядка m. Целое число m называется порядком уравнения (1.1), то есть $deg(L) = m$.

Уравнение вида

$$L(u) = f(\vec{x}), \quad f(\vec{x}) \in C(\Omega),$$

называется линейным дифференциальным уравнением с частными производными, если для дифференциального оператора L выполнены условия линейности:

$$L(\alpha u) = \alpha L(u), \qquad \forall\alpha = const, \quad \forall u \in C^m(\Omega), \tag{1.2}$$

$$L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2), \qquad \forall u_1, u_2 \in C^m(\Omega). \tag{1.3}$$

Утверждение 1.1. Любое линейное уравнение с частными производными порядка m имеет вид

$$L(u) \equiv \sum\nolimits_{0\le\alpha_1+\ldots+\alpha_n\le m} a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(\vec{x})\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} = f(\vec{x}), \tag{1.4}$$

где коэффициенты $a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(\vec{x}) \in C(\Omega)$.

Доказательство. Пусть уравнение (1.1) линейное, тогда выполняется условие (1.2), то есть

$$F\left(\vec{x}\,; \alpha u, \alpha\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \alpha\frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = \alpha F\left(\vec{x}\,; u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right).$$

Продифференцируем это тождество по параметру α, тогда

$$F\left(\vec{x}\,; u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = \frac{\partial}{\partial z_1}F\left(\vec{x}\,; \alpha u, \alpha\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \alpha\frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right)\, u + \ldots +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z_N}F\left(\vec{x}\,; \alpha u, \alpha\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \alpha\frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right)\, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}.$$

Полагая $\alpha = 0$, получим выражение для линейного дифференциального оператора:

$$L(u) = \frac{\partial F\left(\vec{x};\vec{0}\right)}{\partial z_1}u + \frac{\partial F\left(\vec{x};\vec{0}\right)}{\partial z_2}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F\left(\vec{x};\vec{0}\right)}{\partial z_N}\frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}.$$

Это означает, что линейное уравнение представляет собой сумму частных производных с непрерывными коэффициентами. Очевидно, что условие (1.3) также выполнено.

Если в уравнении (1.4) $f(\vec{x}) \equiv 0$, то уравнение называется однородным, в противном случае - неоднородным.

Запишем уравнение (1.4) сокращенно, используя мультииндекс. Мультииндекс – это вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где α_i - целые неотри-цательные числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$. Обозначим дифференциальные операторы

$$D_i^{\alpha_i} = \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}, \qquad D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

тогда уравнение (1.4) примет вид

$$\sum_{0 \le |\alpha| \le m} a_{\alpha}(\vec{x})\, D^{\alpha} u = f(\vec{x}).$$

Производные от функции u порядка m, входящие в уравнение (1.4), называются старшими производными, остальные производные называются младшими производными.

Часть линейного уравнения

$$L_0(u) = \sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha}(\vec{x})\, D^{\alpha} u,$$

содержащая все старшие производные, называется главной частью уравнения.

Как правило, на практике изучают более узкие классы линейных дифференциальных уравнений. Наиболее важным с точки зрения приложений является класс уравнений второго порядка $(m = 2)$ с n независимыми переменными, которые можно записать в общем виде:

$$L(u) \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\vec{x})u = f(x), \qquad (1.5)$$

где коэффициенты $a_{ij}(\vec{x}),\ a_i(\vec{x}),\ c(\vec{x}),\ f(\vec{x}) \in C(\Omega)$.

В случае плоскости $\boldsymbol{R^2}$ рассмотрим класс уравнений второго порядка $(m = 2)$ с двумя независимыми переменными $(n = 2)$. Введем специальные обозначения независимых переменных $x_1 = x,\ x_2 = y$, тогда

$$L(u) \equiv a_{11}(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$

$$+ a(x,y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y), \qquad (1.6)$$

где $a_{11},\ a_{12},\ a_{22},\ a,\ b,\ c,\ f$ - заданные функции двух переменных; $u = u(x,y)$ - неизвестная функция.

Главная часть уравнения (1.6)

$$L_0(u) \equiv a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \qquad (1.7)$$

Поставим в соответствие главной части (1.7) полином по переменным $\xi_1,\ \xi_2$, используя правила соответствия

$$\frac{\partial u}{\partial x} \to \xi_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \to \xi_2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \to \xi_1^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \to \xi_1 \xi_2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \to \xi_2^2,$$

тогда выражению (1.7) будет соответствовать полином

$$P(\vec{x}, \vec{\xi}) = a_{11}(x, y)\xi_1^2 + 2a_{12}(x, y)\xi_1\xi_2 + a_{22}(x, y)\xi_2^2, \tag{1.8}$$

где $\vec{x} = (x, y)$; $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$.

Полином (1.8) называется характеристическим полиномом для уравнения (1.6). Характеристический полином используется для классификации уравнений.

Классификация линейных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Для классификации уравнений (1.6) построим вспомогательную функцию $D(x, y) = a_{12}^2(x, y) - a_{11}(x, y)a_{22}(x, y)$, называемую дискриминантом уравнения.

Определение 1.4. Тип уравнения определяется следующим образом.

Если $D(x, y) > 0$, то уравнение (1.6) называется уравнением гиперболического типа в точке (x, y).

Если $D(x, y) < 0$, то уравнение (1.6) называется уравнением эллиптического типа в точке (x, y).

Если $D(x, y) = 0$, то уравнение (1.6) называется уравнением параболического типа в точке (x, y).

В случае, когда знак дискриминанта сохраняется во всех точках области Ω, то уравнение является соответственно гиперболическим, эллиптическим и параболическим во всей области Ω. Если $\Omega = \Omega_1 \cup \bar{\Omega}_0 \cup \Omega_2$, $D > 0$ в Ω_1, $D < 0$ в Ω_2, $D = 0$ в $\bar{\Omega}_0$, то уравнение (1.6) называется уравнением смешанного типа в области Ω.

Приведем примеры уравнений с частными производными, имеющих определенный физический смысл.

1) Уравнение колебаний струны (гиперболическое уравнение):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t),$$

где $x = x_1$ - пространственная переменная, $t = x_2$ - временная переменная, $a - const$.

2) Уравнение Лапласа (эллиптическое уравнение):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

где $x = x_1,\ y = x_2$ - пространственные переменные.

3) Уравнение теплопроводности (параболическое уравнение):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

4) Уравнение Кортевега-де Фриза (нелинейное уравнение):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Системы уравнений с частными производными. Рассмотрим k неизвестных функций $u_1(x_1,\dots,x_n)$, $u_2(x_1,\dots,x_n)$,…, $u_k(x_1,\dots,x_n)$ и k вспомогательных функций $F_1(\vec{x};z_1,\dots,z_{N_1})$, $F_2(\vec{x};z_1,\dots,z_{N_2})$,…,$F_k(\vec{x};z_1,\dots,z_{N_k})$, обладающих свойствами аналогичными свойствам функции F из соотношения (1.1).

Определение 1.5. Системой дифференциальных уравнений с частными производными относительно k неизвестных функций $u_i\ \ (i = 1,2,\dots,k)$ называются k уравнений

$$F_1\left(\vec{x};u_1,\dots,u_k;\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u_k}{\partial x_n},\dots,\frac{\partial^{m_1} u_k}{\partial x_n^{m_1}}\right) = 0,$$

$$F_2\left(\vec{x};u_1,\dots,u_k;\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u_k}{\partial x_n},\dots,\frac{\partial^{m_2} u_k}{\partial x_n^{m_2}}\right) = 0, \qquad (1.9)$$

$$\dots$$

$$F_k\left(\vec{x};u_1,\dots,u_k;\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u_k}{\partial x_n},\dots,\frac{\partial^{m_k} u_k}{\partial x_n^{m_k}}\right) = 0.$$

Система уравнений (1.9) линейная, если

$$F_i = \sum_{j=1}^{k} L_{ij}(u_j),$$

где L_{ij} - линейные дифференциальные операторы порядка $m_{ij}\ \left(deg(L_{ij}) = m_{ij}\right)$.

Запишем линейную систему из двух уравнений, содержащих две неизвестные функции с двумя независимыми переменными, положив $x_1 = x,\ x_2 = y,\ u_1 = u(x,y),\ u_2 = v(x,y)$. В случае уравнений первого порядка $(m_{ij} = 1)$ имеем систему

$$b_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+b_{12}\frac{\partial u}{\partial y}+c_{11}\frac{\partial v}{\partial x}+c_{12}\frac{\partial v}{\partial y}+b_1u+c_1v=f_1,$$

$$b_{21}\frac{\partial u}{\partial x}+b_{22}\frac{\partial u}{\partial y}+c_{21}\frac{\partial v}{\partial x}+c_{22}\frac{\partial v}{\partial y}+b_2u+c_2v=f_2. \qquad (1.10)$$

В матричной записи система (1.10) принимает вид

$$\hat{L}\vec{u}=\vec{f},$$

где матричный дифференциальный оператор

$$\hat{L}=\begin{pmatrix} b_{11}\frac{\partial}{\partial x}+b_{12}\frac{\partial}{\partial y}+b_1, & c_{11}\frac{\partial}{\partial x}+c_{12}\frac{\partial}{\partial y}+c_1 \\ b_{21}\frac{\partial}{\partial x}+b_{22}\frac{\partial}{\partial y}+b_2, & c_{21}\frac{\partial}{\partial x}+c_{22}\frac{\partial}{\partial y}+c_2 \end{pmatrix},$$

$\vec{u}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\vec{f}=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ - вектор-столбцы.

Для классификации систем (1.10) выделим главную часть системы:

$$\hat{L}_0\,\vec{u}=\begin{pmatrix} b_{11}\frac{\partial}{\partial x}+b_{12}\frac{\partial}{\partial y}, & c_{11}\frac{\partial}{\partial x}+c_{12}\frac{\partial}{\partial y} \\ b_{21}\frac{\partial}{\partial x}+b_{22}\frac{\partial}{\partial y}, & c_{21}\frac{\partial}{\partial x}+c_{22}\frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Далее сопоставим главной части характеристическую матрицу, сопоставив $\frac{\partial}{\partial x}\to\xi_1$, $\frac{\partial}{\partial y}\to\xi_2$:

$$\hat{L}_0\,\vec{u}\to\hat{A}\left(\vec{x},\vec{\xi}\right)=\begin{pmatrix} b_{11}\xi_1+b_{12}\xi_2, & c_{11}\xi_1+c_{12}\xi_2 \\ b_{21}\xi_1+b_{22}\xi_2, & c_{21}\xi_1+c_{22}\xi_2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим характеристический полином системы

$$P\left(\vec{x},\vec{\xi}\right)=\det\hat{A}\left(\vec{x},\vec{\xi}\right)=a_{11}\xi_1^2+2a_{12}\xi_1\xi_2+a_{22}\xi_2^2,$$

где $a_{11}=b_{11}c_{21}-b_{21}c_{11}$, $a_{22}=b_{12}c_{22}-b_{22}c_{12}$,
$a_{12}=\frac{1}{2}(b_{12}c_{21}+b_{11}c_{22}-b_{22}c_{11}-b_{21}c_{12})$.

Классификация систем (1.10) производится с помощью дискриминанта $D=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$ характеристического полинома по аналогии с классификацией уравнений (1.6) (См. определение 1.4).

Пример 1.1. Приведем важную для теории аналитических функций комплексного переменного эллиптическую систему Коши-Римана.

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{1.11}$$

для которой характеристическая матрица $\hat{A} = \begin{pmatrix} \xi_1, -\xi_2 \\ \xi_2, \xi_1 \end{pmatrix}$, характеристический полином $P(\vec{x}, \vec{\xi}) = \xi_1^2 + \xi_2^2$, а дискриминант $D = -1$.

Пример 1.2. Рассмотрим систему двух уравнений с постоянными коэффициентами

$$b_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + b_{12}\frac{\partial u}{\partial y} + c_{11}\frac{\partial v}{\partial x} + c_{12}\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$b_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + b_{22}\frac{\partial u}{\partial y} + c_{21}\frac{\partial v}{\partial x} + c_{22}\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Разрешим ее относительно производных $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, тогда

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\Delta}\left[(c_{12}b_{21} - c_{22}b_{11})\frac{\partial u}{\partial x} + (c_{12}b_{22} - c_{22}b_{12})\frac{\partial u}{\partial y}\right],$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\Delta}\left[(c_{21}b_{11} - c_{11}b_{21})\frac{\partial u}{\partial x} + (c_{21}b_{12} - c_{11}b_{22})\frac{\partial u}{\partial y}\right],$$

$\Delta = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \neq 0$.

Дифференцируя первое равенство по y, а второе по x, и вычитая из первого равенства второе, получим дифференциальное уравнение второго порядка для неизвестной функции u:

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

где коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} совпадают с коэффициентами характеристического полинома системы уравнений. Аналогичное уравнение получим для функции v. Отсюда следует, что тип уравнения для функции u (или v) совпадает с типом исходной системы уравнений.

1.1.2. Замена независимых переменных в уравнениях второго порядка с двумя переменными

Рассмотрим в области $\Omega \subset R^2$ уравнение с частными производными второго порядка (1.6):

$$L(u) \equiv a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + au_x + bu_y + cu = f, \qquad (1.12)$$

где для сокращения записи уравнения введены обозначения производных

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy}.$$

Будем считать, что коэффициенты a_{ij} уравнения (1.12) достаточно гладкие действительные функции, для определенности пусть $a_{ij} \in C^2(\Omega)$. Будем считать также, что $a_{11} \neq 0$ в области Ω.

Поставим задачу об упрощении уравнения (1.12). Одним из способов упрощения уравнений является замена независимых переменных. Перейдем в уравнении (1.12) от независимых переменных x, y к новым независимым переменным ξ, η с помощью невырожденного преобразования

$$\begin{cases} \xi = \phi(x, y), \\ \eta = \psi(x, y), \end{cases} \qquad (1.13)$$

где заданные действительные функции $\phi, \ \psi \in C^2(\Omega)$.

Преобразование (1.13) невырожденное в области Ω, если определитель (якобиан), составленный из частных производных первого порядка,

$$J = \begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (1.14)$$

в любой точке $(x, y) \in \Omega$.

Из условия (1.14) следует, что $grad\, \phi \neq 0, \quad grad\, \psi \neq 0$ в любой точке области Ω. По определению $grad\, \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{\jmath}$.

Запишем дифференциальное уравнение (1.12) в новых переменных ξ, η, вычисляя производные, входящие в уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \qquad (1.15)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x\right) = \frac{\partial u_\xi}{\partial x}\xi_x + u_\xi \xi_{xx} + \frac{\partial u_\eta}{\partial x}\eta_x + u_\eta \eta_{xx} =$$

$$= \left(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x\right)\xi_x + \left(u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x\right)\eta_x + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} =$$

$$= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}.$$

Аналогично вычислим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}.$$

Подставив найденные выражения в (1.12), получим уравнение с частными производными в новых переменных:

$$\bar{L}(u) \equiv \bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{a}u_\xi + \bar{b}u_\eta + \bar{c}u = \bar{f}, \qquad (1.16)$$

где новые коэффициенты уравнения рассматриваются как функции переменных ξ, η и определяются формулами

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2, \qquad \bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2,$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + a_{22}\xi_y\eta_y, \qquad (1.17)$$

$$\bar{a} = L(\xi) - c\xi, \quad \bar{b} = L(\eta) - c\eta, \quad \bar{c} = c, \quad \bar{f} = f.$$

Утверждение 1.2. При невырожденном действительном преобразовании (1.13) тип уравнения (1.12) сохраняется.

Доказательство. Определим тип уравнения (1.16), вычислив дискриминант с учетом формул (1.17). Получим

$$\bar{D} = \bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = J^2 D, \quad J \neq 0. \qquad (1.18)$$

Таким образом, знак дискриминанта D уравнения (1.12) совпадает со знаком дискриминанта $\bar{D}$ уравнения (1.16).

Поставим задачу о нахождении функций Φ и Ψ таких, чтобы преобразованное уравнение (1.16) приняло наиболее простой вид. С решением этой задачи тесно связано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}(x,y) \pm \sqrt{D(x,y)}}{a_{11}(x,y)}, \qquad (1.19)$$

называемое характеристическим уравнением исходного уравнения (1.12). Уравнение (1.16) упростится, если положить

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11} &= a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0, \\ \bar{a}_{22} &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 = 0. \end{aligned} \qquad (1.20)$$

Заметим, что соотношения (1.20) – это одно и то же уравнение, но записанное для функций ϕ и ψ. Поэтому рассмотрим в области Ω нелинейное уравнение с частными производными первого порядка

$$a_{11}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0, \qquad (1.21)$$

где $z = z(x,y)$ - неизвестная функция.

Уравнение (1.21) называется уравнением характеристик.

Если удастся найти два решения уравнения (1.21) $z = \phi(x,y)$ и $z = \psi(x,y)$, то тем самым будет найдено преобразование (1.13), упрощающее уравнение (1.16).

Определение 1.6. Функция $\phi(x,y),\ \phi \in C^1(\Omega),\ grad\,\phi \neq 0,$ называется первым интегралом в области Ω уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \lambda(x,y), \qquad (1.22)$$

если на любом решении $y = y(x),\ x \in U,$ этого уравнения функция $\phi(x,y)$ постоянна, то есть имеет место равенство

$$\phi(x, y(x)) = C, \quad (x, y(x)) \in \Omega,$$

где постоянные C могут различаться для разных решений уравнения (1.22). Первым интегралом также называют соотношение $\phi(x,y) = C$.

Докажем некоторые утверждения, которые позволяют исследовать решения уравнения (1.21) и построить преобразование (1.13).

Лемма 1.1. Пусть $\phi(x,y)$ - первый интеграл в области Ω одного из обыкновенных дифференциальных уравнений (1.19):

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(x,y), \qquad \frac{dy}{dx} = \lambda_2(x,y), \tag{1.23}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{a_{12}+\sqrt{D}}{a_{11}}, \qquad \lambda_1 = \frac{a_{12}-\sqrt{D}}{a_{11}}, \tag{1.24}$$

$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \geq 0$ в области Ω. Тогда функция $z = \phi(x,y)$ удовлетворяет уравнению с частными производными (1.21) в области Ω.

Доказательство. Зафиксируем точку $M_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ и построим решение $y = y(x)$ соответствующего уравнения (1.23), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. На основании теоремы Пикара-Линделефа такое решение существует и единственно в некоторой окрестности U_{x_0} точки x_0. Вычислим производную $\frac{dy}{dx}$ в точке M_0. Согласно определению первого интеграла, для решения $y = y(x)$, имеем тождество

$$\phi(x, y(x)) = C_0, \quad x \in U_{x_0},$$

где $C_0 = \phi(x_0, y_0)$.

Дифференцируя предыдущее равенство по x, получим

$$\phi_x + \phi_y \left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=y(x)} = 0, \quad x \in U_{x_0}.$$

В частности, для точки M_0 имеем

$$\phi_x + \phi_y \left.\frac{dy}{dx}\right|_{M_0} = 0. \tag{1.25}$$

Если $\phi_y(M_0) = 0$, то из равенства (1.25) следует $\phi_x(M_0) = 0$, что противоречит условию $grad\,\phi \neq 0$, входящему в определение 1.6. Таким образом, $\phi_y(M_0) \neq 0$. Откуда следует равенство

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\phi_x}{\phi_y} \tag{1.26}$$

в точке M_0.

С другой стороны, имеет место очевидное тождество

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = a_{11}\left(\frac{dy}{dx} - \lambda_1\right)\left(\frac{dy}{dx} - \lambda_2\right),$$

где функции λ_1, λ_2 определяются формулами (1.24) и являются корнями квадратного трехчлена, стоящего слева.

Так как для функции $y = y(x)$ в точке M_0 выполнено одно из уравнений (1.23), то

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22}\Big|_{M_0} = 0. \tag{1.27}$$

Подставив формулу (1.26) в (1.27), получим требуемое равенство

$$a_{11}(\phi_x)^2 + 2a_{12}\phi_x\phi_y + a_{22}(\phi_y)^2\Big|_{M_0} = 0$$

в произвольной точке $M_0 \in \Omega$.

Таким образом, функция $z = \phi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.21).

Заметим, что имеет место также утверждение, обратное утверждению леммы 1.1.

Далее приведем еще ряд утверждений, характеризующих решение уравнения характеристик (1.21).

Утверждение 1.3. Пусть функция $\phi(x, y)$ в области D удовлетворяет уравнению

$$\phi_x + \lambda_1\phi_y = 0, \qquad a_{11} \neq 0, \tag{1.28}$$

тогда $z = \phi(x, y)$ является решением уравнения характеристик (1.21) в области Ω. Аналогично, если функция $\psi(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\psi_x + \lambda_2\psi_y = 0, \tag{1.29}$$

тогда $z = \psi(x, y)$ также является решением уравнения (1.21).

Доказательство. Умножим равенство (1.28) на $a_{11}(\phi_x + \lambda_2\phi_y)$, тогда

$$a_{11}(\phi_x + \lambda_1\phi_y)(\phi_x + \lambda_2\phi_y) = a_{11}\phi_x^2 + 2a_{12}\phi_x\phi_y + a_{22}\phi_y^2 = 0,$$

то есть получим уравнение (1.21). Аналогично для функции ψ.

Утверждение 1.4. Пусть $z = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ - комплексное решение уравнения характеристик (1.21) в области Ω, где $\phi = Re\, z$, $\psi = Im\, z$; $\phi, \psi \in C^1(\Omega)$, тогда преобразование (1.13) приводит уравнение (1.12) к уравнению (1.16) с коэффициентами

$$\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22}, \quad \bar{a}_{12} = 0. \tag{1.30}$$

Доказательство. Подставим комплексное решение в уравнение (1.21), тогда с учетом формул (1.17) получим равенства

$$a_{11}(\phi_x + i\psi_x)^2 + 2a_{12}(\phi_x + i\psi_x)\,(\phi_y + i\psi_y) + a_{22}(\phi_y + i\psi_y)^2 =$$

$$= \bar{a}_{11} - \bar{a}_{22} + 2i\bar{a}_{12} = 0. \tag{1.31}$$

Отсюда следуют формулы (1.30).

Утверждение 1.5. Если для $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ действительные функции $\phi(x,y), \psi(x,y) \in C^1(\Omega)$ и удовлетворяют одной из двух систем уравнений с частными производными первого порядка.

$$\begin{aligned} a_{11}\phi_x + a_{12}\phi_y &= \pm g\psi_y, \\ a_{11}\psi_x + a_{12}\psi_y &= \mp g\phi_y, \end{aligned} \tag{1.32}$$

где $g = \sqrt{-D}$, знаки выбираются одновременно либо нижние либо верхние, тогда комплексная функция $z = \phi + i\psi$ удовлетворяет уравнению характеристик (1.21) в области Ω.

Доказательство. Пусть выполнены уравнения (1.32). Перемножим эти уравнения, тогда

$$(a_{11}\phi_x + a_{12}\phi_y)(a_{11}\psi_x + a_{12}\psi_y) = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})\phi_y\psi_y.$$

Раскрывая скобки и учитывая формулы (1.17), получим $\bar{a}_{12} = 0$. Далее возведем уравнения (1.32) в квадраты и вычтем, тогда с учетом формул (1.17) получим соотношение $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22}$. Используя цепочку равенств (1.31), заключаем, что функция $z = \phi + i\psi$ удовлетворяет уравнению (1.21).

Отметим, что имеет место также утверждение, обратное утверждению 1.4.

Замечание 1.1. Существование решения системы уравнений (1.32) легко доказывается в случае аналитических коэффициентов a_{ij}. Для этого достаточно для системы (1.32) в окрестности точки $M_0 = (x_0, y_0)$ поставить задачу Коши с начальными условиями

$$\phi|_{x=x_0} = f_1(y), \qquad \psi|_{x=x_0} = f_2(y), \tag{1.33}$$

где $f_j(y)$ - произвольно выбранные аналитические функции.

Из теоремы Коши-Ковалевской (См. замечание 2.1) следует существование аналитического решения в некоторой окрестности точки M_0. Накладывая на производные начальных функций (1.33) условия $f_1{}'(y_0) \neq 0,\ f_2{}'(y_0) \neq 0$, получаем решение системы (1.32), для которого $\phi_y \neq 0,\ \psi_y \neq 0$ в некоторой окрестности точки M_0.

При решении задач на практических занятиях, как правило, рассматриваются уравнения с аналитическими коэффициентами $a_{ij}(x,y)$. Более того, действительные коэффициенты уравнения могут быть продолжены в комплексную область и рассмотрены как аналитические функции $a_{ij}(x,\omega)$ комплексного переменного $\omega = y + iy'$ в области $\Omega' = \Omega \times (-\varepsilon < y' < \varepsilon)$. В этом случае для нахождения решений уравнения (1.21) может быть использована следующая лемма.

Лемма 1.2. Пусть дискриминант $D(x,y) < 0$, $a_{11}(x,y) \neq 0$ в области Ω и $\Phi(x,\omega)$ - первый интеграл в области Ω' характеристического уравнения (1.19):

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{a_{12}(x,\omega) + i\sqrt{-D(x,\omega)}}{a_{11}(x,\omega)} \equiv \lambda_1(x,\omega), \qquad (1.34)$$

где функция $\Phi(x,\omega) \in C^1(\Omega')$ и при каждом фиксированном x является аналитической функцией комплексной переменной ω в области Ω', а при определении квадратного корня $\sqrt{-D(x,\omega)}$ выбирается ветвь, соответствующая арифметическому корню.

Тогда функция

$$z = \Phi(x,y) = \Phi(x,\omega)|_{y'=0} = \phi(x,y) + i\psi(x,y) \qquad (1.35)$$

является комплексным решением уравнения с частными производными (1.21) в области Ω.

Доказательство. Так как $a_{11}(x,y) \neq 0$ в Ω, то продолженная в область Ω' функция $a_{11}(x,\omega)$ в силу непрерывности также не равна нулю в расширенной области Ω'', $\Omega \subset \Omega'' \subset \Omega'$. В дальнейшем будем считать, что $\Omega'' = \Omega'$. Следовательно, правая часть $\lambda_1(x,\omega)$ уравнения (1.34) является аналитической функцией по переменным x, ω в области Ω'. Зафиксируем точку $M_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ и построим комплексное решение уравнения (1.34) $\omega = \omega(x)$, пересекающее область Ω' и удовлетворяющее начальному условию $\omega(x_0) = y_0$.

Вычислим производную $\frac{d\omega}{dx}$ в точке M_0. Согласно с определением первого интеграла, для решения $\omega = \omega(x)$, имеем тождество

$$\Phi\big(x,\omega(x)\big) = C_0, \qquad x \in U_{x_0},$$

где $C_0 = \Phi(x_0, y_0)$.

Дифференцируя предыдущее равенство по x, получаем

$$\Phi_x(x,\omega(x)) + \Phi_\omega(x,\omega(x))\frac{d\omega}{dx} = 0, \qquad x \in U_{x_0}.$$

В частности, для точки $M_0(x = x_0, y = y_0,\ y' = 0)$ имеем

$$\Phi_x + \Phi_y \frac{d\omega}{dx}\Big|_{M_0} = 0.$$

Если $\Phi_y(M_0) = 0$, то $\Phi_x(M_0) = 0$. Следовательно $grad\Phi|_{M_0} = 0$, что противоречит определению первого интеграла. Показано, что $\Phi_y(M_0) \neq 0$. Отсюда следует

$$\frac{d\omega}{dx}\Big|_{M_0} = -\frac{\Phi_x(M_0)}{\Phi_y(M_0)}. \tag{1.36}$$

Запишем очевидное тождество, разложив квадратный трехчлен на множители:

$$a_{11}(x,\omega)\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 - 2a_{12}(x,\omega)\frac{d\omega}{dx} + a_{22}(x,\omega) =$$

$$= a_{11}(x,\omega)\left(\frac{d\omega}{dx} - \lambda_1(x,\omega)\right)\left(\frac{d\omega}{dx} - \lambda_2(x,\omega)\right),$$

где $\lambda_1,\ \lambda_2$ - корни квадратного трехчлена.

Так как для функции $\omega = \omega(x)$ в точке M_0 выполнено уравнение (1.34), то

$$a_{11}\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{d\omega}{dx} + a_{22}\Big|_{M_0} = 0. \tag{1.37}$$

После подстановки формулы (1.36) в уравнение (1.37) получим требуемое равенство

$$a_{11}(\Phi_x)^2 + 2a_{12}\Phi_x\Phi_y + a_{22}(\Phi_y)^2 = 0$$

в произвольной точке M_0.

Таким образом, функция (1.35) удовлетворяет уравнению характеристик (1.21).

Замечание 1.2. Если коэффициент $a_{11} = 0$ в области Ω, то вместо уравнения (1.19) рассматривается характеристическое уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a_{12}(x,y) \pm \sqrt{D(x,y)}}{a_{22}(x,y)}.$$

1.1.3. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными

Как было показано в предыдущем параграфе, уравнение с частными производными (1.12) может быть упрощено с помощью замены независимых переменных

$$\xi = \phi(x,y), \qquad \eta = \psi(x,y). \tag{1.38}$$

Основную роль для отыскания функций ϕ и ψ играет характеристическое уравнение (1.19). В дальнейшем каждый тип уравнения (1.12) рассмотрим отдельно, предполагая, что в области Ω уравнение (1.12) является либо гиперболическим, либо параболическим, либо эллиптическим.

Гиперболические уравнения. Для гиперболических уравнений дискриминант $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ в области Ω. В результате имеем два характеристических уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{D}}{a_{11}} \equiv \lambda_1(x,y), \tag{1.39}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{D}}{a_{11}} \equiv \lambda_2(x,y), \tag{1.40}$$

где предполагается, что $a_{11} \neq 0$ в области Ω.

Воспользуемся леммой 1.1. Пусть

$$\phi(x,y) = C_1 \tag{1.41}$$

первый интеграл уравнения (1.39), а

$$\psi(x,y) = C_2 \tag{1.42}$$

первый интеграл уравнения (1.40) в области Ω, тогда функции ϕ и ψ удовлетворяют уравнениям характеристик (1.20). Если в качестве функций преобразования (1.38) выбрать первые интегралы ϕ и ψ, тогда в преобразованном уравнении (1.16) коэффициенты $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{22}$ равны нулю в области Ω.

Таким образом, получено уравнение

$$2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}u_{\xi} + \bar{b}u_{\eta} + \bar{c}u = \bar{f}. \tag{1.43}$$

Замечание 1.3. Можно показать, что в случае аналитических коэффициентов a_{ij} уравнения (1.39), (1.40) имеют первые интегралы (по крайней мере локально), для которых производные $\phi_y \neq 0$, $\psi_y \neq 0$.

Действительно, поставим для уравнения (1.28) задачу Коши в окрестности точки $M_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ с начальным условием

$$\phi|_{x=x_0} = f(y), \qquad y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon, \tag{1.44}$$

где $f(y)$ - произвольно заданная аналитическая функция одной переменной в окрестности точки $y = y_0$, для которой производная $f'(y_0) \neq 0$ (следует $\phi_y(M_0) \neq 0$).

На основании теоремы Коши–Ковалевской аналитическое решение $\phi(x, y)$ задачи (1.28), (1.44) в окрестности точки M_0 всегда существует (См. замечание 2.1). Аналогично для ψ.

Отсюда легко показать, что преобразование (1.38) невырожденное. Действительно, умножая (1.28) на ψ_y, а (1.29) - на ϕ_y и вычитая, получаем выражение для якобиана:

$$J = (\lambda_2 - \lambda_1)\phi_y\psi_y = -\frac{2\sqrt{D}}{a_{11}}\phi_y\psi_y \neq 0.$$

Далее из тождества (1.18) заключаем

$$\bar{a}_{12}^2 = \bar{D} = J^2 D \neq 0.$$

Разделим уравнение (1.43) на $2\bar{a}_{12}$, получим канонический вид гиперболического уравнения на плоскости

$$u_{\xi\eta} + Au_\xi + Bu_\eta + Cu = F. \tag{1.45}$$

Разрешим уравнения (1.41), (1.42) относительно y и получим два семейства линий в области Ω:

$$y = f_1(x, C_1), \qquad y = f_2(x, C_2), \tag{1.46}$$

которые называются характеристиками или характеристическими линиями гиперболического уравнения (1.12).

Параболические уравнения. Для параболического уравнения дискриминант $D = 0$ в области Ω. В результате имеем одно характеристическое уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}}. \tag{1.47}$$

Выберем в качестве функции ϕ преобразования (1.38) функцию первого интеграла

$$\phi(x, y) = C_1 \tag{1.48}$$

уравнения (1.47), а в качестве функции ψ - любую достаточно гладкую функцию, такую, что якобиан преобразования $J \neq 0$ в области Ω.

Так как ϕ - первый интеграл, то на основании леммы 1.1 коэффициент преобразованного уравнения (1.16)

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\phi_x^2 + 2a_{12}\phi_x\phi_y + a_{22}\phi_y^2 = 0. \tag{1.49}$$

Из условия $D = 0$ следует

$$a_{12} = \sqrt{a_{11}a_{22}}. \tag{1.50}$$

Подставив (1.50) в (1.49), получим полный квадрат

$$\bar{a}_{11} = \left(\sqrt{a_{11}}\phi_x + \sqrt{a_{22}}\phi_y\right)^2 = 0.$$

Вычислим коэффициент $\bar{a}_{12}$, используя формулы (1.17), (1.50). После разложения на множители имеем

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\phi_x\psi_x + a_{12}(\phi_x\psi_y + \phi_y\psi_x) + a_{22}\phi_y\psi_y =$$

$$= \left(\sqrt{a_{11}}\phi_x + \sqrt{a_{22}}\phi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\psi_x + \sqrt{a_{22}}\psi_y\right) = 0.$$

Таким образом, показано, что в преобразованном уравнении (1.16) $\bar{a}_{11} = 0,\ \bar{a}_{12} = 0$, то есть

$$\bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{a}u_\xi + \bar{b}u_\eta + \bar{c}u = \bar{f}.$$

Коэффициенты $\bar{a}_{22} \neq 0$, так как порядок уравнения при невырожденном преобразовании сохраняется.

Разделив на $\bar{a}_{22}$, получим канонический вид параболического уравнения на плоскости

$$u_{\eta\eta} + Au_\xi + Bu_\eta + Cu = F. \tag{1.51}$$

Разрешив уравнение (1.48) относительно y, получим семейство линий

$$y = f(x, C_1), \tag{1.52}$$

называемых характеристиками параболического уравнения (1.12).

Эллиптические уравнения. Для эллиптического уравнения дискриминант $D < 0$ в области Ω. Характеристические уравнения (1.19) будут комплексно-значными уравнениями. Выберем одно из них:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + i\sqrt{-D}}{a_{11}}. \tag{1.53}$$

Для приведения эллиптического уравнения к каноническому виду воспользуемся леммой 1.2. Пусть $\Phi(x, y)$ - первый комплекснозначный интеграл характеристического уравнения (1.53), тогда функция Φ удовлетворяет уравнению характеристик (1.21). Для преобразования (1.38) выберем функции

$$\phi = Re\,\Phi, \qquad \psi = Im\,\Phi. \tag{1.54}$$

Отметим, что преобразование (1. 38) в этом случае всегда может быть выбрано невырожденным. Действительно, воспользуемся утверждением 1.5. Умножая первое уравнение (1.32) на ψ_y, а второе - на ϕ_y и вычитая первое из второго, получаем формулу для якобиана:

$$J = \pm\frac{\sqrt{-D}}{a_{11}}\left(\phi_y^2 + \psi_y^2\right).$$

На основании замечания 1.1 заключаем, что $J \neq 0$.

Из утверждения 1.4 следует, что в преобразованном уравнении (1.16) $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22}, \quad \bar{a}_{12} = 0$, то есть

$$\bar{a}_{11}\left(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}\right) + \bar{a}u_{\xi} + \bar{b}u_{\eta} + \bar{c}u = \bar{f}.$$

Коэффициенты $\bar{a}_{11} \neq 0$, так как из тождества (1.18) следует $\bar{a}_{11}^2 = -J^2 D \neq 0$. Разделим на $\bar{a}_{11}$, получим канонический вид эллиптического уравнения на плоскости

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + Au_{\xi} + Bu_{\eta} + Cu = F. \tag{1.55}$$

Заметим, что эллиптическое уравнение не имеет характеристических линий.

Подытоживая, можно сказать, что приведение уравнений к каноническому виду сводится к отысканию первых интегралов характеристического уравнения. Так как произвольная функция от первого интеграла также является первым интегралом, то уравнение может быть приведено к каноническому виду с помощью различных преобразований переменных (1.38), то есть неоднозначно.

Существование первых интегралов в случае аналитических коэффициентов a_{ij} обосновывается на основании теоремы Ковалевской (см. замечания 1.1 и 1.2). Эта теорема гарантирует существование только локального решения уравнения характеристик, то есть в некоторой окрестности любой точки. Отсюда следует, что исходное уравнение (1.12) может быть приведено к каноническому виду, вообще говоря, только в некоторой достаточно малой окрестности каждой точки области Ω. Приведение уравнения к каноническому виду во всей области Ω требует дополнительных исследований.

1.1.4. Классификация и приведение к каноническому виду уравнений второго порядка со многими независимыми переменными

В предыдущих параграфах был разработан метод приведения уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными к каноническому виду. Для уравнений второго порядка с n независимыми переменными ситуация усложняется. Привести такие уравнения к каноническому виду удается только лишь в случае уравнений с постоянными коэффициентами.

Уравнение характеристик. Рассмотрим класс линейных уравнений второго порядка с n независимыми переменными:

$$L(u) \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\vec{x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i\left(\vec{x}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c\left(\vec{x}\right)u = f\left(\vec{x}\right), \tag{1.56}$$

где коэффициенты $a_{ij},\ a_i,\ c,\ f$ определены в области $\Omega \in R^n$; $\quad a_{ij} = a_{ji}$.

Выделим главную часть уравнения

$$L_0(u) \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\vec{x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{1.57}$$

Рассмотрим n числовых переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и поставим в соответствие производным функции u числовые выражения по следующему правилу

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \to \xi_i, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \to \xi_i \xi_j,$$

тогда главной части (1.57) соответствует полином по переменным $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$:

$$P\left(\vec{x},\vec{\xi}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\vec{x}\right)\xi_i\xi_j. \qquad (1.58)$$

Полином (1.58) по переменным ξ_i называется характеристическим полиномом.

Зафиксируем точку $\vec{x}_0 \in \Omega$, получим квадратичную форму с постоянными коэффициентами

$$P\left(\vec{\xi}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\vec{x}_0\right)\xi_i\xi_j. \qquad (1.59)$$

Рассмотрим поверхность Γ, принадлежащую области Ω, которую зададим уравнением

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \qquad (1.60)$$

где $\phi \in C^2(\Omega)$.

Положим в выражении (1.58) $\xi_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$, то есть $\vec{\xi} = grad\,\phi$.

Определение 1.7. Поверхность Γ, заданная уравнением (1.60), называется характеристикой или характеристической поверхностью уравнения (1.56), если во всех точках поверхности Γ для функции ϕ выполнено уравнение

$$P\left(\vec{x}, grad\phi\left(\vec{x}\right)\right) \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\vec{x}\right)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_j} = 0. \qquad (1.61)$$

Уравнение (1.61) называется уравнением характеристик.

Заметим, что в случае плоскости $(n = 2)$ уравнение (1.61) совпадает с ранее определенным уравнением характеристик (1.21).

Классификация уравнений. Классификацию уравнений (1.56) в точке $\vec{x}_0$ осуществим с помощью квадратичной формы (1.59). Как известно, квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду. Для этого перейдем от переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ к новым переменным $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ с помощью невырожденного преобразования

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\mu_j, \qquad (1.62)$$

где C_{ij} - невырожденная матрица.

Подставим (1.62) в квадратичную форму (1.59), положив

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} C_{ik}\mu_k, \qquad \xi_j = \sum_{s=1}^{n} C_{js}\mu_s,$$

Тогда

$$P\left(\vec{\xi}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{ij}(x_0)C_{ik}C_{js}\mu_k\mu_s.$$

Таким образом, получена новая квадратичная форма по переменным $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$:

$$\bar{P}(\vec{\mu}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_{ks}\mu_k\mu_s \tag{1.63}$$

с коэффициентами

$$A_{ks} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\vec{x}_0)C_{ik}C_{js}. \tag{1.64}$$

Из теории квадратичных форм известно, что существует такое невырожденное преобразование (1.62), для которого форма (1.63) принимает канонический вид

$$\bar{P}(\vec{\mu}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\mu_i^2, \qquad \alpha_i = 0,\ 1,\ -1, \tag{1.65}$$

то есть $A_{ks} = 0$ при $k \neq s,\ A_{ii} = \alpha_i$.

Известно также, что число нулей, единиц и минус-единиц квадратичной формы (1.65) не зависит от преобразования (1.62). Этот факт используется для классификации уравнений (1.56).

Определение 1.8. Уравнение (1.56) называется эллиптическим в точке $\vec{x}_0$, если в канонической квадратичной форме (1.65) все $\alpha_i = 1$ или все $\alpha_i = -1$. Уравнение (1.56) называется гиперболическим в точке $\vec{x}_0$, если в квадратичной форме (1.65) $\alpha_1 = 1$, $\alpha_i = -1$ при $i = 2,\ 3,\ldots,n$ или $\alpha_1 = -1$, $\alpha_i = 1$ при $i = 2,\ 3,\ldots,n$.

Уравнение (1.56) называется параболическим в точке $\vec{x}_0$, если в квадратичной форме (1.65) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_i = 1$ при $i = 2,\ 3,\ldots,n$ или $\alpha_1 = 0$, $\alpha_i = -1$ при $i = 2,\ 3,\ldots,n$.

Как видно, данная классификация не исчерпывает все типы уравнений (1.56).

В случае $n = 2$ приведенная классификация соответствует классификации с помощью дискриминанта D.

Приведение к каноническому виду уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим уравнение (1.56) с постоянными коэффициентами

$$L(u) \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f. \tag{1.66}$$

Приведем его к каноническому виду с помощью замены независимых переменных. Для этого в уравнении (1.66) перейдем от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ к новым переменным $y_1, y_2, \dots, y_n$, производя замену

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ji} x_j, \tag{1.67}$$

где матрица C_{ji} транспонированная по отношению к матрице преобразования (1.62).

Вычислим производные

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} C_{ik} \frac{\partial u}{\partial y_k},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} C_{ik} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} C_{ik} C_{js} \frac{\partial^2 u}{\partial y_s \partial y_k}.$$

После подстановки в (1.66) получим уравнение в новых переменных:

$$\bar{L}(u) \equiv \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} A_{ks} \frac{\partial^2 u}{\partial y_s \partial y_k} + \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\partial u}{\partial y_k} + cu = f,$$

где $A_k = \sum_{i=1}^{n} C_{ik} a_i; \quad A_{ks} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ik} C_{js}$, то есть коэффициент A_{ks} совпадает с коэффициентом (1.64) квадратичной формы. Это означает, что если квадратичная форма (1.59) с помощью преобразования (1.62) приводится к каноническому виду (1.65), тогда уравнение (1.66) с помощью преобразования (1.67) приводится к каноническому виду

$$\bar{L}(u) \equiv \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\partial u}{\partial y_k} + cu = f. \tag{1.68}$$

Приведем примеры уравнений в каноническом виде при $n = 3$, предварительно сделав замену независимых переменных $y_1 = x,\ y_2 = y, y_3 = z$.

Эллиптические уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_2 \frac{\partial u}{\partial y} + A_3 \frac{\partial u}{\partial z} + cu = f. \tag{1.69}$$

Гиперболические уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_2 \frac{\partial u}{\partial y} + A_3 \frac{\partial u}{\partial z} + cu = f. \qquad (1.70)$$

Параболические уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_2 \frac{\partial u}{\partial y} + A_3 \frac{\partial u}{\partial z} + cu = f, \quad A_3 \neq 0. \qquad (1.71)$$

Заметим, что в плоском случае $(n = 2)$ канонический вид (1.68) гиперболического уравнения отличается от канонического вида (1.45), поэтому (1.45) называется первым каноническим видом, а

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} + A_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} + A_2 \frac{\partial u}{\partial y_2} + cu = f$$

вторым каноническим видом гиперболического уравнения.

1.1.5. Исключение в уравнениях младших производных

В предыдущих разделах производилось упрощение уравнений с помощью замены независимых переменных. Упрощение уравнений может быть осуществлено также с помощью замены неизвестной функции, входящей в уравнение. Покажем это на примере уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными, которые были приведены к каноническим уравнениям (1.45), (1.51), (1.55).

Гиперболические уравнения

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f. \qquad (1.72)$$

Параболические уравнения

$$u_{yy} + au_x + bu_y + cu = f. \quad a \neq 0. \qquad (1.73)$$

Эллиптические уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} + au_x + bu_y + cu = f. \qquad (1.74)$$

Рассмотрим случай, когда коэффициенты $a,\ b,\ c$ постоянные. Произведем дальнейшее упрощение уравнений (1.72) - (1.74), вводя вместо функции u новую неизвестную функцию v с помощью замены

$$u(x, y) = v(x, y) e^{\alpha x + \beta y}, \qquad (1.75)$$

где постоянные $\alpha, \ \beta$ будут определены в дальнейшем.

Вычислим производные:

$$u_x = (v_x + \alpha v)\Phi, \qquad u_y = (v_y + \beta v)\Phi,$$

$$u_{xx} = (v_{xx} + 2\alpha v_x + \alpha^2 v)\Phi, \qquad u_{yy} = (v_{yy} + 2\beta v_y + \beta^2 v)\Phi,$$

$$u_{xy} = (v_{xy} + \alpha v_y + \beta v_x + \alpha\beta v)\Phi, \qquad \Phi = e^{\alpha x + \beta y}.$$

Подставив вычисленные производные в (1.72), получим

$$v_{xy} + (a + \beta)v_x + (b + \alpha)v_y + (\alpha\beta + \alpha a + \beta b + c)v = \frac{f}{\Phi}.$$

Полагая коэффициенты при первых производных равными нулю, определяем постоянные $\alpha = -b, \quad \beta = -a.$ В результате уравнение (1.72) преобразуется к виду

$$v_{xy} + \bar{c}v = \bar{f}, \tag{1.76}$$

где $\bar{c} = c - ab; \ \bar{f} = \frac{f}{\Phi}.$

Аналогично уравнение (1.73) преобразуется к виду

$$v_{yy} + av_x = \bar{f}, \tag{1.77}$$

где в преобразовании (1.75) $\alpha = \frac{b^2}{4a} - \frac{c}{a}, \quad \beta = -\frac{b}{2}.$

Уравнение (1.74) преобразуется к виду

$$v_{xx} + v_{yy} + \bar{c}v = \bar{f}, \quad \bar{c} = c - \frac{1}{4}(a^2 + b^2), \tag{1.78}$$

где в преобразовании (1.75) $\alpha = -\frac{a}{2}, \quad \beta = -\frac{b}{2}.$

Таким образом, любое линейное уравнение с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными и постоянными коэффициентами может быть приведено к трем наиболее простым уравнениям (1.76), (1.77), (1.78) в зависимости от типа исходного уравнения.

1.1.6. Классические решения простейших уравнений с частными производными второго порядка

Одной из основных проблем уравнений с частными производными является нахождение решений уравнений. Для одних уравнений общее решение представляется в виде достаточно простых аналитических выражений, для других уравнений решения могут вообще не существовать.

Общее решение простейшего гиперболического уравнения на плоскости. Как было показано, гиперболическое уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными (1.12) может быть при определенных условиях приведено к виду (1.76). Полагая $\bar{c} = 0$, получаем простейшее гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x, y). \tag{1.79}$$

Для определенности будем считать, что $f \in C(R^2)$.

Найдем общее решение, интегрируя уравнение (1.79) по переменной x. Заметим, что при интегрировании уравнения с частными производными по одной из независимых переменных возникающие при интегрировании постоянные в общем случае зависят от остальных независимых переменных.

В результате

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_0^x f(\xi, y)\, d\xi + C(y),$$

где $C(y)$ - произвольная непрерывная функция переменной y.

Полученное уравнение проинтегрируем по переменной y, тогда

$$u(x, y) = \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_0^y C(\eta)\, d\eta + C_1(x).$$

В силу произвольности функции $C(y)$ получим общее решение уравнения (1.79) вида

$$u(x, y) = C_1(x) + C_2(y) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta)\, d\xi d\eta, \tag{1.80}$$

где $C_1(x), C_2(y)$ - произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

Для однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \tag{1.81}$$

общее решение определяется формулой

$$u(x,y) = C_1(x) + C_2(y). \tag{1.82}$$

Нахождение решений эллиптического уравнения Лапласа. Отметим, что для эллиптических уравнений нет достаточно простых формул, определяющих общее решение. Как было показано, эллиптическое уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными (1.12) при определенных условиях может быть преобразовано к виду (1.78).

Положим $\bar{c} = 0,\ \bar{f} = 0,$ тогда получим простейшее эллиптическое уравнение на плоскости

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1.83}$$

называемое уравнением Лапласа. Дифференциальный оператор уравнения (1.83) имеет специальное обозначение $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ и называется оператором Лапласа. Для уравнения (1.83) легко могут быть построены частные решения с привлечением аналитических функций комплексного переменного. Пусть $f(z)$ - произвольная аналитическая функция комплексного переменного $z = x + iy$ в области Ω. Выделим действительную и мнимую части функции $f(z)$, то есть представим

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Для любой аналитической функции комплексного переменного выполнены уравнения Коши-Римана (1.11).

Дифференцируя первое уравнение (1.11) по x, а второе уравнение по y и складывая, получаем уравнение $\Delta u = 0$ для функции u. Аналогично для v имеем $\Delta v = 0$.

Таким образом, действительная и мнимая части аналитической функции комплексного переменного являются решениями эллиптического уравнения (1.83).

Пример 1.3. Рассмотрим аналитическую функцию $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, тогда функции $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$ являются частными решениями уравнения (1.83) на плоскости R^2.

Пример 1.4. Рассмотрим аналитическую функцию $f(z) = \ln\frac{1}{z-z_0}$, $z_0 = x_0 + iy_0 - const$. Запишем комплексное число $z - z_0$ в виде $z - z_0 = re^{i\phi}$, где $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y-y_0}{x-x_0}$, тогда $f(z) = ln\frac{1}{r} - -i\, arctg\frac{y-y_0}{x-x_0}$.

Получим частные решения уравнения (1.83):

$$u = ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}, \qquad v = \operatorname{arctg}\frac{y-y_0}{x-x_0}.$$

Умножив u на числовой множитель $\frac{1}{2\pi}$, получим решение

$$u(x,y) = G(M,M_0) \equiv \frac{1}{2\pi} ln\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right) = \frac{1}{2\pi} ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}, \tag{1.84}$$

которое называется фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости R^2.

Заметим, что функция (1.84) удовлетворяет уравнению (1.83) во всех точках плоскости за исключением точки $x = x_0$, $y = y_0$.

В случае трехмерного пространства R^3 для уравнения Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{1.85}$$

решение вида

$$u(x,y,z) = G(M,M_0) \equiv \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}, \tag{1.86}$$

где x_0, y_0, z_0 - координаты фиксированной точки M_0, называется фундаментальным решением уравнения Лапласа в R^3.

Для проверки вычислим производные

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right) = -\frac{1}{R^3_{MM_0}} + \frac{3(x-x_0)^2}{R^5_{MM_0}}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right) = -\frac{1}{R^3_{MM_0}} + \frac{3(y-y_0)^2}{R^5_{MM_0}},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right) = -\frac{1}{R^3_{MM_0}} + \frac{3(z-z_0)^2}{R^5_{MM_0}},$$

где $R_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$.

После подстановки в уравнение (1.85) получим тождество. Заметим, что функция (1.86) удовлетворяет уравнению (1.85) во всех точках пространства R^3 за исключением точки $x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0$.

Частное решение уравнения Пуассона $\Delta u = -f(M)$ в области $D \subset R^3$ выражается через фундаментальное решение (1.86) в виде интеграла [1, с. 346]

$$u(M) = \iiint_D f(Q)\, G(M,Q) dV_Q, \quad f \in C^1(D) \cap C(\bar{D}),$$

называемого объемным потенциалом. В R^2 используется фундаментальное решение (1.84).

Фундаментальное решение параболического уравнения. Рассмотрим однородное параболическое уравнение с постоянными коэффициентами $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}$ и с двумя независимыми переменными $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{t}$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{t}} = \boldsymbol{\alpha} \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}^2} + \boldsymbol{\beta} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\gamma}\, \boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{0}. \tag{1.87}$$

Легко проверить, что функция

$$u(x,t) = G^+(x,t) \equiv \frac{e^{\gamma t}}{\sqrt{t}} \Phi(x,t), \tag{1.88}$$

где $\Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}}\ exp\left\{-\frac{(x+\beta t)^2}{4\alpha t}\right\}$,

удовлетворяет уравнению (1.87) в области $D^+ = (0 < t < \infty) \times (-\infty < x < \infty)$.

Действительно, вычислим производные

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\gamma - \frac{1}{2t} - \frac{\beta(x+\beta t)}{2\alpha t} + \frac{(x+\beta t)^2}{4\alpha t^2}\right) \frac{e^{\gamma t}}{\sqrt{t}} \Phi(x,t),$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{(x+\beta t)}{2\alpha t} \frac{e^{\gamma t}}{\sqrt{t}} \Phi(x,t), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(-\frac{1}{2\alpha t} + \frac{(x+\beta t)^2}{4\alpha^2 t^2}\right) \frac{e^{\gamma t}}{\sqrt{t}} \Phi(x,t). \tag{1.89}$$

Подставив вычисленные производные в уравнение (1.87), получим тождество.

Доопределим функцию (1.88) в области $D^- = (-\infty < t < 0) \times$ $\times (-\infty < x < \infty) \cup (t = 0) \times (|x| > 0)$ функцией $G^-(x,t) \equiv 0$, то есть нулем.

Структура вычисленных производных (1.89) показывает, что любая производная $\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}G^+}{\partial t^{\alpha_1}\partial x^{\alpha_2}}$ выражается через сумму слагаемых вида $\frac{(x+\beta t)^s}{t^\nu}\Phi(x,t)$.

Легко показать, что при $x \neq 0$

$$\lim_{t\to 0}\frac{(x+\beta t)^s}{t^\nu}\Phi(x,t) = 0.$$

В результате заключим, что

$$\lim_{t\to 0}\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}G^+}{\partial t^{\alpha_1}\partial x^{\alpha_2}} = \left.\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}G^-}{\partial t^{\alpha_1}\partial x^{\alpha_2}}\right|_{t=0} = 0 \quad \text{при } x \neq 0.$$

Это означает, что функции $G^+,\ G^-$ гладко сопрягаются на оси $t = 0$ при $x \neq 0$ и образуют функцию $G = G^+ \cup G^-$, любое число раз дифференцируемую в R^2 кроме точки $x = 0,\ \ t = 0$. Так как коэффициенты уравнения (1.87) постоянные, то функция $G(x - x_0,\ t - t_0)$, где $x_0,\ t_0 - const$, также является решением уравнения (1.87). Построенное решение

$$u(x,t) = G(x-x_0,t-t_0) \equiv \begin{cases} \frac{e^{\gamma(t-t_0)}}{\sqrt{4\pi\alpha(t-t_0)}}exp\left\{-\frac{(x-x_0+\beta(t-t_0))^2}{4\alpha(t-t_0)}\right\}, & t > t_0 \\ 0, \quad t < t_0, \\ 0, \quad t = t_0, x \neq x_0 \end{cases} \qquad (1.90)$$

называется фундаментальным решением параболического уравнения (1.87).

Приведенные в этом параграфе специальные решения некоторых уравнений, называемые фундаментальными решениями, используются для исследования различных свойств уравнений. Их важность для приложений будет показана в дальнейшем.

Определение 1.9. Уравнение (1.5) называется гипоэллиптическим в R^n, если любое его классическое решение $u \in C^2(\Omega)$ в любой области $\Omega \in R^n$ является бесконечно дифференцируемым, то есть $u \in C^\infty(\Omega)$.

Заметим, что эллиптические уравнения (1.83), (1.85) и параболическое уравнение (1.87) являются гипоэллиптическими уравнениями, а гиперболическое уравнение (1.81) таковым не является.

1.1.7. Общее решение уравнений с частными производными первого порядка

Рассмотрим линейное уравнение с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными:

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y), \qquad (1.91)$$

где для определенности $a \neq 0$ в области Ω; $a,\ b,\ c,\ f \in C^1(\Omega)$.

Для нахождения общего решения уравнения (1.91) составим характеристическое уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}. \qquad (1.92)$$

Утверждение 1.6. Пусть $\phi(x,y)$ - первый интеграл обыкновенного дифференциального уравнения (1.92) в области Ω, $\phi \in C^1(\Omega)$, тогда функция $\phi(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$a\phi_x + b\phi_y = 0 \qquad (1.93)$$

в области Ω.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $M_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$. Построим решение $y = y(x)$ уравнения (1.92) при условии $y(x_0) = y_0$. Такое решение, по крайней мере локально, существует. Тогда, согласно с определением первого интеграла, выполнено тождество $\phi(x, y(x)) = C$, $C = const.$ После дифференцирования по x имеем

$$\phi_x(x, y(x)) + \phi_y(x, y(x))\frac{dy}{dx} = 0.$$

Учитывая (1.92), получим требуемое равенство (1.93) для произвольной точки M_0.

Далее произведем в уравнении (1.91) замену переменных (1.38), где в качестве функции ϕ выберем первый интеграл уравнения (1.92) с условием $\phi_y \neq 0$, а в качестве функции ψ - любую гладкую функцию $\psi \in C^1(\Omega)$, такую, что якобиан преобразования $J \neq 0$ в Ω.

Учитывая (1.93), получим уравнение

$$u_\eta + P(x,y)u = F(x,y), \qquad P = \frac{c}{a\psi_x + b\psi_y}, \qquad F = \frac{f}{a\psi_x + b\psi_y}.$$

Найдем для преобразования (1.38) обратное преобразование $x = \phi_1(\xi,\eta)$, $y = \psi_1(\xi,\eta)$, тогда

$$u_\eta + p(\xi,\eta)u = \Phi(\xi,\eta), \qquad (1.94)$$

где $p(\xi,\eta) = P(\phi_1(\xi,\eta), \psi_1(\xi,\eta))$, $\Phi(\xi,\eta) = F(\phi_1(\xi,\eta), \psi_1(\xi,\eta))$.

Проинтегрируем обыкновенное дифференциальное уравнение (1.94) по переменной η, рассматривая ξ как параметр. Тогда

$$u = \frac{1}{K(\xi,\eta)}\left(C(\xi) + \int_{\eta_0}^{\eta} \Phi(\xi,\tau)K(\xi,\tau)d\tau\right), \text{ где } K(\xi,\eta) = exp\left(\int_{\eta_0}^{\eta} p(\xi,t)dt\right).$$

Возвращаясь к старым переменным x, y с учетом (1.35), получим общее решение уравнения (1.91) (по крайней мере локальное):

$$u(x,y) = \frac{1}{K(\phi(x,y),\psi(x,y))}\left(C(\phi(x,y)) + \int_{\eta_0}^{\psi(x,y)} \Phi(\phi(x,y),\tau)\, K(\phi(x,y),\tau)d\tau\right), \tag{1.95}$$

где $\eta_0 = \psi(x_0, y_0) - const$; $C(.)$ - произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Уравнение $\phi(x,y) = C$, $C - const$, задает в области Ω семейство линий, которые называются характеристическими линиями исходного уравнения (1.91), а рассмотренный метод нахождения общего решения уравнения (1.91) называется методом характеристик.

1.2. Задача Коши для уравнений с частными производными

1.2.1. Постановка задачи Коши. Теорема Ковалевской

Рассмотрим n -мерное евклидово пространство R^n. Пусть D - связная область в пространстве R^n, точка $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$. В области D зададим уравнение с частными производными второго порядка

$$L(u) \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\vec{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(\vec{x})u = f(\vec{x}) \tag{2.1}$$

с достаточно гладкими коэффициентами. Тип уравнения (2.1) может быть любым.

В пространстве R^n зададим незамкнутую без самопересечений поверхность Γ_0 с помощью уравнения

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \tag{2.2}$$

где функция g является дважды непрерывно дифференцируемой функцией, то есть $g \in C^2(D)$, а $grad\ g \neq 0$ в любой точке $\vec{x}_0 \in D$.

Обозначим через $\Gamma = \Gamma_0 \cap D$ часть поверхности, лежащей внутри области D. Будем предполагать, что область D представима в виде $D = D^+ \cup \Gamma \cup D^-$, где $D^+ \cap \ D^- = 0$, а подобласти D^+, D^- не имеют общих точек с поверхностью Γ (см. рисунок. 2.1.).

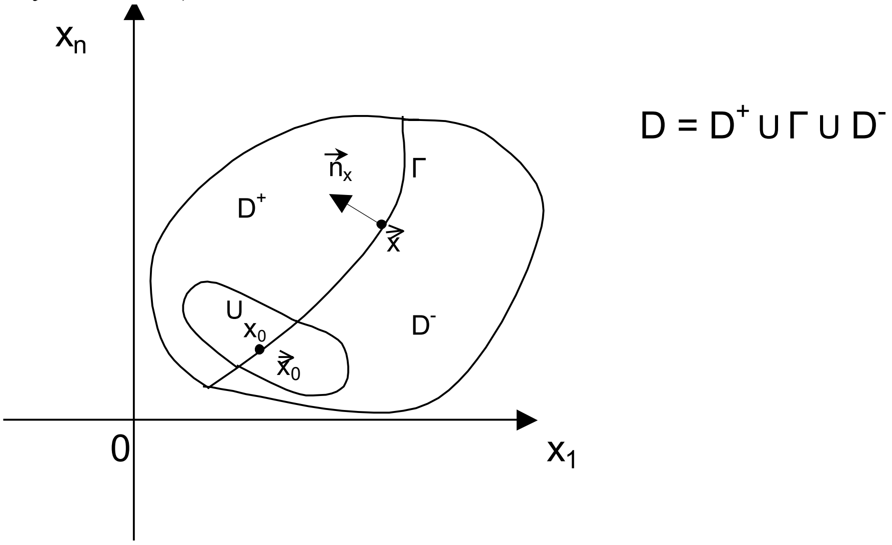


Рисунок 2.1.

На поверхности Γ зададим два условия на неизвестную функцию u:

$$u(\vec{x})|_{\vec{x}\in\Gamma} = \phi_0(\vec{x}), \qquad \left.\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \vec{n}_x}\right|_{\vec{x}\in\Gamma} = \phi_1(\vec{x}), \tag{2.3}$$

где $\phi_0(\vec{x})$, $\phi_1(\vec{x})$ - заданные функции на поверхности Γ; $\vec{n}_x = (n_1, n_2, \dots, n_n)$ - единичная нормаль к поверхности Γ в точке $\vec{x}$; $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}_x}$ - производная по направлению нормали $\vec{n}_x$, которая определяется выражением

$$\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \vec{n}_x} = (grad\, u\,, \vec{n}_x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i, \quad n_i = \frac{1}{|grad\, g|}\frac{\partial g}{\partial x_i}, \quad |grad\, g| = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.4}$$

Условия (2.3) называются начальными условиями.

Задача Коши 1.

$$\boldsymbol{L(u) = f} \quad \text{в области } D, \tag{2.5}$$

$$u|_\Gamma = \phi_0(\vec{x}), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_\Gamma = \phi_1(\vec{x}). \tag{2.6}$$

Требуется найти функцию $u \in C^2(D)$, которая удовлетворяет уравнению (2.5) в области D и начальным условиям (2.6) на поверхности Γ.

Функция u, которая удовлетворяет указанным требованиям, называется классическим решением задачи Коши. Очевидно, что не для любых функций ϕ_0, ϕ_1 такое решение найдется.

Заметим, что для двухмерного пространства R^2 область $D \subset R^2$ является плоской областью, а Γ – линия, пересекающая плоскую область D.

В простейшем случае, когда поверхность Γ_0 является плоскостью $x_n = 0$, постановка задачи (2.5), (2.6) упрощается:

$$
\begin{aligned}
&L(u) = f(\vec{x}) \quad \text{в области } D, \\
&u|_{x_n=0} = \phi_0(\vec{x}'), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = \phi_1(\vec{x}'),
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

где $\overrightarrow{x'} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \Gamma$; Γ - сечение области D плоскостью $x_n = 0$, $\Gamma = \Gamma_0 \cap D \subset R^{n-1}$.

Возможны и другие разновидности задачи Коши. Для иллюстрации выделим область D^+, расположенную по одну сторону от поверхности Γ, и обозначим $D_\Gamma^+ = D^+ \cup \Gamma$. Для области D_Γ^+ сформулируем следующую задачу.

Задача Коши 2.

$$
L(u) = f(\vec{x}) \quad \text{в области } D^+, \tag{2.8}
$$

$$
u|_\Gamma = \phi_0(\vec{x}), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_\Gamma = \phi_1(\vec{x}). \tag{2.9}
$$

Требуется найти функцию $u \in C^2(D^+) \cap C^1(D_\Gamma^+)$, которая удовлетворяет уравнению (2.8) в подобласти D^+ и начальным условиям (2.9) на поверхности Γ, примыкающей к подобласти D^+.

Возвратимся к задаче Коши (2.5), (2.6) и преобразуем ее. Для этого зафиксируем точку $\vec{x}_0 \in \Gamma$. По условиям на функцию g вектор $grad g = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right) \neq 0$ на поверхности Γ, поэтому одна из производных $\frac{\partial g}{\partial x_i} \neq 0$ в точке $\vec{x}_0$. Для определенности будем считать, что $\frac{\partial g}{\partial x_n} \neq 0$ в точке $\vec{x}_0$, тогда на основании теоремы о неявной функции [6, с.207] существует окрестность U_{x_0} точки $\vec{x}_0$, в которой уравнение (2.2) однозначно разрешимо относительно переменной x_n, то есть поверхность Γ в окрестности U_{x_0} представима в виде уравнения

$$
x_n = F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \equiv F\left(\vec{x'}()\right). \tag{2.10}
$$

В дальнейшем для простоты будем считать, что окрестность U_{x_0} совпадает со всей областью D.

Определение 2.1. В пространстве R^n рассмотрим поверхность Γ размерности $n-1$. Пусть для $\forall$ точки $\vec{x}_0 \in \Gamma$ существует окрестность $U_{x_0} \in R^n$, внутри которой поверхность задается однозначным уравнением (2.10) в некоторой локальной декартовой системе координат. Поверхность Γ называется k раз непрерывно дифференцируемой или класса C^k $(\Gamma \in C^k)$, если для $\forall \vec{x}_0 \in \Gamma$ существует окрестность $U_{x_0}{}' \subset R^{n-1}$, внутри которой функция $F\left(x^{\vec{\prime}}()^k(U_{x_0'})\right)$. Число k определяет гладкость поверхности Γ. Далее, пусть для $\forall x^{\vec{\prime}_1}{}^{\vec{\prime}_2 x_0'}$ и любой производной $D^\alpha F$ порядка $|\alpha| = k$ выполнено неравенство

$$\left|D^\alpha F\left(x^{\vec{\prime}_2}()^\alpha\left(x^{\vec{\prime}_1}()\right)\right) < C\left|x^{\vec{\prime}_2}{}^{\vec{\prime}_1}{}^{\nu}\right|\right|,$$

где $C, \nu - const$, то есть производные $D^\alpha F$ являются гельдеровскими функциями с показателем $\nu(0 < \nu < 1)$. Тогда поверхность $\Gamma \in C^{k+\nu}$.

Запишем задачу (2.5), (2.6) с учетом (2.10):

$$L(u) = f(\vec{x}) \quad \text{в } D, \quad u\Big|_{x_n=F\left(\vec{x}'\right)} = \psi_0\left(x^{\vec{\prime}}()\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{x_n=F\left(\vec{x}'\right)_1}\left(x^{\vec{\prime}}()\right)\right), \qquad (2.11)$$

где $\psi_j(\vec{x}') = \phi_j\left(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\right)$.

Далее преобразуем задачу (2.11), вводя вместо переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ новые независимые переменные $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, t$ с помощью невырожденного преобразования

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2, \dots, y_{n-1} = x_{n-1}, t = g(x_1, x_2, \dots, x_n). \qquad (2.12)$$

Преобразование невырожденное, так как якобиан $J = \frac{\partial g}{\partial x_n} \neq 0$.

Вычислим производные, входящие в уравнение (2.1):

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial y_i} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial x_i}, \quad i \neq n,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial x_n}. \qquad (2.13)$$

Для вторых производных имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial y_i} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial y_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_i} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y_j} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)\frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}, \quad j \neq n, \ i \neq n,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x_n} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial g}{\partial x_n}\frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_i}, \quad i \neq n,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(\frac{\partial g}{\partial x_n}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2}.$$

После подстановки этих формул в уравнение (2.1) получим уравнение в новых переменных:

$$\bar{L}(u) \equiv \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B_0\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} B_i \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial t} + L_y(u) = G(\vec{y}, t), \qquad (2.14)$$

где $L_y = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} B_{ij}(\vec{y}, t)\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^{n-1} C_i(\vec{y}, t)\frac{\partial}{\partial y_i} + C(\vec{y}, t)$ - дифференциальный оператор второго порядка по переменным $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$, $G(\vec{y}, t) = G(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_1, \ldots, x_n)) = f(\vec{x})$. Коэффициент α определяется формулой

$$\alpha(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\vec{x})\frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x_i}\frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x_j} \equiv P(\vec{x}, grad\, g(\vec{x})). \qquad (2.15)$$

Если $\alpha(\vec{x}) \neq 0$ в области D, то разделив (2.14) на коэффициент α и выразив его через переменные $\vec{y}$, t, получим уравнение типа Ковалевской с выделенной переменной t:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_0\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} b_i \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial t} + \bar{L}_y(u) = \bar{f}(\vec{y}, t). \qquad (2.16)$$

Преобразуем начальные условия (2.11). Уравнение поверхности Γ (2.2) с учетом замены (2.12) примет вид $t = 0$, поэтому первое начальное условие (2.11) можно записать как

$$u|_{t=0} = \psi_0(\vec{y}), \qquad \vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}). \qquad (2.17)$$

Преобразуем второе начальное условие, вычислив нормальную производную (2.4). После подстановки формул (2.13), получим

$$\left.\frac{du}{d\vec{n}}\right|_{t=0} = \left.\left(|grad\, g|\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{|grad\, g|}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)\right|_{t=0} = \psi_1(\vec{y}),$$

откуда следует, что

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{|grad\, g|}\left.\left\{\psi_1(\vec{y}) - \frac{1}{|grad\, g|}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\psi_0(\vec{y})}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right\}\right|_{t=0} \equiv \Psi_1(\vec{y}). \quad (2.18)$$

Добавив условия (2.17), (2.18) к уравнению (2.16), получим постановку задачи Коши (2.5), (2.6) в новых переменных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_0\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} b_i\frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial t} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} b_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i\frac{\partial u}{\partial y_i} + cu = \bar{f} \quad \text{в } \Omega, \quad (2.19)$$

$$u|_{t=0} = \Psi_0(\vec{y}), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \Psi_1(\vec{y}), \quad (2.20)$$

где с помощью преобразования (2.12) область D преобразована в область Ω в пространстве $R^n_{y,t}$ переменных $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, t$. При этом поверхность Γ представляет собой плоское многообразие γ в области Ω (см. рисунок 2.2). Коэффициенты и правая часть уравнения (2.19) являются функциями переменных $\vec{y}$, t.

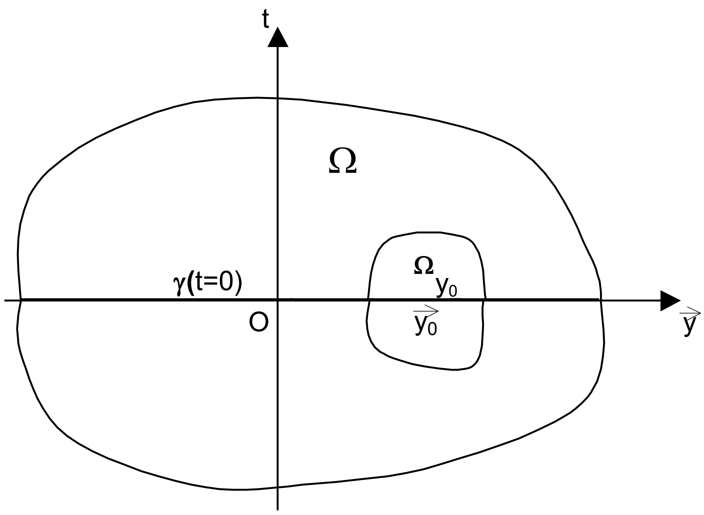


Рисунок 2.2.

Заметим, если переменную t интерпретировать как время, то условия (2.20) являются условиями в начальный момент времени $t = 0$. Отсюда становится понятным, почему условия (2.6) получили название начальных условий.

Таким образом, если функция (2.15) $\alpha(\vec{x}) \neq 0$ в области D, то задача Коши (2.5), (2.6) преобразуется к задаче Коши вида (2.19), (2.20).

Рассмотрим случай, когда $\alpha(\vec{x}) = 0$ на всей поверхности Γ или в отдельных точках поверхности. В этом случае деление уравнения на α невозможно, так как в коэффициентах уравнения (2.16) возникают особенности. Уравнение (2.14) выполняется во всех точках области D, в частности и в точках поверхности Γ, так как каждая точка поверхности Γ является внутренней для области D.

В связи с этим рассмотрим уравнение (2.14) на поверхности Γ, то есть при $t = 0$:

$$\bar{L}(u)|_{\Gamma} = \bar{L}(u)|_{t=0} = \alpha|_{\Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B_0 \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} + \sum_{i=1}^{n-1} B_i \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial t}\bigg|_{t=0} + L_y(u)\big|_{t=0} = G(\vec{y}, 0)$$

Учитывая соотношение

$$\alpha|_{\Gamma} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}\bigg|_{\Gamma} = 0 \qquad (2.21)$$

и условия (2.20), получаем необходимое условие разрешимости задачи Коши (2.5), (2.6):

$$B_0(\vec{y}, 0)\Psi_1(\vec{y}) + \sum_{i=1}^{n-1} B_i(\vec{y}, 0) \frac{\partial \Psi_1(\vec{y})}{\partial y_i} + L_y\big(\psi_0(\vec{y})\big) = G(\vec{y}, 0). \qquad (2.22)$$

Если соотношение (2.22), связывающее начальные функции ψ_0, ψ_1 из начальных условий (2.20) не выполнено, то задача Коши (2.5), (2.6) заведомо неразрешима.

Как видно, условие (2.21) совпадает с уравнением характеристических поверхностей (1.61). Поэтому выполнение условия (2.21) означает, что поверхность Γ, задаваемая уравнением (2.2), является характеристической поверхностью уравнения (2.1).

Если условие (2.21) выполняется в отдельных точках поверхности Γ, то это означает, что поверхность Γ в этих точках касается некоторой характеристической поверхности уравнения (2.1). Суммируя приведенные рассуждения, заключаем, что если поверхность Γ, на которой заданы начальные условия (2.6), совпадает с характеристической поверхностью исходного уравнения (2.1) или касается ее, то задача Коши (2.5), (2.6) требует учета дополнительных условий разрешимости (2.22).

Определение 2.2. Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенная в области $D \in R^n$, называется аналитической функцией в окрестности точки $\vec{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D$, если существует окрестность U_{x_0} точки $\vec{x}_0$, внутри которой функция $f(\vec{x})$ представима в виде ряда Тейлора

$$f(\vec{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=m} f_\alpha (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} (x_2 - x_2^0)^{\alpha_2} \dots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n},$$

который сходится абсолютно в области U_{x_0}. Функция называется аналитической в области D, если она аналитична в окрестности любой точки области. Обозначим через $C^A(D)$ линейное пространство всех аналитических функций в области D.

Обратимся к задаче Коши (2.19), (2.20) для уравнения типа Ковалевской и сформулируем теорему единственности и локальной разрешимости.

Теорема 2.1. Теорема Ковалевской. Если коэффициенты уравнения (2.19) b_{ij}, b_0, b_i, c_i, $c, \bar{f} \in C^A(\Omega)$, то есть являются аналитическими функциями по переменным $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, t$, а начальные функции ψ_0, $\Psi_1 \in C^A(\gamma)$, то есть являются аналитическими функциями по переменным $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$, тогда для любой точки $\vec{y}_0 \in \gamma$ существует окрестность $\Omega_{y_0} \subset \Omega$, в которой решение задачи Коши (2.19), (2.20) существует, притом единственное в пространстве аналитических функций, то есть $u \in C^A(\Omega_{y_0})$.

Заметим, что теорема Ковалевской гарантирует существование локального решения задачи в достаточно малой окрестности поверхности γ. Вопрос существования глобального решения во всей наперед заданной области Ω остается открытым и требует дополнительных исследований.

Замечание 2.1. Теорема Ковалевской справедлива также для задачи Коши для уравнения первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + au = f \quad \text{в области } \Omega,$$

$$u|_{t=0} = \psi_0(\vec{y}),$$

и для задачи Коши для систем уравнений первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{(1)} \frac{\partial u}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{n-1} b_i^{(1)} \frac{\partial v}{\partial y_i} + c_1^{(1)} u + c_2^{(1)} v = f_1,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{(2)} \frac{\partial u}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{n-1} b_i^{(2)} \frac{\partial v}{\partial y_i} + c_1^{(2)} u + c_2^{(2)} v = f_2,$$

$$u|_{t=0} = \psi_1(\vec{y}), \qquad v|_{t=0} = \psi_2(\vec{y}),$$

и для более сложных систем.

1.2.2. О корректной постановке задачи Коши

Учитывая общую постановку задачи Коши в виде (2.5), (2.6), сформулируем задачу Коши для уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными, то есть в пространстве R^2:

$$L(u) \equiv a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f \quad \text{в } D, \qquad (2.23)$$

$$u|_{(x,y)\in\Gamma} = \phi(x,y), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{(x,y)\in\Gamma} = \psi(x,y), \qquad (2.24)$$

где D - плоская область в R^2; Γ - линия внутри области D, $\Gamma \in C^2$; ϕ, ψ заданные функции на линии Γ (см. рисунок 2.3).

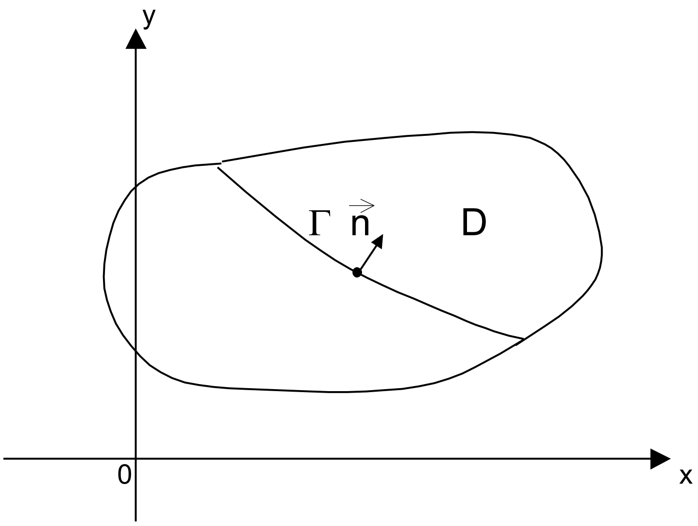


Рисунок 2.3.

Для строгой математической постановки задачи (2.23), (2.24) необходимо ввести следующие пространства функций: $V_1(\Gamma)$ - пространство начальных функций ϕ; $V_2(\Gamma)$ - пространство начальных функций ψ; $V(D)$ - пространство функций u, в котором отыскивается решение задачи (2.23), (2.24). Для классических решений $V(D) \subset C^2(D)$.

Будем предполагать, что пространства V_1, V_2, V являются метрическими пространствами, то есть наделены расстояниями $\rho_1(\phi_1,\phi_2)$, $\rho_2(\psi_1,\psi_2)$, $\rho(u_1,u_2)$ между двумя функциями соответственно в V_1, V_2, V. В случае нормированных линейных пространств

$\rho_1(\phi_1, \phi_2) = \|\phi_1 - \phi_2\|_{V_1}$, $\rho_2(\psi_1, \psi_2) = \|\psi_1 - \psi_2\|_{V_2}$, $\rho(u_1, u_2) = \|u_1 - u_2\|_V$, где $\|f\|_W$ - норма в нормированном пространстве W.

Определение 2.3. Рассмотрим две задачи Коши с различными начальными функциями:

$$L(u_i) = f,$$

$$u_i|_\Gamma = \phi_i, \quad \left.\frac{\partial u_i}{\partial \vec{n}}\right|_\Gamma = \psi_i, \quad i = 1,\ 2.$$

Решение задачи Коши (2.23), (2.24) непрерывно зависит в пространстве V от начальных функций $\phi \in V_1$, $\psi \in V_2$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из неравенств $\rho_1(\phi_1, \phi_2) < \delta$, $\rho_2(\psi_1, \psi_2) < \delta$ следует неравенство $\rho(u_1, u_2) < \varepsilon$.

Определение 2.4. Задача Коши (2.23), (2.24) поставлена корректно в пространствах V_1, V_2, V, если выполнены три условия корректности:

- для любых начальных функций $\phi \in V_1$, $\psi \in V_2$ существует решение задачи $u \in V$;
- для любых начальных функций $\phi \in V_1$, $\psi \in V_2$ решение единственно в пространстве V;
- решение задачи $u \in V$ непрерывно зависит от начальных функций $\phi \in V_1$, $\psi \in V_2$.

Если не выполнено хотя бы одно из условий корректности, то задача называется некорректно поставленной. Если же не выполнено третье условие корректности, то задача Коши называется неустойчивой по начальным данным.

1.2.3. Примеры некорректно поставленных задач Коши

Задача Коши для гиперболического уравнения с начальными условиями на характеристике. На плоскости R^2 рассмотрим простейшее гиперболическое уравнение (1.79), для которого два семейства координатных прямых линий $x = C_1$, $y = C_2$ являются характеристиками. Выберем характеристическую линию $\Gamma(y = 0)$ и поставим для нее задачу Коши в области $D = R^2$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x, y) \quad \text{в области } R^2, \tag{2.25}$$

$$u|_{y=0} = \phi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{2.26}$$

где $f(x, y) \in C(R^2)$; $\phi(x)$, $\psi(x) \in C^1(R^1)$.

Предположим, что задача (2.25), (2.26) имеет решение u, обладающее непрерывной смешанной производной u_{xy} в области R^2. Так как линия $y=0$ принадлежит области, то уравнение (2.25) должно выполняться и на линии Γ, то есть

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{y=0} = f(x,\ 0).$$

Учитывая второе начальное условие (2.26), получаем необходимое условие разрешимости задачи

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = f(x,\ 0). \tag{2.27}$$

Если условие (2.27) не выполнено, то задача (2.25), (2.26) не имеет решений.

Построим решение задачи (2.25), (2.26), предполагая, что условие (2.27) выполнено. Воспользуемся общим решением (1.80) уравнения (2.25), где функции $C_1(x),\ C_2(y)$ определим из начальных условий.

Удовлетворим первому начальному условию (2.26), тогда

$$u|_{y=0} = C_1(x) + C_2(0) = \phi(x).$$

Положим $C_1(x) = \phi(x), \quad C_2(0) = 0$.

Удовлетворим второму начальному условию (2.26), тогда

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = C_2{}'(0) + \int_0^x f(\xi, 0)d\xi = \psi(x).$$

Учитывая соотношение (2.27), получим соотношение $C_2{}'(0) = \psi(0)$. Таким образом, произвольная функция $C_2(y)$ удовлетворяет условиям $C_2(0) = 0$, $C_2{}'(0) = \psi(0)$.

Общий вид такой функции

$$C_2(y) = y\big(\psi(y) + C(y)\big),$$

где произвольная функция $C(y) \in C^1(R^1)$, $C(0) = 0$.

Таким образом, получено решение задачи (2.25), (2.26)

$$u(x,y) = \phi(x) + y\big(\psi(y) + C(y)\big) + \int_0^y \left(\int_0^x f(\xi,\eta)d\xi\right)d\eta,$$

которое не единственно в силу произвольности функции $C(y)$.

Рассмотренный пример показывает, что задача Коши с начальными условиями на характеристике поставлена некорректно, так как не выполняется первое или второе условие корректности из определения 2.4.

Задача Коши для параболического уравнения с начальными условиями на характеристике. На плоскости R^2 с координатами (x,t) рассмотрим параболическое уравнение (1.73) канонического вида $u_t = \alpha u_{xx} + \beta u_x + \gamma u + f$, для которого координатные линии $t = C$ являются характеристиками. Выберем характеристическую линию $\Gamma(t = 0)$ и поставим для нее задачу Коши в области R^2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u + f \quad \text{в области } R^2, \tag{2.28}$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{2.29}$$

Предположим, что классическое решение задачи (2.28), (2.29) существует для области R^2. Так как линия $t = 0$ принадлежит области, то уравнение (2.28) должно выполняться и на линии Γ, то есть

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u + f\right)\right|_{t=0}.$$

Учитывая начальные условия (2.29), получаем соотношение

$$\psi(x) = \alpha(x,0)\phi''(x) + \beta(x,0)\phi'(x) + \gamma(x,0)\phi(x) + f(x,0).$$

Это условие показывает, что начальная функция ψ выражается через функцию ϕ и коэффициенты уравнения (2.28), то есть функция ψ не может быть произвольной. Это означает, что второе начальное условие (2.29) – лишнее.

В результате приходим к постановке задачи Коши для параболического уравнения с одним начальным условием на характеристике:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u + f, \\ u|_{t=0} = \phi(x),\end{gathered} \tag{2.30}$$

в то время как задача Коши в постановке (2.28), (2.29) некорректно поставлена в случае произвольной функции ψ.

Пример Адамара задачи Коши для эллиптического уравнения.

На плоскости R^2 рассмотрим эллиптическое уравнение Лапласа (1.83), для которого поставим задачу Коши с начальными условиями на линии $\Gamma(y = 0)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{в области } D = \{-\infty < x < \infty, |y| < T\}, \tag{2.31}$$

$$u|_{y=0} = \phi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{2.32}$$

Уравнение (2.31) является уравнением типа Ковалевской, поэтому в случае аналитических функций ϕ и ψ на основании теоремы Ковалевской заключаем, что задача (2.31), (2.32) имеет единственное аналитическое решение в некоторой достаточно малой окрестности линии Γ. Таким образом, первые два условия корректности выполнены (по крайней мере, локально). Исследуем третье условие корректности, то есть условие о непрерывной зависимости от начальных функций. Для этого рассмотрим две задачи Коши с различными начальными условиями специального вида:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0,$$

$$u_1|_{y=0} = \phi_1 = 0, \qquad u_2|_{y=0} = \phi_2 = 0, \tag{2.33}$$

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi_1 = 0, \qquad \left.\frac{\partial u_2}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi_2 = e^{-\sqrt{n}} cos(nx),$$

где n - фиксированный положительный параметр.

Решения данных задач определяются выражениями

$$u_1 = 0, \qquad u_2 = \frac{1}{n} e^{-\sqrt{n}} cos(nx)\, sh(ny).$$

Введем пространства функций $V_1 = V_2 = C_0^A(R^1)$, $V = C_0^A(D)$, где C_0^A - пространство ограниченных аналитических функций с соответствующими метрическими расстояниями:

$$\rho_1(\phi_1, \phi_2) = \rho_2(\phi_1, \phi_2) = \|\phi_1 - \phi_2\|_C = \sup_{-\infty<x<\infty} |\phi_1(x) - \phi_2(x)|,$$
$$\rho(u_1, u_2) = \|u_1 - u_2\|_C = \sup_{(x,y)\in D} |u_1(x,y) - u_2(x,y)|. \tag{2.34}$$

Согласно определению 2.3, применительно к задачам (2.33), по $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0$, что если $\rho_1(\phi_1,\phi_2) = 0 < \delta$ и $\rho_2(\psi_1,\psi_2) = e^{-\sqrt{n}} < \delta$ (при $n > (ln\,\delta)^2$), тогда должно выполняться неравенство

$$\rho(u_1,u_2) = \frac{1}{n}e^{-\sqrt{n}}sh(nT) < \varepsilon. \tag{2.35}$$

Очевидно, что неравенство (2.35) не выполнено при достаточно больших значениях параметра n, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}e^{-\sqrt{n}}sh(nT) = \infty$.

Таким образом, задача Коши для эллиптического уравнения (2.31), (2.32) поставлена некорректно, так как не выполнено третье условие корректности из определения (2.4).

1.2.4. Задача Коши для уравнения колебаний струны

Физическая интерпретация. Поставим задачу Коши для однородного уравнения поперечных колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{в } D = \{-\infty < x < \infty, |t| < T\}, \tag{2.36}$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \qquad -\infty < x < \infty, \tag{2.37}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \qquad -\infty < x < \infty, \tag{2.38}$$

где $a = \sqrt{\frac{N}{\rho}} - const$; N - натяжение струны; ρ - линейная плотность струны; $\phi(x) \in V_1 = C^2(R^1)$; $\psi(x) \in V_2 = C^1(R^1)$; классическое решение задачи $u(x,t) \in V = C^2(D)$, t - временная переменная, x - пространственная переменная.

Задача (2.36) – (2.38) используется для математического моделирования процесса малых колебаний бесконечной струны, натянутой вдоль оси Ox. Струна считается идеально тонкой, график которой в момент времени t описывается уравнением $u = u(x,\ t)$, то есть $u(x,\ t)$ - отклонение точки струны с координатой x от оси Ox (см. рисунок 2.4). Начальное условие (2.37) $u = \phi(x)$ задает график струны в начальный момент времени $t = 0$, а функция $\psi(x)$ из условия (2.38) задает начальную скорость струны в точке с координатой x.

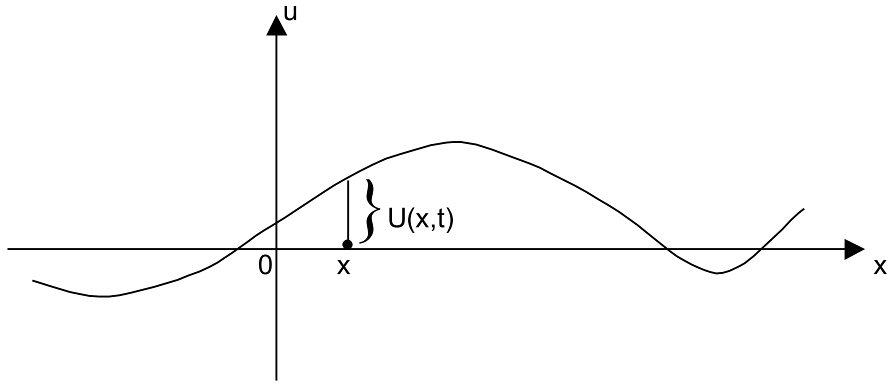


Рисунок 2.4.

Понятно, что с изменением временного параметра t график струны изменяется, то есть наблюдается процесс колебаний.

Формула Даламбера. Для отыскания решения задачи (2.36) – (2.38) применим метод характеристик. Метод состоит в приведении исходного уравнения (2.36) к каноническому виду и нахождении общего решения. Для гиперболического уравнения (2.36) на основании характеристических уравнений (1.39), (1.40), найдем два семейства характеристик на плоскости Oxt:

$$x + at = C_1, \qquad x - at = C_2.$$

Производя замену переменных

$$\xi = x + at, \qquad \eta = x - at,$$

приведем уравнение (2.36) к каноническому виду $u_{\xi\eta} = 0$. Из общего решения (1.82) имеем $u = C_1(\xi) + C_2(\eta)$. Откуда общее решение однородного уравнения колебаний струны (2.36)

$$u = C_1(x + at) + C_2(x - at). \qquad (2.39)$$

Определим неизвестные функции $C_1(\cdot),\ C_2(\cdot)$ из начальных условий. Подставив (2.39) в условие (2.37), получим соотношение

$$C_1(x) + C_2(x) = \phi(x). \qquad (2.40)$$

Аналогично, подставляя (2.39) в условие (2.38), получаем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = aC_1{}'(x) - aC_2{}'(x) = \psi(x), \qquad (2.41)$$

где $C'_{1,2}(x)$ - производные по переменной x.

Интегрируя равенство (2.41) по отрезку (x_0, x), получаем второе соотношение:

$$C_1(x) - C_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\tau)\, d\tau + \dot{C}. \qquad (2.42)$$

Разрешим систему алгебраических уравнений (2.40), (2.42), тогда

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\left(\phi(x) + \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\tau) d\tau + C\right),$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2}\left(\phi(x) - \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\tau) d\tau - C\right).$$

После подстановки найденных функций в (2.39) получим формулу Даламбера для решения исходной задачи Коши:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\phi(x+at) + \phi(x-at)\big) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau)\, d\tau. \qquad (2.43)$$

Заметим, что найденное решение является классическим, так как $u \in C^2(D)$ для $\forall \phi \in V_1, \psi \in V_2$.

В случае неоднородного уравнения колебаний струны решение задачи Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t),$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$$

определяется формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\phi(x+at) + \phi(x-at)\big) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau$$

где $\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \in C(R^2)$.

Корректность задачи Коши. Процедура построения решения задачи (2.36) – (2.38) показывает, что любое классическое решение задачи Коши для уравнения колебаний струны представимо формулой Даламбера (2.43). Отсюда следует существование и единственность решения задачи в пространстве V.

Утверждение 2.1. Решение задачи Коши (2.36) – (2.38) в пространстве V с метрикой (2.34) непрерывно зависит от начальных функций $\phi \in V_1$, $\psi \in V_2$.

Доказательство. Рассмотрим две задачи (2.36)-(2.38) с различными начальными условиями:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = 0, \ u_i|_{t=0} = \phi_i, \ \left.\frac{\partial u_i}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_i.$$

Пусть начальные функции мало различаются, то есть

$$|\phi_1(x) - \phi_2(x)| < \delta, \qquad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta. \tag{2.44}$$

Оценим разность решений $u_1 - u_2$ в области D. Представляя решения задач формулой Даламбера (2.43) и учитывая (2.44), получаем оценку

$$|u_1 - u_2| \leq \frac{1}{2}|\phi_1(x+at) - \phi_2(x+at)| + \frac{1}{2}|\phi_1(x-at) - \phi_2(x-at)| +$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-a|t|}^{x+a|t|}|\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)|d\tau \leq \frac{1}{2}\delta + \frac{\delta}{2a}\int_{x-a|t|}^{x+a|t|}d\tau = \delta(1+|t|) \leq \delta(1+T).$$

Выберем δ из интервала $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{1+T}$, тогда $|u_1 - u_2| < \varepsilon$ в области D.

Таким образом, для $\forall\varepsilon > 0$ найдено $\delta > 0$ $\left(0 < \delta < \frac{\varepsilon}{1+T}\right)$ такое, что если $\rho_1(\phi_1,\phi_2) < \delta$, $\rho_2(\psi_1,\psi_2) < \delta$, тогда $\rho(u_1,u_2) < \varepsilon$.

Показано, что задача Коши для уравнения колебаний струны поставлена корректно в соответствии с определением 2.4.

Замечание 2.2. При математических исследованиях часто в определение непрерывной зависимости от начальных функций включают непрерывную зависимость от правой части $f(x,t)$ исходного уравнения, вводя пространство правых частей $(f \in V_3)$ с соответствующей метрикой.

1.2.5. Метод интегральных преобразований для задачи Коши

Интегральные преобразования. Рассмотрим пару линейных функциональных пространств H_1 и H_2. Пусть A - линейный оператор, преобразующий функции f, принадлежащие пространству H_1, в функции $\hat{f}$, принадлежащие пространству H_2, то есть $A: H_1 \to H_2$. Имеем соотношения $\hat{f} = A(f)$, $f = A^{-1}(\hat{f})$, где A^{-1} - обратный оператор. В случае, если операторы A и A^{-1} являются интегральными, тогда оператор A называется интегральным преобразованием, оператор A^{-1} - обратным интегральным преобразованием, а функция $\hat{f}$ называется интегральным преобразованием функции f.

Приведем примеры интегральных преобразований.

Преобразование Фурье. Пусть $f(x) \in H_1 = L_2(R^1)$, где $L_2(R^1)$ - пространство функций, для которых $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$.

Интегральное преобразование Фурье определяется формулой

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx, \quad \hat{f}(\lambda) \in H_2 = L_2(R^1), \quad -\infty < \lambda < \infty, \quad i = \sqrt{-1}. \tag{2.45}$$

Имеет место обратное преобразование:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \quad f(x) \in L_2(R^1), \quad -\infty < x < \infty.$$

Косинус-преобразование Фурье.

$$\hat{f}_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(\lambda x)\, dx, \quad \hat{f}_c(\lambda) \in L_2(R_+^1), \quad 0 \le \lambda \le \infty,$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}_c(\lambda) \cos(\lambda x)\, d\lambda, \quad f(x) \in L_2(R_+^1), \quad 0 \le x \le \infty.$$

Синус-преобразование Фурье.

$$\hat{f}_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(\lambda x)\, dx, \quad \hat{f}_s(\lambda) \in L_2(R_+^1), \quad 0 \le \lambda \le \infty,$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}_s(\lambda) \sin(\lambda x)\, d\lambda, \quad f(x) \in L_2(R_+^1), \quad 0 \le x \le \infty.$$

Двумерное преобразование Фурье.

$$\boldsymbol{\hat{f}(\alpha,\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{i(\alpha x + \beta y)}\, dxdy}, \quad \boldsymbol{f(x,y) \in L_2(R^2)},$$

(2.46)

$$\boldsymbol{f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha,\beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)}\, d\alpha d\beta}, \quad \boldsymbol{\hat{f}(\alpha,\beta) \in L_2(R^2)}.$$

Решение задачи Коши для параболического уравнения. Рассмотрим задачу Коши (2.30) для однородного параболического уравнения с постоянными коэффициентами $\alpha,\ \beta,\ \gamma$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u \quad \text{в} \quad D^+ = (0 < t < \infty) \times (-\infty < x < \infty), \tag{2.47}$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \qquad -\infty < x < \infty, \tag{2.48}$$

где $\phi(x) \in V_1 = C_o(R^1)$, $C_o(R^1)$ - пространство ограниченных непрерывных функций на R^1; $u(x,t) \in V = C^2(D^+) \cap C(\bar{D}^+)$; $C(\bar{D}^+)$ - пространство непрерывных функций на полуплоскости $\bar{D}^+$.

Задачу (2.47), (2.48) решим методом интегральных преобразований.

Применим преобразование Фурье (2.45) к функции $u(x,t)$ по переменной $x \in R^1$, получим функцию по переменной λ:

$$\hat{u}(\lambda,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{i\lambda x} dx, \quad -\infty < \lambda < \infty. \tag{2.49}$$

Имеет место обратное преобразование Фурье:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\lambda,t) e^{-i\lambda x} d\lambda, \quad -\infty < x < \infty. \tag{2.50}$$

Далее применим преобразование Фурье к уравнению (2.47), умножая его на ядро преобразования $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\lambda x}$ и интегрируя по переменной x. В результате

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{i\lambda x} dx - \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{i\lambda x} dx -$$

$$- \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{i\lambda x} dx - \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{i\lambda x} dx = 0. \tag{2.51}$$

Используя (2.49), получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{i\lambda x} dx = \frac{\partial \hat{u}(\lambda,t)}{\partial t}.$$

Второе и третье слагаемые интегрируем по частям:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u(x,t) e^{i\lambda x} \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} - i\lambda \hat{u}(\lambda,t),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - i\lambda u(x,t) \right) e^{i\lambda x} \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} - \lambda^2 \hat{u}(\lambda,t).$$

Естественно предположить, что при $x \to \pm\infty$ функция $u(x,t)$ и производная $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ стремятся к нулю. В результате получим формулы

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{i\lambda x} dx = -i\lambda \hat{u}(\lambda,t),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e^{i\lambda x}dx = -\lambda^2\hat{u}(\lambda,t).$$

Равенство (2.51) преобразуется к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $\hat{u}(x,t)$:

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial t} + (\alpha\lambda^2 + i\lambda\beta - \gamma)\hat{u} = 0. \tag{2.52}$$

Применим преобразование Фурье к начальному условию (2.48), умножая его на ядро и интегрируя по переменной x. В результате получим начальное условие

$$\hat{u}|t = 0 = \hat{\phi}(\lambda), \tag{2.53}$$

где
$$\hat{\phi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(y)e^{i\lambda y}dy. \tag{2.54}$$

Задача (2.52), (2.53) представляет собой задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Запишем решение этой задачи в виде
$\hat{u}(\lambda,t) = \hat{\phi}(\lambda)e^{-(\alpha\lambda^2+i\beta\lambda-\gamma)t}$.

Применив обратное преобразование Фурье (2.50), вычислим искомую функцию $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\phi}(\lambda)\,exp(-\alpha\lambda^2 t - i\beta\lambda t - i\lambda x + \gamma t)\,d\lambda. \tag{2.55}$$

Подставим выражение (2.54) в (2.55) и поменяем порядок интегралов, тогда

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(y)\left[\frac{e^{\gamma t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}exp(-\alpha\lambda^2 t - i\beta\lambda t - i\lambda x + i\lambda y)\,d\lambda\right]dy.$$

Вычислим внутренний интеграл

$$G(x-y,t) \equiv \frac{e^{\gamma t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}exp(-\alpha\lambda^2 t - i\beta\lambda t - i\lambda x + i\lambda y)\,d\lambda =$$

$$= \frac{e^{\gamma t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}exp(-\alpha t\lambda^2)\cos\lambda\,(x - y + \beta t)d\lambda = \frac{e^{\gamma t}}{\sqrt{4\pi\alpha t}}exp\left\{-\frac{(x-y+\beta t)^2}{4\alpha t}\right\}.$$

Таким образом, решение задачи (2.47), (2.48) представлено в виде интеграла

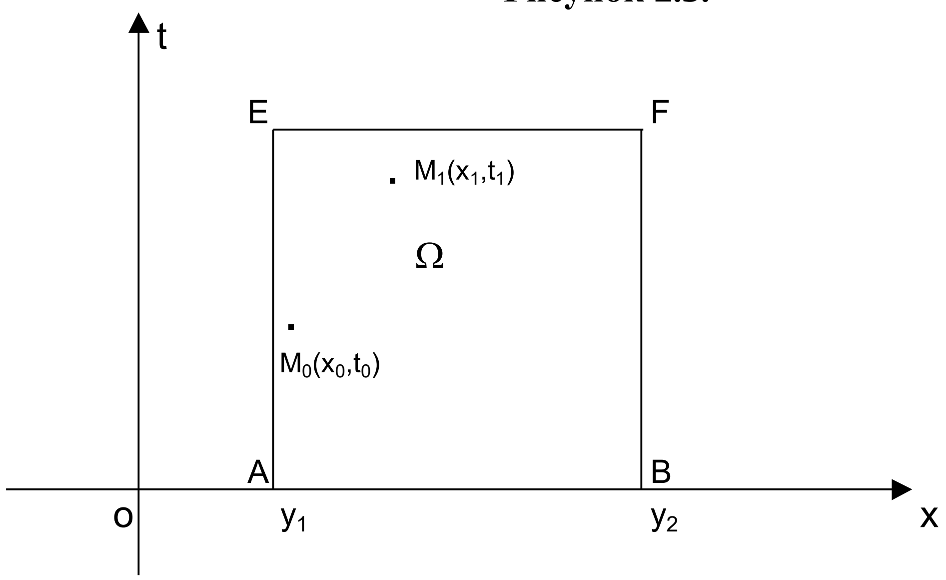
$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) G(x-y,t) dy. \qquad (2.56)$$

где $G(x-y,t)$ - фундаментальное решение (1.90) уравнения (1.87).

1.2.6. Принцип максимума и минимума для уравнения теплопроводности

На плоскости Oxt рассмотрим открытую ограниченную прямоугольную область $\Omega = (0 < t < T) \times (y_1 < x < y_2)$, область $\tilde{\Omega} = (0 < t \leq T) \times \times (y_1 < x < y_2)$ и замкнутую область $\bar{\Omega} = (0 \leq t \leq T) \times \times (y_1 \leq x \leq y_2)$ (см. рисунок 2.5). Угловые точки прямоугольника обозначим буквами A, B, E, F и рассмотрим ломаную линию $l = EA \cup AB \cup BF$, состоящую из трех отрезков прямых линий, включающих угловые точки, $\bar{\Omega} = \tilde{\Omega} \cup l$.

Рисунок 2.5.



В области $\tilde{\Omega}$ зададим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (2.57)$$

Оказывается, что решения уравнения теплопроводности обладают экстремальными свойствами, вытекающими из следующей теоремы.

Теорема 2.2. Принцип максимума и минимума. Если функция $u(x,t) \in C^2(\tilde{\Omega}) \cap C(\bar{\Omega})$ и удовлетворяет уравнению теплопроводности (2.57) в области $\tilde{\Omega}$, тогда функция u достигает максимального и минимального значений на линии l, то есть

$$\min_{(x,t)\in l} u(x,t) \le \underset{(x,t)\in \tilde{\Omega}}{u(x,t)} \le \max_{(x,t)\in l} u(x,t). \qquad (2.58)$$

Доказательство. Доказательство проведем от противного для максимума. Предположим, что максимум достигается в точке $M_0 = (x_0, t_0) \in \tilde{\Omega}$. Обозначим $m = \max\limits_{(x,t)\in l} u(x,t)$, тогда $u(x_0, t_0) = m + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

Построим вспомогательную функцию

$$v(x,t) = u(x,t) + k(t_0 - t), \qquad (2.59)$$

где $k - const, \quad 0 < k < \frac{\varepsilon}{2T}$.

Вычислим

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = m + \varepsilon.$$

Оценим

$$\max_{(x,t)\in l} v \le \max_{(x,t)\in l} u + k \max_{(x,t)\in l} |t_0 - t| < m + \frac{\varepsilon}{2},$$

так как $|t_0 - t| \le T$.

Эти соотношения означают, что функция v достигает максимума в некоторой точке $M_1 = (x_1, t_1) \in \tilde{\Omega}$, то есть при $y_1 < x_1 < y_2,\ 0 < t_1 \le T$.

Рассмотрим различные случаи расположения точки M_1:

1) $M_1 \in \Omega = (y_1 < x_1 < y_2, 0 < t_1 < T)$.

Из теории экстремума для внутренней точки максимума следует, что

$$\frac{\partial v(M_1)}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v(M_1)}{\partial x^2} \le 0; \qquad (2.60)$$

2) $M_1 \in EF \ (y_1 < x_1 < y_2, t = T)$.

Так как точка максимума M_1 граничная, то

$$\frac{\partial v(M_1)}{\partial t} \ge 0, \qquad \frac{\partial^2 v(M_1)}{\partial x^2} \le 0. \qquad (2.61)$$

Вычислим производные функции (2.59) в точке M_1 и воспользуемся неравенствами (2.60), (2.61), тогда

$$\frac{\partial v(M_1)}{\partial t} = \frac{\partial u(M_1)}{\partial t} - k \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u(M_1)}{\partial t} \ge k > 0,$$

$$\frac{\partial^2 v(M_1)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(M_1)}{\partial x^2} \le 0.$$

По условию теоремы в точке M_1 для функции u выполнено уравнение (2.57). С другой стороны, левая часть уравнения (2.57) строго больше нуля, а правая часть меньше или равна нулю. Получено противоречие. Таким образом, максимум функции u достигается на линии l. Для минимума теорема доказывается аналогично после замены функции u на функцию u.

Приведем некоторые следствия из принципа максимума и минимума.

Следствие 2.1. Пусть функции $u_1, u_2 \in C^2(\tilde{\Omega}) \cap C(\bar{\Omega})$ и удовлетворяют уравнению теплопроводности (2.57) в области $\tilde{\Omega}$. Если $u_2(x,t) \ge u_1(x,t)$ для любой точки $(x,t) \in l$, то $u_2(x,t) \ge u_1(x,t)$ для любой точки $(x,t) \in \bar{\Omega}$.

Доказательство. Построим вспомогательную функцию $u = u_2 - u_1$, которая удовлетворяет всем условиям теоремы 2.2, тогда из левого неравенства (2.58) имеем

$$\underset{(x,t)\in\bar{\Omega}}{u(x,t)} \ge \min_{(x,t)\in l} u(x,t) \ge 0,$$

так как $u(x,t) \ge 0$ для точки $(x,t) \in l$.

Таким образом, $u_2(x,t) - u_1(x,t) \ge 0$ для любой точки $(x,t) \in \bar{\Omega}$.

Легко доказать следующие следствия.

Следствие 2.2. Пусть функции $u_1, u_2, u_3 \in C^2(\tilde{\Omega}) \cap C(\bar{\Omega})$ и удовлетворяют уравнению (2.57) в области $\tilde{\Omega}$. Если $u_3(x,t) \ge u_2(x,t) \ge u_1(x,t)$, $\forall (x,t) \in l$, то $u_3(x,t) \ge u_2(x,t) \ge u_1(x,t)$, $\forall (x,t) \in \bar{\Omega}$.

Следствие 2.3. Пусть функции $u, v \in C^2(\tilde{\Omega}) \cap C(\bar{\Omega})$ и удовлетворяют уравнению (2.57) в области $\tilde{\Omega}$. Если $|u(x,t)| \le v(x,t), \quad \forall (x,t) \in l$, то $|u(x,t)| \le v(x,t), \quad \forall (x,t) \in \bar{\Omega}$.

Следствие 2.4. Пусть функция $u \in C^2(\tilde{\Omega}) \cap C(\bar{\Omega})$ и удовлетворяет уравнению (2.57) в области $\tilde{\Omega}$. Если $|u(x,t)| \le \varepsilon, \quad \forall (x,t) \in l$, $\varepsilon - const$, то $|u(x,t)| \le \varepsilon, \forall (x,t) \in \bar{\Omega}$.

1.2.7. Корректность задачи Коши для уравнения теплопроводности

Физическая интерпретация. Рассмотрим задачу (2.47), (2.48) в частном случае, когда $\alpha = a^2, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$. Получим классическую задачу Коши для уравнения теплопроводности в стержне:

$$L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ в } D^+, \qquad (2.62)$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \qquad -\infty < x < \infty, \qquad (2.63)$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$; k - коэффициент теплопроводности; c - удельная теплоемкость; ρ - плотность материала стержня; t - временная переменная; x - пространственная переменная; $\phi(x) \in V_1 = C_o(R^1)$; классическое решение задачи $u(x,t) \in V = C^2(D^+) \cap C_o(\bar{D}^+)$, $C_o(\bar{D}^+)$- пространство ограниченных непрерывных функций на полуплоскости $\bar{D}^+$.

Задача (2.62), (2.63) описывает изменение температуры тонкого бесконечного стержня, который расположен вдоль оси Ox (см. рис. 2.6).

При этом функция $u(x,t)$ задает температуру стержня в сечении x в момент времени t. Начальное условие (2.63) означает, что темпе-ратура в начальный момент времени $t = 0$ известна в каждом сечении стержня x и равна $\phi(x)$.

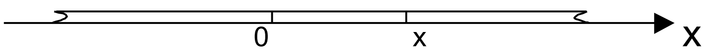


Рисунок 2.6.

Для корректности поставленной задачи должны быть выполнены следующие требования: существование решения, единственность решения и непрерывная зависимость решения от начальной функции ϕ в выбранных пространствах V_1 и V.

Существование решения. Решение задачи (2.62), (2.63) для $\forall\phi \in V_1$ определяется интегралом вида (2.56):

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) G(x-y,t) dy, \qquad (2.64)$$

где $G(x-y,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}D} exp\left(-\frac{(x-y)^2}{D^2}\right)$; $D = 2a\sqrt{t}$.

Интеграл (2.64) называется интегралом Пуассона.

Необходимо провести обоснование решения (2.64), то есть показать, что функция (2.64) принадлежит пространству V, удовлетворяет уравнению (2.62) и удовлетворяет начальному условию (2.63), которое выполняется в предельном смысле, то есть

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \phi(x). \tag{2.65}$$

Легко показать, что функция $G(x-y,\ t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности (2.62) (См. формулы (1.89)), а функция (2.64) любое число раз дифференцируема под знаком интеграла в подобласти D^+ [1]. Для функции G подробные выкладки проделаны для общего параболического уравнения с постоянными коэффициентами (1.87). В результате

$$L\big(u(x,t)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)\, L\big(G(x-y,t)\big)dy = 0.$$

Заметим, что решение вида (2.64) является ограниченным. Действительно, в силу ограниченности функции $\phi(x)\quad (|\phi(x)| < C)$ следует

$$|u(x,t)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(y)| G(x-y,t)\, dy \le C\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}D} e^{-\frac{(x-y)^2}{D^2}} dy =$$

$$= \left[\frac{x-y}{D} = \xi\right] = \frac{C}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi = C.$$

Единственность решения.

Теорема 2.3. Если существует ограниченное классическое решение задачи Коши для уравнения теплопроводности (2.62), (2.63), то есть $u \in V$, тогда решение u единственно в пространстве V.

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Пусть существуют два решения $u_1, u_2 \in V$. В силу ограниченности решений $|u_j| \le C_j$ в области D^+, где $C_j - const$. Образуем вспомогательную функцию $w = u_2 - u_1$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{в} \quad D^+, \tag{2.66}$$

$$w|_{t=0} = 0. \tag{2.67}$$

Функция w ограничена, так как $|w| \le |u_1| + |u_2| \le C_1 + C_2 = C$.

Построим вспомогательную функцию $v(x,t) = \frac{2C}{b^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right)$, $b - const$, $b > 0$, являющуюся решением уравнения (2.66).

Сравним функции w и v в области $\bar{\Omega}_b = (0 \le t \le T) \times (-b \le x \le b)$. В силу условия (2.67) $|w| \le v$ при $t = 0$. Сравним функции w и v на линиях $x = \pm b$. С одной стороны $|w| \le C$, а с другой - $v|_{x=+b} = \; = C\left(1 + 2\frac{a^2 t}{b^2}\right) \ge C$. В результате $|w| \le v$ при $x = \pm b$. Таким образом, $|w| \le v$ на линии l, определенной в теореме 2.2.

Функции w, v удовлетворяют уравнению теплопроводности (2.66), поэтому, используя следствие 2.3 из принципа максимума, получаем неравенство

$$|w(x,t)| \le v(x,t) = \frac{2C}{b^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right), \quad \forall (x,t) \in \bar{\Omega}_b.$$

В неравенстве перейдем к пределу при $b \to \infty$, тогда $|w(x,t)| = 0$. Таким образом, $u_1 \equiv u_2$.

Непрерывная зависимость решения. Рассмотрим две задачи (2.62), (2.63) с различными начальными функциями: $L(u_j) = 0$, $u_j\big|_{t=0} = \phi_j(x)$. Пусть начальные функции мало различаются, то есть $|\phi_2(x) - \phi_1(x)| \le \varepsilon$.

Представим решения задач с помощью формулы Пуассона (2.64) и оценим разность решений:

$$|u_2 - u_1| \le \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_2(y) - \phi_1(y)|\, G(x-y,t)dy \le \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t)\, dy = \varepsilon.$$

Таким образом, решения также мало различаются, то есть $|u_2 - u_1| \le \varepsilon$ в подобласти D^+, что доказывает непрерывную зависимость решения задачи от начального условия (2. 63) в метрике (2.34).

Получено, что задача Коши для уравнения теплопроводности поставлена корректно в паре пространств V_1, V.

1.2.8. Обобщенные функции

Дифференциальное исчисление и теория дифференциальных уравнений базируются на понятии производной, которая первоначально вводится в классическом смысле. При этом не всякая функция дифференцируема в каждой точке. Например, любая монотонно неубывающая функция имеет не более чем счетное число точек разрыва первого рода, в которых функция заведомо не дифференцируема в классическом смысле. В физике и разделах математики: в дифференциальных уравнениях и теории вероятностей возникает потребность расширить понятие производной, вводя обобщенную производную, с помощью которой функция, имеющая разрывы первого рода, становится дифференцируемой в точках разрыва. Как результат дифференцирования в обобщенном смысле разрывных функций возникают обобщенные функции.

Основные функции. Рассмотрим n -мерное евклидово пространство R^n. Пусть $\vec{x} \in R^n$. Зададим на пространстве R^n финитную функцию $\phi = \phi(\vec{x}) = \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^\infty(R^n)$. Функция $\phi(\vec{x})$ - финитная, если существует ограниченное открытое множество $U \subset R^n$, для которого $\phi(\vec{x}) \neq 0$ при $\vec{x} \in U,\ \phi(\vec{x}) = 0$ при $\vec{x} \in R^n \backslash U$.

Замкнутое множество $\overline{U} = Supp\phi$ называется носителем финитной функции $\phi(\vec{x})$. Обозначим линейное пространство всех финитных функций через $D(R^n)$. В пространстве $D(R^n)$ введем сходимость последовательности финитных функций $\phi_k(\vec{x})$,$k = 1,\ 2\ldots$.

Определение 2.5. Последовательность $\phi_k(\vec{x})$ сходится к финитной функции $\phi(\vec{x})$, то есть $\phi_k(\vec{x}) \underset{k\to\infty}{\to} \phi(\vec{x})$, если выполнены следующие условия:

1) $\phi_k(\vec{x}) \underset{k\to\infty}{\to} \phi(\vec{x})$ равномерно;

2) $D^\alpha\phi_k(\vec{x}) \underset{k\to\infty}{\to} D^\alpha\phi(\vec{x})$ равномерно, где $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1{}^{\alpha_1}\partial x_2{}^{\alpha_2}\ldots\partial x_n{}^{\alpha_n}}$;

3) существует ограниченное замкнутое множество $G \subset R^n$, такое что $Supp\ \phi_k \subset G$, $Supp\ \phi \subset G$.

Пространство $D(R^n)$ с указанной сходимостью будем называть пространством основных функций.

На пространстве $D(R^n)$ рассмотрим линейный функционал f, действующий на функции $\phi \in D(R^n)$, то есть $(f, \phi) \to R^1$.

Функционал f линейный, если

$$(f, \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2) = \alpha_1(f, \phi_1) + \alpha_2(f, \phi_2) \tag{2.68}$$

для $\forall\phi_1, \phi_2 \in D(R^n)$, $\alpha_1, \alpha_2 - const$.

Определение 2.6. Обобщенной функцией называется линейный непрерывный функционал f на пространстве $D(R^n)$ [5]. Функционал f непрерывный, если для любой последовательности финитных функций ϕ_k, сходящейся к финитной функции ϕ, выполнено условие

$$\lim_{k\to\infty}(f, \phi_k) = (f, \phi). \tag{2.69}$$

Линейное пространство всех обобщенных функций обозначим через $D'(R^n)$.

Регулярные обобщенные функции. Рассмотрим произвольную локально суммируемую (в частном случае непрерывную) функцию $g(\vec{x}) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданную на R^n. С помощью обычной функции $g(\vec{x})$ построим линейный функционал $g \in D'(R^n)$, определив его с помощью формулы

$$(g, \phi) = \int_{R^n} g(\vec{x})\phi(\vec{x})d\vec{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n)\phi(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n.$$

Проверим условие непрерывности (2.69):

$$\lim_{k\to\infty}(g, \phi_k) = \lim_{k\to\infty}\int_{R^n} g(\vec{x})\phi_k(\vec{x})d\vec{x} = \int_G g(\vec{x})\lim_{k\to\infty}\phi_k(\vec{x})d\vec{x} =$$

$$= \int_G g(\vec{x})\phi(\vec{x})d\vec{x} = (g, \phi).$$

Переход к пределу под знаком интеграла законен в силу равномерной сходимости последовательности функций $\phi_k(\vec{x})$. Таким образом, любую обычную функцию $g(\vec{x})$ можно рассматривать как обобщенную функцию $g \in D'(R^n)$. Такие обобщенные функции будем называть регулярными обобщенными функциями. Все остальные обобщенные функции - сингулярные обобщенные функции.

δ-функция Дирака. В качестве примера сингулярной обобщенной функции рассмотрим функционал

$$\delta_{x^0} = \delta(\vec{x} - \vec{x}^0) = \delta(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \dots x_n - x_n^0) \in D'(R^n), \tag{2.70}$$

где фиксированная точка $\vec{x}^0 \in R^n$. Функционал δ_{x^0} действует на функцию $\phi(\vec{x}) \in D(R^n)$ следующим образом:

$$(\delta_{x^0}, \phi) = \int_{R^n} \delta(\vec{x} - \vec{x}^0)\phi(x\vec{x})d\vec{x} = \phi(\vec{x}^0). \tag{2.71}$$

При $\vec{x}^0 = \vec{0}$ для обобщенной функции $\delta_0 = \delta = \delta(\vec{x})$ имеем

$$(\delta, \phi) = \int_{R^n} \delta(\vec{x})\phi(\vec{x})d\vec{x} = \phi(\vec{0}). \tag{2.72}$$

Легко показать, что функционал (2.71) линейный и непрерывный, то есть является обобщенной функцией. Обобщенная функция (2.70) называется δ - функцией Дирака.

Рассмотрим открытое множество $\Omega \subset R^n$. Будем говорить, что обобщенная функция f равна 0 на множестве Ω, если для $\forall\phi \in D(R^n)$ с носителем $Supp\phi \in \Omega$ выполнено условие $(f, \phi) = 0$.

Обозначим через Ω_{max} наибольшее открытое множество, на котором обобщенная функция f равна нулю. Носителем обобщенной функции f называется замкнутое множество $Suppf = R^n \backslash \Omega_{max}$.

Очевидно, что $Supp \quad \delta(\vec{x} - \vec{x}^0) = \{\vec{x}^0\}$, то есть состоит из одной точки $\vec{x}^0 \in R^n$. Вне этой точки δ - функция Дирака равна нулю. При $\vec{x}^0 = \vec{0}$ δ - функция (2.72) сосредоточена в начале координат.

Рассмотрим обобщенную функцию вида

$$\delta(A\vec{x}), \tag{2.73}$$

где A - невырожденная матрица.

Применим функционал (2.73) к функции $\phi(\vec{x})$:

$$\big(\delta(A\vec{x}), \phi(\vec{x})\big) = \int_{R^n} \delta(A\vec{x})\phi(\vec{x})d\vec{x}. \tag{2.74}$$

В интеграле перейдем от переменных интегрирования $x_1, x_2, \ldots, x_n$ к переменным $y_1, y_2, \ldots, y_n$ с помощью преобразования $\vec{y} = A\vec{x}$, тогда

$$\big(\delta(A\vec{x}), \phi(\vec{x})\big) = \int_{R^n} \delta(\vec{y})\phi(A^{-1}\vec{y})|J|d\vec{y} = |J|\phi(\vec{0}), \tag{2.75}$$

где $|J| = |det\ A^{-1}| = |det\ A|^{-1}$.

Сравнив (2.75) и (2.72), получим формулу [5, с. 33]:

$$\delta(A\vec{x}) = \frac{1}{|det\, A|}\delta(\vec{x}). \tag{2.76}$$

Дифференцирование обобщенных функций. Определим производную любого порядка от обобщенной функции $f \in D'(R^n)$. Производная $D^\alpha f \in D'(R^n)$ определяется с помощью соотношения

$$(D^\alpha f, \phi) = (-1)^{|\alpha|}(f,\ D^\alpha \phi), \tag{2.77}$$

где $\qquad \forall \phi(\vec{x}) \in D(R^n), \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$

Очевидно, что правая часть формулы (2.77) определена, а значит, определен непрерывный функционал $D^\alpha f$ в левой части формулы. Формула (2.77) позволяет определить, производную от любой обычной функции.

Определение 2.7. Пространство Соболева $\boldsymbol{W_p^m(\Omega), \Omega \subset R^n, 1 \le p < \infty}$. Функция $u(\vec{x}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W_p^m(\Omega)$, если $u(\vec{x}) \in L_p(\Omega)$, то есть

$\int_{\Omega} |u(\vec{x})|^p d\vec{x} < \infty$, и всевозможные обобщенные производные $D^{\alpha} u(\vec{x}) \in L_p(\Omega)$, $0 < |\alpha| \le m$, [7, с. 256].

Пример 2.1. Рассмотрим кусочно непрерывно дифференцируемую функцию с единственной точкой разрыва первого рода x_0:

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x), & -\infty < x < x_0, \\ g_2(x), & x_0 < x < \infty. \end{cases} \tag{2.78}$$

где $g_1(x) \in C^1(-\infty < x \le x_0)$, $g_2(x) \in C^1(x_0 \le x < \infty)$.

Вычислим обычную производную функции (2.78):

$$\frac{dg(x)}{dx} = \begin{cases} g_1'(x), & -\infty < x < x_0, \\ g_2'(x), & x_0 < x < \infty. \end{cases} \tag{2.79}$$

В точке x_0 функция (2.79) не определена, так как производная функции $g(x)$ в точке x_0 не существует. Доопределим ее в точке x_0 нулем.

Вычислим обобщенную производную D_x от функции g, рассматривая ее как регулярную обобщенную функцию и используя определение (2.77).

В результате

$$(D_x g, \phi) = -(g, D_x \phi) = -\int_{-\infty}^{\infty} g(x) D_x\big(\phi(x)\big)\, dx == -\int_{-\infty}^{x_0} g_1(x)\phi'(x)dx - \int_{x_0}^{\infty} g_2(x)\, \phi'(x)dx$$

Интегрируя по частям, получаем

$$(D_x g, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg(x)}{dx} \phi(x)dx + [g](x_0)\phi(x_0),$$

где $[g](x_0) = g_2(x_0) - g_1(x_0)$ - скачок функции в точке разрыва x_0.

Учитывая определение δ -функции (2.71) на R^1, получаем

$$(D_x g, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{dg(x)}{dx} + [g](x_0)\delta(x - x_0) \right) \phi(x)dx.$$

Отсюда

$$D_x(g) = \frac{dg(x)}{dx} + [g](x_0)\delta(x - x_0)$$

обобщенная производная разрывной функции g.

1.2.9. Фундаментальные решения дифференциальных уравнений

Рассмотрим произвольное уравнение порядка m

$$L(u) \equiv \sum_{0\le|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha u = f, \tag{2.80}$$

где $a_\alpha = a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(\vec{x}) \in C^\infty(R^n)$.

Определение 2.8. Обобщенная функция $u \in D'(R^n)$ называется обобщенным решением уравнения (2.80), если выполнено тождество

$$\big(u, L^*(\phi)\big) = (f,\ \phi)$$

для $\forall\phi(\vec{x}) \in D(R^n)$. Здесь $L^*(\phi) \equiv \sum_{0\le|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|} D^\alpha\big(a_\alpha(\vec{x})\phi(\vec{x})\big)$ - сопряженный дифференциальный оператор для оператора L.

В качестве правой части уравнения (2.80) рассмотрим δ - функцию Дирака:

$$\sum_{0\le|\alpha|\le m} a_\alpha(\vec{x}) D^\alpha u = \delta(\vec{x}-\vec{x}^0). \tag{2.81}$$

Любое обобщенное решение $u(\vec{x},\vec{x}^0) \in D'(R^n)$ уравнения (2.81) называется фундаментальной функцией оператора $L(u)$.

Очевидно, что фундаментальная функция определяется неоднозначно. Учитывая специфику решаемой прикладной задачи, на фундаментальную функцию накладывают дополнительные условия нормировки, которые выделяют единственную фундаментальную функцию $u(\vec{x},\vec{x}^0) = G(\vec{x},\vec{x}^0)$, которая называется фундаментальным решением уравнения (2.81), [7, с. 348].

Фундаментальное решение уравнения Колмогорова. В теории вероятностей и стохастических процессов важную роль играет уравнение Колмогорова. Рассмотрим неоднородное уравнение Колмогорова с δ -функцией в правой части, то есть рассмотрим уравнение вида (2.81):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(c(x,t)u) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(b(x,t)u) = \delta(x-x_0, t-t_0), \tag{2.82}$$

которое определено на пространстве R^2 с координатами $x_1 = x$, $x_2 = t$. Рассмотрим частный случай уравнения [9, с. 226] когда $c,\ b$ - постоянные:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \delta(x-x_0, t-t_0). \tag{2.83}$$

Не нарушая общности, положим $x_0 = 0, t_0 = 0$. Получим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\delta(x,t), \qquad (2.84)$$

для которого найдем фундаментальное решение, накладывая условие на бесконечности

$$u(x,t)\to 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2+t^2}\to\infty. \qquad (2.85)$$

В уравнении (2.84) перейдем к новым переменным $\overline{x}$, $\overline{t}$ с помощью преобразования

$$\begin{cases} x=\overline{x}+c\overline{t}, \\ t=\overline{t}. \end{cases} \qquad (2.86)$$

Тогда $\frac{\partial u}{\partial \overline{t}}-\frac{1}{2}b\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{x}^2}=\delta(\overline{x}+c\overline{t},\overline{t})$.

На основании формулы (2.76): $\delta(\overline{x}+c\overline{t},\overline{t})=\delta(\overline{x},\overline{t})$, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \overline{t}}u(\overline{x},\overline{t})-\frac{1}{2}b\frac{\partial^2}{\partial \overline{x}^2}u(\overline{x},\overline{t})=\delta(\overline{x},\overline{t}). \qquad (2.87)$$

Произведем еще одну замену переменных $\overline{x}=k\overline{x}$, $\overline{t}=k^2\overline{t}$, где k - постоянная, тогда

$$\frac{\partial}{\partial \overline{t}}u(k\overline{x},k^2\overline{t})-\frac{1}{2}b\frac{\partial^2}{\partial \overline{x}^2}u(k\overline{x},k^2\overline{t})=k^2\delta(k\overline{x},k^2\overline{t}).$$

Используем формулу (2.76) и представим правую часть уравнения в виде

$$\delta(k\overline{x},k^2\overline{t})=k^{-3}\delta(\overline{x},\overline{t}).$$

В результате, заменив $\overline{x}\to\overline{x}$, $\overline{t}\to\overline{t}$, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \overline{t}}ku(k\overline{x},k^2\overline{t})-\frac{1}{2}b\frac{\partial^2}{\partial \overline{x}^2}ku(k\overline{x},k^2\overline{t})=\delta(\overline{x},\overline{t}). \qquad (2.88)$$

Уравнения (2.87) и (2.88) представляют собой одно и тоже уравнение, решением которого при соответствующем условии на бесконечности (2.85) является фундаментальное решение. В силу единственности фундаментального решения отождествим решения уравнений (2.87) и (2.88). В результате получим, что функциональное соотношение $u(\overline{x},\overline{t})=ku(k\overline{x},k^2\overline{t})$ справедливо при любом k.

Выберем $k=\frac{1}{\sqrt{\overline{t}}}$, тогда

$$u(\bar{x},\bar{t}) = \frac{1}{\sqrt{\bar{t}}} u\left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{t}}}, 1\right).$$

Введем новую переменную $z = \frac{\bar{x}^2}{\bar{t}}$, получим представление

$$u(\bar{x},\bar{t}) = \frac{1}{\sqrt{\bar{t}}} w(z), \tag{2.89}$$

где $w(z) = u(\sqrt{z}, 1)$.

Подставив функцию (2.89) в уравнение (2.87), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения $w(z)$:

$$2bz\frac{d^2w}{dz^2} + (z+b)\frac{dw}{dz} + \frac{1}{2}w = -(\bar{t})^{\frac{3}{2}}\delta(\sqrt{\bar{t}z}, \bar{t}).$$

Так как δ -функция при $\bar{t} > 0$ тождественно равна нулю, то

$$2bz\frac{d^2w}{dz^2} + (z+b)\frac{dw}{dz} + \frac{1}{2}w = 0$$

при $z > 0$.

Для наших целей пригодным является решение этого уравнения $w(z) = Ce^{-\frac{z}{2b}}$, где постоянная нормировки $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}}$, откуда

$$u(\bar{x},\bar{t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b\bar{t}}} e^{-\frac{\bar{x}^2}{2b\bar{t}}}.$$

Возвратившись к старым переменным $x,\ t$ (2.86), получим фундаментальное решение уравнения (2.84):

$$u = G(x,t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi bt}} e^{-\frac{(x-ct)^2}{2bt}}, \qquad t > 0, \tag{2.90}$$

которое при $t < 0$ доопределим нулем.

Производим сдвиг координат $x,\ t$ на величины $x_0,\ t_0$ и получим фундаментальное решение уравнения (2.83), которое совпадает с функцией (1.90) при $\alpha = \frac{1}{2}b, \quad \beta = -c, \quad \gamma = 0$. Сравнение с формулой (5.14) (см. главу 5) показывает, что фундаментальное решение уравнения Колмогорова совпадает с переходной функцией плотности вероятностей марковского процесса, то есть $\rho(y,\ s;\ x,\ t) = G(x-y, t-s)$ при $t > s$.

Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Рассмотрим неоднородное уравнение Лапласа в трехмерном пространстве R^3 с δ - функцией в правой части:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\delta(x-x_0,y-y_0,z-z_0). \tag{2.91}$$

Можно показать, что обобщенным решением уравнения (2.91) является фундаментальное решение (1.86). В двухмерном случае R^2 обобщенным решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\delta(x-x_0,y-y_0)$$

является фундаментальное решение (1.84).

1.3. Смешанные задачи для гиперболических и параболических уравнений

1.3.1. Постановка смешанных задач для уравнения колебаний струны

На плоскости R^2 с координатами x,t выделим область $D=(0<x<l)\times(0<t<\infty)$, представляющую собой полубесконечную полосу (см. рисунок 3.1).

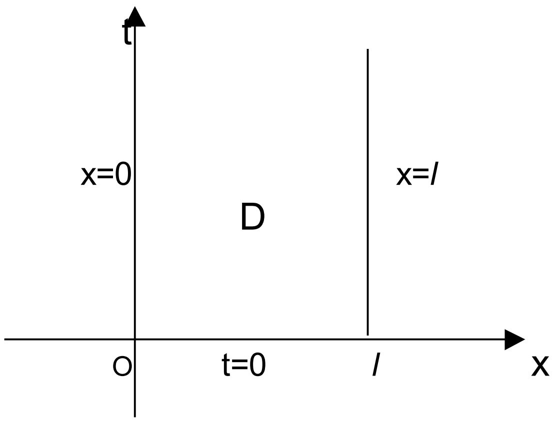


Рисунок 3.1.

В области D рассмотрим уравнение колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), \tag{3.1}$$

где $u=u(x,\ t)$ - искомая функция в области D; $f(x,t)$ - заданная функция.

Для гиперболического уравнения (3.1) в области D (рис. 3.1) поставим ряд смешанных задач, наложив на функцию u начальные условия на нижнем основании $t=0$ и граничные условия на боковых сторонах $x=0$, $x=l$ полуполосы D.

Первая смешанная задача.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \quad \text{в области } \bar{D}, \tag{3.2}$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{3.3}$$

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t), \quad t \ge 0. \tag{3.4}$$

При заданных функциях $f_{xx}{}'' \in C(\bar{D}),\ \ \phi \in C^2(0 \le x \le l),\ \psi \in C^1(0 \le x \le l),\ \mu_i \in C^2(0 \le t \le \infty)$ требуется найти функцию $u \in C^2(\bar{D})$, которая удовлетворяет уравнению (3.2) в области $\bar{D}$, начальным условиям (3.3) и граничным условиям первого рода (3.4).

Задача (3.2)-(3.4) описывает процесс колебаний однородной струны длины l, натянутой вдоль отрезка $0 \le x \le l$. Граничные условия (3.4) означают, что струна в концевых точках $x=0,\ x=l$ закреплена соответственно на высоте $\mu_1(t),\ \mu_2(t)$. Так как эти величины зависят от времени t, то это означает, что высота закрепления изменяется заданным образом с течением времени. Первое начальное условие (3.3) задает график $u=\phi(x)$ струны в начальный момент времени $t=0$, а величина $\psi(x)$ из второго начального условия (3.3) задает начальную скорость струны в точке с координатой x. На рисунке 3.2 изображен вид струны в момент времени t.

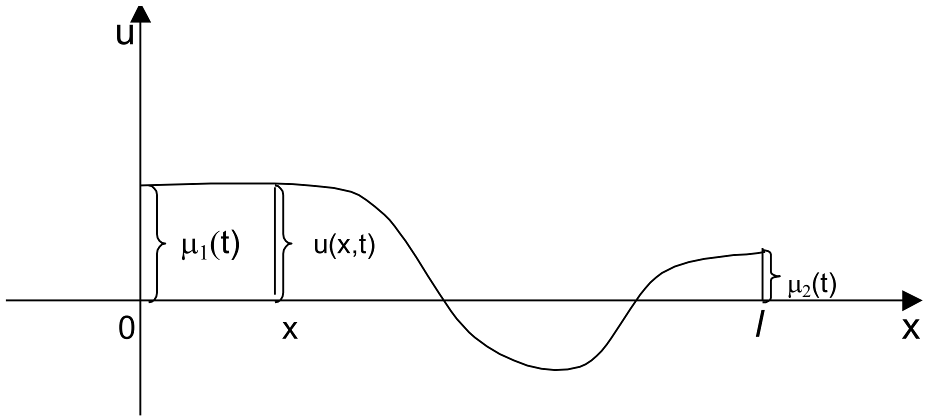


Рисунок 3.2.

Заметим, что при постановке задачи (3.2)-(3.4) на заданные функции $\phi,\ \psi,\ \mu_i$ должны быть наложены некоторые ограничения. В частности, в угловых точках области $\bar{D}$ должны быть выполнены условия согласования:

$$\phi(0)=\mu_1(0),\quad \phi(l)=\mu_2(0),\quad \mu_1'(0)=\psi(0),\quad \mu_2'(0)=\psi(l). \tag{3.5}$$

Эти условия являются необходимыми условиями непрерывной дифференцируемости решения $u(x,\ t)$ в замкнутой области $\bar{D}$. Так как решение $u\in C^2(\bar{D})$, то, помимо условий (3.5), должны быть выполнены условия второго порядка:

$$\mu_1''(0)-a^2\phi''(0)=f(0,0),\qquad \mu_2''(0)-a^2\phi''(l)=f(l,0). \tag{3.6}$$

Действительно, продифференцируем условия (3.4) дважды по t, а первое условие (3.3) дважды по x, тогда

$$\left.\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right|_{\substack{x=0\\t=0}}=\mu_1''(0),\qquad \left.\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right|_{\substack{x=l\\t=0}}=\mu_2''(0),\qquad \left.\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right|_{\substack{t=0\\x=0}}=\phi''(0),\qquad \left.\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right|_{\substack{t=0\\x=l}}=\phi''(l).$$

Подставив значения производных в соответствующих точках в уравнение (3.2), получим требуемые условия (3.6).

Укажем, что на начальные и граничные функции и на правую часть уравнения необходимо накладывать некоторые дополнительные условия, обеспечивающие существование классического решения задачи.

Вторая смешанная краевая задача.

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=f(x,t)\quad \text{в области } \bar{D}, \tag{3.7}$$

$$u|_{t=0}=\phi(x),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x),\qquad 0\le x\le l, \tag{3.8}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\nu_1(t),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=\nu_2(t),\qquad t\ge 0. \tag{3.9}$$

При заданных функциях $f_{xx}''\in C(\bar{D}),\ \ \phi\in C^2(0\le x\le l),\ \ \psi\in C^1(0\le x\le l),\ \ \nu_i(t)\in C^1(0\le t<\infty)$ требуется найти функцию $u\in C^2(\bar{D})$, которая удовлетворяет уравнению (3.7) в области $\bar{D}$, начальным условиям (3.8) и граничным условиям второго рода (3.9).

Граничные условия (3.9) означают, что на струну в концевых точках $x=0,\ x=l$ действуют заданные силы, направленные ортогонально оси Ox.

Необходимые условия согласования в угловых точках области $\bar{D}$, обеспечивающие принадлежность решения u к пространству $C^2(\bar{D})$, имеют вид

$$\phi'(0)=\nu_1(0),\quad \phi'(l)=\nu_2(0),\quad \psi'(0)=\nu_1'(0),\quad \psi'(l)=\nu_2'(0).$$

Третья смешанная задача.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \quad \text{в области } \bar{D}, \tag{3.10}$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{3.11}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} - h_1(t)u\right)\right|_{x=0} = \delta_1(t), \qquad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} + h_2(t)u\right)\right|_{x=l} = \delta_2(t), \quad t \ge 0. \tag{3.12}$$

При заданных функциях $f_{xx}'' \in C(\bar{D})$, $\phi \in C^2(0 \le x \le l)$, $\psi \in C^1(0 \le x \le l)$, $\delta_i(t) \in C^1(t \ge 0)$, $h_i \in C^1(t \ge 0)$, $h_i > 0$, требуется найти функцию $u \in C^2(\bar{D})$, которая удовлетворяет уравнению (3.10) в области $\bar{D}$, начальным условиям (3.11) и граничным условиям третьего рода (3.12).

Граничные условия (3.12) означают, что на струну в концевых точках $x = 0$, $x = l$ действуют заданные упругие силы, направленные ортогонально оси Ox.

Необходимые условия согласования в угловых точках области $\bar{D}$, обеспечивающие принадлежность решения u к пространству $C^2(\bar{D})$, определяются соотношениями

$$\phi'(0) - h_1(0)\phi(0) = \delta_1(0), \qquad \phi'(l) + h_2(0)\phi(l) = \delta_2(0),$$

$$\psi'(0) - h_1'(0)\phi(0) - h_1(0)\psi(0) = \delta_1'(0),$$

$$\psi'(l) + h_2'(0)\phi(l) + h_2(0)\psi(l) = \delta_2'(0).$$

В случае, когда функции $\mu_i \equiv 0$, $\nu_i \equiv 0$, $\delta_i \equiv 0$, граничные условия (3.4), (3.9), (3.12) называются однородными граничными условиями.

Смешанная задача для обобщенного уравнения колебаний струны.

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x)u = f(x,t) \quad \text{в } \bar{D}, \tag{3.13}$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{3.14}$$

$$\left.\left(\alpha_1\frac{\partial u}{\partial x} - \beta_1 u\right)\right|_{x=0} = \gamma_1(t), \qquad \left.\left(\alpha_2\frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u\right)\right|_{x=l} = \gamma_2(t), \quad t \ge 0. \tag{3.15}$$

Требуется найти функцию $u \in C^2(\bar{D})$, которая удовлетворяет уравнению (3.13) в области $\bar{D}$, начальным условиям (3.14) и граничным условиям (3.15).

Заметим, что уравнение (3.13) описывает процесс колебаний неоднородной струны, а граничные условия (3.15) содержат граничные условия первого, второго и третьего рода в зависимости от параметров α_i, β_i. Граничные условия (3.4), (3.9), (3.12), (3.15) являются классическими граничными условиями. В прикладных задачах могут возникать граничные условия и других видов. В частности, граничные соотношения могут связывать значения искомой функции на разных концах струны.

1.3.2. Постановка смешанных задач для уравнения теплопроводности в стержне

На плоскости R^2 с координатами $x,\ t$ выделим область $D = (0 < x < l) \times (0 < t < \infty)$, (см. рис. 3.1). В области D рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{3.16}$$

где $u = u(x,t)$ - искомая функция в области D.

Уравнение (3.16) называется также одномерным уравнением теплопроводности.

Для параболического уравнения (3.16) поставим смешанные задачи первого, второго и третьего рода, наложив на функцию u одно начальное условие на нижнем основании $t = 0$ и граничные условия на боковых сторонах $x = 0,\ x = l$ полуполосы D.

Первая смешанная задача.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \quad \text{в области } D, \tag{3.17}$$

$$u|_{t=0} = \phi(x),, \quad 0 \le x \le l, \tag{3.18}$$

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t), \quad t \ge 0. \tag{3.19}$$

При заданных функциях $f \in C^1(D)$, $\varphi \in C(0 \le x \le l)$, $\mu_i \in C(t \ge 0)$ требуется найти функцию $u \in C^{2,1}_{x,t}(D) \cap C(\bar{D})$, которая удовлетворяет уравнению (3.17) в области D, начальному условию (3.18) и граничным условиям первого рода (3.19). Функции $u \in C^{2,1}_{x,t}(D)$, если $u, u_x{}', u_{xx}{}'', u_t{}' \in C(D)$.

Условия согласования: $\phi(0) = \mu_1(0), \quad \phi(l) = \mu_2(0)$.

Задача (3.17)-(3.19) описывает процесс распространения тепла в тонком стержне длины l, расположенном вдоль отрезка $0 \le x \le l$ (см. рисунок 3.3) Функция $u(x,\ t)$ задает температуру стержня в сечении x в момент времени t. Граничные условия (3.19) означают, что в торцах стержня $x = 0, x = l$ поддерживаются заданные температуры $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$.

Функция $\phi(x)$ в начальном условии (3.18) задает температуру стержня в каждом сечении x в начальный момент времени $t = 0$.

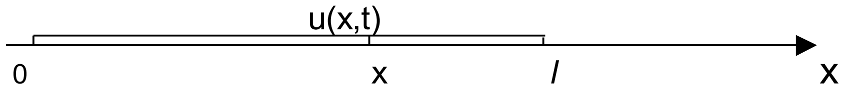


Рисунок 3.3.

Вторая смешанная задача.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \quad \text{в области } D, \tag{3.20}$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{3.21}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \nu_1(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \nu_2(t), \qquad t \ge 0. \tag{3.22}$$

При заданных функциях $f \in C^1(\bar{D})$, $\varphi \in C^1(0 \le x \le l)$, $\nu_i \in C(t \ge 0)$ требуется найти функцию $u \in C^{2,1}_{x,t}(D) \cap C^1(\bar{D})$, которая удовлетворяет уравнению (3.20) в области D, начальному условию (3.21) и граничным условиям второго рода (3.22).

Условия согласования: $\phi'(0) = \nu_1(0), \quad \phi'(l) = \nu_2(0)$.

Граничные условия (3.22) означают, что в торцах стержня $x = 0, \quad x = l$ заданы тепловые потоки.

Третья смешанная задача.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \quad \text{в области } D, \tag{3.23}$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \quad , \qquad 0 \le x \le l, \tag{3.24}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} - h_1(t)u\right)\right|_{x=0} = \delta_1(t), \qquad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} + h_2(t)u\right)\right|_{x=l} = \delta_2(t), \quad t \ge 0. \tag{3.25}$$

При заданных функциях $f \in C^1(\bar{D})$, $\phi \in C^1(0 \le x \le l)$, $\delta_i(t) \in C(t \ge 0)$, $h_i \in C(t \ge 0)$ требуется найти функцию $u \in C^{2,1}_{x,t}(D) \cap C^1(\bar{D})$, которая удовлетворяет уравнению (3.23) в области D, начальному условию (3.24) и граничным условиям третьего рода (3.25).

Условия согласования:

$$\phi'(0) - h_1(0)\phi(0) = \delta_1(0),$$

$$\phi'(l) + h_2(0)\phi(l) = \delta_2(0).$$

Граничные условия (3.25) моделируют теплообмен стержня через торцы $x = 0,\ x = l$ с окружающей средой.

Заметим, что для существования классических решений сформулированных задач необходимо на начальные и граничные функции и на правую часть уравнения теплопроводности накладывать некоторые дополнительные условия.

1.3.3. Постановка смешанных задач для уравнения теплопроводности в пластине

На плоскости Oxy расположена тонкая ограниченная пластина Ω с границей $\gamma = \partial\Omega$. Функция $u = u(x,\ y,\ t)$ задает температуру пластины в точке (x, y) в момент времени t (см. рисунок 3.4)

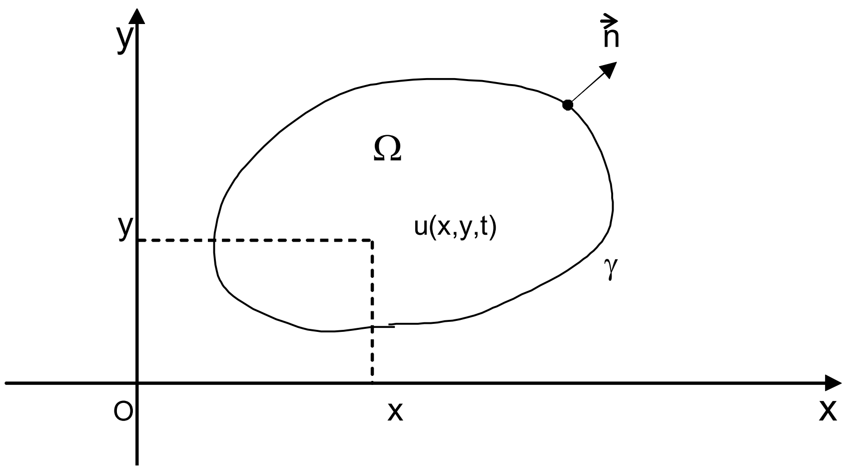


Рисунок 3.4.

В трехмерном пространстве R^3 с координатами $x,\ y,\ t$ выделим область $D = \Omega \times (0 < t < \infty)$, представляющую собой полубесконечный цилиндр (см. рисунок 3.5).

В области D рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x,y,t), \qquad (3.26)$$

где $u = u(x,\ y,\ t)$ искомая функция в области D.

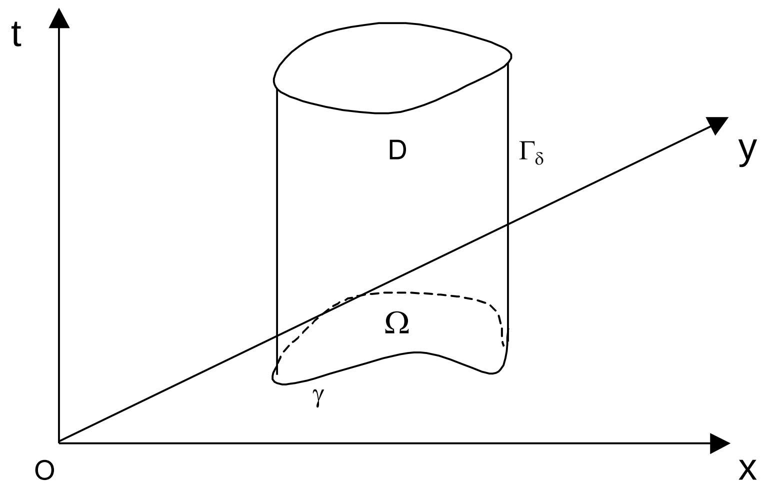


Рисунок 3.5.

Для параболического уравнения (3.26) сформулируем ряд смешанных задач, наложив на функцию u начальное условие на нижнем основании $\Omega(t = 0)$ и граничное условие на боковой поверхности $\Gamma_\delta = \gamma \times (0 \le t < \infty)$ полуцилиндра D.

Первая смешанная задача.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x,y,t) \quad \text{в области } D, \qquad (3.27)$$

$$u|_{t=0} = \phi(x,y), \qquad (x,y) \in \bar{\Omega}, \qquad (3.28)$$

$$u|_{(x,y)\in\gamma} = \mu(x,y,t), \qquad t \ge 0. \qquad (3.29)$$

При заданных функциях $f \in C(\bar{D}),\ \ \phi \in C(\bar{\Omega}),\ \mu \in C(\Gamma_\delta)$ требуется найти функцию $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$, которая удовлетворяет уравнению (3.27) в области D, начальному условию (3.28) и граничному условию первого рода (3.29).

Условие согласования:

$$\phi|_{(x,y)\in\gamma} = \mu(x,y,\ 0).$$

Граничное условие (3.29) означает, что на ребре пластины γ задана температура μ. Функция $\phi(x,y)$ в начальном условии (3.28) задает температуру пластины в каждой точке с координатами (x,y) в момент времени $t = 0$.

Вторая смешанная задача.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x,y,t) \quad \text{в области } D,$$

$$u|_{t=0} = \phi(x,y), \qquad (x,y) \in \bar{\Omega},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{(x,y)\in\gamma} = \nu(x,y,t), \qquad t \geq 0,$$

где $\vec{n} = (n_1, n_2)$ - единичная внешняя нормаль к контуру γ; $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial u}{\partial x}n_1 + \frac{\partial u}{\partial y}n_2$ - производная по нормали.

Условие согласования:

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}}\right|_{(x,y)\in\gamma} = \nu(x,\ y,\ 0).$$

Третья смешанная задача.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x,y,t) \quad \text{в области } D,$$

$$u|_{t=0} = \phi(x,y), \qquad (x,y) \in \bar{\Omega},$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + h(x,y,t)u\right)\right|_{(x,y)\in\gamma} = \delta(x,y,t), \qquad t \geq 0.$$

Условие согласования:

$$\left.\left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} + h(x,y,0)\phi\right)\right|_{(x,y)\in\gamma} = \delta(x,y,0).$$

В дальнейшем будут поставлены смешанные задачи и для других параболических уравнений, в частности для уравнений денежных накоплений, которые имеют социально-экономическую интерпретацию.

1.3.4. Задача Штурма-Лиувилля

Задача Штурма-Лиувилля является специальной краевой задачей для обыкновенных дифференциальных уравнений и рассматривается как вспомогательная задача, используемая в дальнейшем для решения смешанных задач для уравнений с частными производными.

На оси Ox рассмотрим отрезок $0 \le x \le l$, для которого сформулируем краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с граничными условиями на концах отрезка в точках $x = 0$, $x = l$:

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dX}{dx}\right) - q(x)X + \lambda\rho(x)X = 0,\ 0 < x < l, \tag{3.30}$$

$$\left.\left(\alpha_1\frac{dX}{dx} - \beta_1 X\right)\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\left(\alpha_2\frac{dX}{dx} + \beta_2 X\right)\right|_{x=l} = 0, \tag{3.31}$$

где $X = X(x)$ - искомая функция, $X \in C^2(0 < x < l) \cap C^1(0 \le x \le l)$; $k(x), q(x), \rho(x)$ - заданные действительные функции, $k(x) > 0$, $\rho(x) > 0$, $q(x) \ge 0$, $k \in C^1(0 \le x \le l)$, $\rho \in C(0 \le x \le l)$, $q \in C(0 \le x \le l)$; α_i, β_i - заданные действительные постоянные, $\alpha_i \ge 0, \beta_i \ge 0$, $\alpha_i + \beta_i \ne 0$; λ - числовой параметр, который подлежит определению.

Заметим, что задача (3.30), (3.31) всегда имеет тривиальное решение, то есть $X(x) \equiv 0$.

Задача Штурма-Лиувилля. Требуется найти такие числа λ, для которых существуют нетривиальные решения $X(x) \in C^2(0 < x < l) \cap C^1(0 \le x \le l)$ уравнения (3.30) с условиями (3.31). Числа λ называются собственными значениями, а соответствующие нетривиальные функции X называются собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля.

Таким образом, задача (3.30), (3.31) сводится к отысканию всех собственных значений и всех собственных функций.

Введем оператор $L(X) = \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dX}{dx}\right) - q(x)X$, называемый дифференциальным оператором Штурма-Лиувилля. Совокупность всех собственных значений называется спектром дифференциального оператора L с граничными условиями (3.31).

Заметим, что задача (3.30), (3.31) содержит задачи трех родов:
задачу первого рода

$$L(X) + \lambda\rho(x)X = 0,\quad 0 < x < l,$$

$$X(0) = 0,\ X(l) = 0; \tag{3.32}$$

задачу второго рода

$$L(X) + \lambda\rho(x)X = 0,\quad 0 < x < l,$$

$$X'(0) = 0,\ X'(l) = 0; \tag{3.33}$$

задачу третьего рода

$$L(X) + \lambda\rho(x)X = 0, \quad 0 < x < l,$$

$$X'(0) - h_1X(0) = 0,\ X'(l) + h_2X(l) = 0. \tag{3.34}$$

Свойства собственных значений и собственных функций.

Свойство 3.1. Для задачи (3.30), (3.31) существует бесконечная дискретная последовательность собственных значений $\lambda = \lambda_1,\ \lambda_2, \dots, \lambda_n \dots$ и соответствующая последовательность собственных функций $X_1(x),\ X_2(x), \dots, X_n(x), \dots$ такая, что

$$L(X_n) + \lambda_n\rho(x)X_n \equiv 0, \quad 0 < x < l, \tag{3.35}$$

$$\alpha_1 X_n{}'(0) - \beta_1 X_n(0) = 0, \quad \alpha_2 X_n{}'(l) + \beta_2 X_n(l) = 0. \tag{3.36}$$

Будем считать, что числа λ_n упорядочены по возрастанию: $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ ($\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$).

Свойство 3.2. Каждому собственному значению $\lambda = \lambda_n$ соответствует только одна собственная функция с точностью до постоянного множителя.

Доказательство. Очевидно, что если $X_n(x)$ - собственная функция, то $CX_n(x)$ ($C - const$) также собственная функция. Пусть собственному значению $\lambda = \lambda_n$ соответствуют две линейно независимые собственные функции $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$, тогда для функций $Y_j(x)$ выполнены соотношения (3.35), (3.36). Выпишем уравнение (3.35) и первое граничное условие (3.36):

$$L(Y_j) + \lambda_n\rho Y_j = 0, \quad \alpha_1 Y_j{}'(0) - \beta_1 Y_j(0) = 0.$$

Воспользуемся формулой Лиувилля для вронскиана, соответствующего двум решениям Y_1 и Y_2:

$$W(x) \equiv \begin{vmatrix} Y_1(x), & Y_2(x) \\ Y_1{}'(x), & Y_2{}'(x) \end{vmatrix} = W(0)\, exp\left(-\int_0^x \frac{k'(\xi)}{k(\xi)}d\xi\right) = W(0)\frac{k(0)}{k(x)}.$$

Очевидно, что для граничных условий первого и второго рода (3.32), (3.33) вронскиан $W(0) = 0$. Для граничного условия общего вида (3.36) имеем

$$W(0) = \begin{vmatrix} Y_1(0), & Y_2(0) \\ \frac{\beta_1}{\alpha_1} Y_1(0), & \frac{\beta_1}{\alpha_1} Y_2(0) \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, во всех случаях $W(x) \equiv 0$. Это означает, что функции Y_1 и Y_2 линейно зависимы, то есть $Y_2 = CY_1$, $C - \text{const}$.

Свойство 3.3. Для собственных функций X_n, X_m, соответствующих различным собственным значениям задачи (3.30), (3.31), выполнены условия ортогональности с весом $\rho(x)$ на отрезке $0 < x < l$:

$$(X_n, X_m) \equiv \int_0^l X_n(x) X_m(x) \rho(x) dx = \|X_n\|^2 \delta_{nm}, \tag{3.37}$$

где $\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$ - символ Кронекера,

$\|X_n\| = \left(\int_0^l X_n^2(x) \rho(x) dx\right)^{1/2}$ - норма функции $X_n(x)$.

Доказательство. Для оператора Штурма-Лиувилля L рассмотрим выражение

$$vL(u) - uL(v) = v\frac{d}{dx}\left(k\frac{du}{dx}\right) - u\frac{d}{dx}\left(k\frac{dv}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[k\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right)\right],$$

где $\forall u(x), v(x) \in C^2\big((0,l)\big) \cap C^1([0,l])$.

Это равенство проинтегрируем по переменной x, получим формулу Грина для оператора L:

$$\int_0^l (vL(u) - uL(v)) dx = k\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right)\Big|_{x=0}^{x=l}. \tag{3.38}$$

Положим в формуле (3.38) $v = X_n(x), u = X_m(x)$. Учитывая граничные условия (3.36), получим

$$\int_0^l \big(X_n L(X_m) - X_m L(X_n)\big) dx =$$

$$= k(l)\left(X_n(l) X_m'(l) - X_m(l) X_n'(l)\right) - k(0)\left(X_n(0) X_m'(0) - X_m(0) X_n'(0)\right) =$$

$$= k(l)\left(-X_n(l)\frac{\beta_2}{\alpha_2}X_m(l) + X_m(l)\frac{\beta_2}{\alpha_2}X_n(l)\right)$$
$$- k(0)\left(X_n(0)\frac{\beta_1}{\alpha_1}X_m(0) - X_m(0)\frac{\beta_1}{\alpha_1}X_n(0)\right) = 0.$$

Преобразуем левую часть, используя уравнения (3.35), тогда

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l X_n(x)X_m(x)\rho(x)dx = 0.$$

Если $\lambda_n \neq \lambda_m$, то $(X_n, X_m) = 0$. Таким образом, различные собственные функции взаимно ортогональны.

Свойство 3.4. Собственные значения λ_n задачи (3.30), (3.31) действительны.

Доказательство. От противного. Пусть $\lambda_n = \lambda_n^I + i\lambda_n^{II}$ - комплексное собственное значение, а $X_n = X_n^I + iX_n^{II}$ - соответствующая комплексная собственная функция. К соотношениям (3.35), (3.36) применим операцию комплексного сопряжения и воспользуемся действительностью величин $k, q, \rho, \alpha_i, \beta_i$ задачи (3.30), (3.31). Учитывая свойства операции комплексного сопряжения:

$$\bar{\lambda}_n = \lambda_n^I - i\lambda_n^{II},\ \overline{ab} = \bar{a}\bar{b},\ \overline{L(X)} = L(\bar{X}),\ \overline{\alpha X' + \beta X} = \alpha\bar{X}' + \beta\bar{X},$$

получим соотношения

$$L(\bar{X}_n) + \bar{\lambda}_n\rho\bar{X}_n = 0,\ \alpha_1\bar{X}_n'(0) - \beta_1\bar{X}_n(0) = 0,\ \alpha_2\bar{X}_n'(l) + \beta_2\bar{X}_n(l) = 0.$$

Это означает, что $\bar{\lambda}_n$ - собственное значение, а $\overline{X_n}$- соответствующая собственная функция задачи (3.30), (3.31). Так как $\lambda_n \neq \bar{\lambda}_n$, то на основании свойства 3.3 функции $X_n, \overline{X_n}$ взаимно ортогональны, то есть

$$\int_0^l X_n(x)\overline{X_n}(x)\rho(x)dx = \int_0^l |X_n(x)|^2\rho(x)dx = 0$$

Следует, что $X_n(x) \equiv 0$, так как $\rho(x) > 0$. Таким образом, комплексных собственных значений нет.

Свойство 3.5. Все собственные значения задачи (3.30), (3.31) неотрицательны, то есть $\lambda_n \geq 0$.

Доказательство. Уравнение (3.35) умножим на $X_n(x)$ и проинтегрируем по переменной x, тогда после интегрирования по частям получим

$$\lambda_n\|X_n\|^2 = -\int_0^l L(X_n)X_n dx = \int_0^l q(x)X_n^2(x)dx - \int_0^l X_n(x)\left(k(x)X_n'(x)\right)' dx =$$

$$= \int_0^l q(x)X_n^2(x)dx + \int_0^l k(x)\left(X_n'(x)\right)^2 dx - k(x)X_n(x)X_n'(x)\Big|_{x=0}^{x=l}. \qquad (3.39)$$

В случае граничных условий первого или второго рода (3.32), (3.33) последнее слагаемое равенства (3.39) равно нулю, а в случае граничных условий общего вида в последнем слагаемом исключим производные на основании равенств (3.36), тогда

$$\lambda_n\|X_n\|^2 = \int_0^l q(x)X_n^2(x)dx + \int_0^l k(X_n'(x))^2 dx + k(l)\frac{\beta_2}{\alpha_2}X_n^2(l) +$$
$$k(0)\frac{\beta_1}{\alpha_1}X_n^2(0) \geq 0$$

то есть $\lambda_n \geq 0$.

Замечание 3.1. Возможен вариант, когда одно из собственных значений равно нулю. Обозначим его через λ_0 $(\lambda_0 = 0)$, а соответствующую собственную функцию через $X_0(x)$. Из равенства

$$\lambda_0\|X_0\|^2 = \int_0^l qX_0^2 dx + \int_0^l k(X_0')^2 dx + k(l)\frac{\beta_2}{\alpha_2}X_0^2(l) + k(0)\frac{\beta_1}{\alpha_1}X_0^2(0) = 0,$$

в котором все слагаемые неотрицательные, следует $X_0'(x) \equiv 0$, так как $k(x) > 0$. Получим $X_0(x) \equiv 1$. Откуда следует, что $q(x) \equiv 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = 0$. Показано, что собственное значение $\lambda_0 = 0$, имеет только задача второго рода (3.33) при $q = 0$.

Свойство 3.6. Теорема Стеклова. Произвольная функция $f(x) \in C^2(0 < x < l) \cap C^1(0 \leq x \leq l)$, $f''(x) \in L_2(0,l)$ с граничными условиями $\alpha_1 f'(0) - \beta_1 f(0) = 0$, $\alpha_2 f'(l) + \beta_2 f(l) = 0$ разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье на отрезке $[0,l]$ по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (3.30), (3.31):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n X_n(x), \qquad 0 \leq x \leq l,$$

$$f_n = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l f(x)X_n(x)\rho(x)dx. \qquad (3.40)$$

1.3.5. Схема метода разделения переменных для решения смешанных задач

Рассмотрим смешанную задачу (3.13)-(3.15) для однородного уравнения колебаний струны общего вида с однородными граничными условиями:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L(u) = 0 \text{ в } \bar{D} = (0 \le x \le l) \times (0 \le t < \infty), \tag{3.41}$$

$$u|t = 0 = \phi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{3.42}$$

$$\left.\left(\alpha_1\frac{\partial u}{\partial x} - \beta_1 u\right)\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\left(\alpha_2\frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u\right)\right|_{x=l} = 0, \quad t \ge 0, \tag{3.43}$$

где L - оператор Штурма-Лиувилля.

Предполагается, что на функции и коэффициенты $\rho(x),\ k(x),\ q(x), \alpha_i,\ \beta_i$ накладываются ограничения аналогичные ограничениям задачи (3.30), (3.31), при этом коэффициенты $\alpha_i,\ \beta_i$ не зависят от времени t.

Для решения задачи (3.41)-(3.43) применим метод разделения переменных, который состоит в отыскании решений уравнения (3.41) вида

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{3.44}$$

Подставив функцию (3.44) в уравнение (3.41), получим равенство

$$\rho(x)T''(t)X(x) - L\big(X(x)\big)T(t) = 0.$$

Разделим это равенство на $\rho(x)X(x)T(t)$, отделяя функции зависящие от x и функции зависящие от t, тогда

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{L\big(X(x)\big)}{\rho(x)X(x)}.$$

Выражение слева зависит только от t, а выражение справа - только от x, поэтому это равенство имеет место тогда и только тогда, когда эти выражения являются постоянными, то есть

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{L\big(X(x)\big)}{\rho(x)X(x)} = -\lambda,$$

где λ - постоянная разделения.

В результате получим два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$T'' + \lambda T = 0, \tag{3.45}$$

$$L(X) + \lambda \rho X = 0. \tag{3.46}$$

Потребуем, чтобы решения (3.44) удовлетворяли граничным условиям (3.43). Подставляя (3.44) в условия (3.43), получаем

$$\left(\alpha_1 X'(0) - \beta_1 X(0)\right)T(t) = 0, \quad \left(\alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l)\right)T(t) = 0.$$

Так как $T(t) \neq 0$, то выполнены граничные условия для функции $X(x)$:

$$\alpha_1 X'(0) - \beta_1 X(0) = 0, \quad \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0.$$

Добавляя эти условия к уравнению (3.46), получим задачу Штурма-Лиувилля (3.30), (3.31):

$$\begin{gathered} L(X) + \lambda \rho X = 0, \\ \alpha_1 X'(0) - \beta_1 X(0) = 0, \quad \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0. \end{gathered} \tag{3.47}$$

Предположим, что собственные значения $\lambda = \lambda_n$ и собственные функции $X(x) = X_n(x)$, $n = 0,\ 1,\ 2\ldots$, задачи (3.47) вычислены. Здесь $\lambda_0 = 0$, $X_0(x) = 1$ (см. замечание 3.1). В случае отсутствия нулевого собственного значения $X_0(x) \equiv 0$.

Вычислим $T(t)$, положив в уравнении (3.45) $\lambda = \lambda_n$. При $\lambda_n > 0$ имеем уравнение

$$T'' + \lambda_n T = 0.$$

Общее решение

$$T(t) = A_n \cos\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) + B_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n} t\right), \quad n = 1,2,\ldots,$$

где A_n, B_n- произвольные постоянные.

При $\lambda_0 = 0$ получим уравнение

$$T'' = 0.$$

Общее решение $T(t) = A_0 + B_0 t$, где $A_0,\ B_0$ - произвольные постоянные.

Таким образом, получена бесконечная последовательность частных решений вида (3.44) уравнения (3.41), которые удовлетворяют граничным условиям (3.43):

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) + B_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n} t\right)\right) X_n(x), \quad n = 1,\ 2,\ \ldots$$
$$u_0(x,t) = (A_0 + B_0 t) X_0(x). \tag{3.48}$$

Из решений (3.48) образуем общее решение уравнения (3.41) в виде ряда

$$u(x,t) = (A_0 + B_0 t) X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) + B_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n} t\right)\right) X_n(x). \tag{3.49}$$

Вычислим коэффициент A_n, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$ удовлетворяя первому начальному условию (3.42):

$$u|t = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n X_n(x) = \phi(x).$$

Учитывая формулу (3.40), вычислим

$$A_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \phi(x) X_n(x) \rho(x) dx. \tag{3.50}$$

Из второго начального условия (3.42) получим равенство

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = B_0 X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\, B_n X_n(x) = \psi(x),$$

откуда

$$B_n = \frac{1}{\alpha_n} \int_0^l \psi(x) X_n(x) \rho(x) dx, \quad \alpha_0 = \|X_0\|^2, \alpha_n = \sqrt{\lambda_n} \|X_n\|^2, \quad n = 1,\ 2\ ,\ldots \tag{3.51}$$

Таким образом, решение задачи (3.41)-(3.43) представлено в виде ряда (3.49) с коэффициентами (3.50), (3.51).

1.3.6. Решение методом разделения переменных первой смешанной задачи для однородного уравнения колебаний струны

Рассмотрим первую смешанную задачу (3.2)-(3.4) для простейшего однородного уравнения колебаний струны с однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{в области } \bar{D} = (0 \le x \le l) \times (0 \le t < \infty), \tag{3.52}$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{3.53}$$

$$u|_{x=0} = 0, \qquad u|_{x=l} = 0, \qquad 0 \le t < \infty. \tag{3.54}$$

Выберем пространства функций, учитывая условия согласования (3.5), (3.6):

$$V_0 = \{\phi(x) | \phi \in C^2(0 \le x \le l), \phi''' \in L_2(0,l),\ \phi(0) = \phi(l) = \phi''(0) = \phi''(l) = 0\},$$

$$V_1 = \{\psi(x) | \psi \in C^1(0 \le x \le l), \psi'' \in L_2(0,l), \psi(0) = \psi(l) = 0\},$$

$$V = \{u(x,t) | u \in C^2(\bar{D})\}.$$

Для решения задачи (3.52)-(3.54) применим метод разделения переменных, отыскивая решения уравнения (3.52) в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{3.55}$$

После подстановки в уравнение (3.52) по аналогии с предыдущим параграфом 3.5 получим

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

где λ - постоянная разделения.

Имеем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$T'' + \lambda a^2 T = 0, \tag{3.56}$$

$$X'' + \lambda X = 0. \tag{3.57}$$

Потребуем, чтобы решения (3.55) удовлетворяли граничным условиям (3.54). Подставив (3.55) в (3.54), получим

$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0. \tag{3.58}$$

В результате получена задача Штурма-Лиувилля (3.57), (3.58) в явном виде. Собственные значения $\lambda > 0$ на основании замечания 3.1. Поэтому общее решение уравнения (3.57) имеет вид

$$X(x) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right),$$

где $A,\ B$ - произвольные постоянные.

Удовлетворим первому граничному условию (3.58), тогда $X(0) = A = 0$, то есть $X(x) = B\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$. Для простоты положим $B = 1$, так как собственная функция определяется с точностью до постоянного множителя.

Удовлетворим второму граничному условию (3.58), тогда

$$X(l) = \sin\left(\sqrt{\lambda}l\right) = 0.$$

Следует, что $\sqrt{\lambda}l = \pi n, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots$. Отсюда определим собственные значения и собственные функции аналитически:

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{3.59}$$

$$X(x) = X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right). \tag{3.60}$$

Вычислим $T(t)$, положив в уравнении (3.56) $\lambda = \lambda_n$:

$$T'' + \lambda_n a^2 T = 0.$$

Общее решение

$$T(t) = T_n(t) \equiv A_n\cos\left(\frac{\pi n a}{l}t\right) + B_n\sin\left(\frac{\pi n a}{l}t\right) \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

где $A_n,\ B_n$ - произвольные постоянные.

В результате, получена бесконечная последовательность частных решений вида (3.55) уравнения (3.52), которые удовлетворяют граничным условиям (3.58):

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n\cos\left(\frac{\pi n a}{l}t\right) + B_n\sin\left(\frac{\pi n a}{l}t\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Из этих решений составим общее решение в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \tag{3.61}$$

Вычислим коэффициент A_n, удовлетворяя первому начальному условию (3.53):

$$u|t = 0 = \sum_{n=1}^{\infty \Sigma\left(\frac{\pi n}{l} x\right)(x) \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)} A_n \sin,$$

где $\phi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx$ - коэффициенты Фурье функции $\phi(x)$.

Удовлетворим второму начальному условию (3.53), тогда

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{l} B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right),$$

где $\psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx.$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых собственных функциях, вычислим коэффициенты разложения (3.61):

$$A_n = \phi_n \ , \ B_n = \frac{l}{\pi n a} \psi_n,$$

$$A_n = \phi_n.$$

Таким образом, решение исходной задачи (3.52)-(3.54) представлено в виде разложения

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\phi_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + \frac{l \psi_n}{\pi n a} \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \tag{3.62}$$

1.3.7. Сведение смешанной задачи с неоднородными граничными условиями к задаче с однородными граничными условиями

Рассмотрим смешанную задачу для обобщенного уравнения колебаний струны (3.13)-(3.15):

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L(u) = f(x,t) \quad \text{в области } \bar{D} = (0 \le x \le l) \times (0 \le t < \infty),$$

$$u|t = 0 = \phi(x), \ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{3.63}$$

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} - \beta_1 u\right)\Big|_{x=0} = \gamma_1(t), \quad \left(\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u\right)\Big|_{x=l} = \gamma_2(t), \quad t \geq 0.$$

Метод разделения переменных, изложенный в параграфе 3.5, для решения этой задачи не применим, так как уравнение и граничные условия в (3.63) неоднородные. Преобразуем неоднородные граничные условия в однородные, вводя новую неизвестную функцию $v(x,t)$ с помощью замены

$$u(x,t) = v(x,t) + U(x,t), \tag{3.64}$$

где $U(x,t)$ - некоторая заданная функция.

Подставим (3.64) в (3.63) и запишем задачу для функции v:

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - L(v) = \bar{f}(x,t) \quad \text{в области } \bar{D},$$

$$v|t = 0 = \bar{\phi}(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \bar{\psi}(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{3.65}$$

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial v}{\partial x} - \beta_1 v\right)\Big|_{x=0} = \bar{\gamma}_1(t), \quad \left(\alpha_2 \frac{\partial v}{\partial x} + \beta_2 v\right)\Big|_{x=l} = \bar{\gamma}_2(t), \quad t \geq 0,$$

где

$$\bar{f}(x,t) = f(x,t) - \rho(x)\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} + L\big(U(x,t)\big),$$

$$\bar{\phi}(x) = \phi(x) - U(x,0), \quad \bar{\psi}(x) = \psi(x) - \frac{\partial U(x,0)}{\partial t},$$

$$\bar{\gamma}_1(t) = \gamma_1(t) - \left(\alpha_1 \frac{\partial U(0,t)}{\partial x} - \beta_1 U(0,t)\right), \quad \bar{\gamma}_2(t) = \gamma_2(t) - \left(\alpha_2 \frac{\partial U(l,t)}{\partial x} + \beta_2 U(l,t)\right).$$

Граничные условия задачи (3.65) также неоднородные, поэтому обратим функции $\bar{\gamma}_i(t)$ в нуль за счет выбора функции $U(x,t)$, то есть потребуем $\bar{\gamma}_i = 0$.

Будем искать функцию U в виде

$$U(x,t) = a(t)x + b(t). \tag{3.66}$$

Подставим (3.66) в выражения для коэффициентов γ_i, тогда

$$\bar{\gamma}_1 \equiv \gamma_1(t) - \big(\alpha_1 a(t) - \beta_1 b(t)\big) = 0,$$

$$\bar{\gamma}_2 \equiv \gamma_2(t) - \Big(\alpha_2 a(t) + \beta_2\big(a(t)l + b(t)\big)\Big) = 0.$$

Получим систему для определения коэффициентов a и b:

$$\alpha_1 a - \beta_1 b = \gamma_1,$$

$$(\alpha_2 + \beta_2 l)a + \beta_2 b = \gamma_2.$$

Если определитель системы $\alpha_1\beta_2 + \beta_1(\alpha_2 + \beta_2 l) \neq 0$, то

$$a = \frac{\gamma_1\beta_2 + \gamma_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2 + \beta_1(\alpha_2 + \beta_2 l)}, \qquad b = \frac{\gamma_2\alpha_1 - \gamma_1(\alpha_2 + \beta_2 l)}{\alpha_1\beta_2 + \beta_1(\alpha_2 + \beta_2 l)}.$$

В случае второй смешанной задачи определитель равен нулю, тогда вместо (3.66) можно рассмотреть выражение $U(x,t) = a(t)x^2 + b(t)x$.

Таким образом, за счет выбора функции $U(x,t)$ задача (3.63) сведена к задаче

$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - L(v) = \bar{f}(x,t) \quad \text{в области } \bar{D},$$

$$v|t = 0 = \bar{\phi}(x), \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \bar{\psi}(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{3.67}$$

$$\left.\left(\alpha_1\frac{\partial v}{\partial x} - \beta_1 v\right)\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\left(\alpha_2\frac{\partial v}{\partial x} + \beta_2 v\right)\right|_{x=l} = 0.$$

Заметим, что в зависимости от специфики задачи могут рассматриваться и другие правила выбора функции $U(x,t)$.

В частности, если в задаче (3.63) правая часть уравнения и величины γ_1, γ_2 не зависят от времени t, тогда замена (3.64) ищется в виде $u(x,t) = v(x,t) + U(x)$.Задача (3.65) принимает вид

$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - L(v) = \overline{f}(x) \quad \text{в области } \bar{D},$$

$$v|_{t=0} = \overline{\phi}(x), \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \overline{\psi}(x), \quad 0 \le x \le l,$$

$$\left.\left(\alpha_1\frac{\partial v}{\partial x} - \beta_1 v\right)\right|_{x=0} = \overline{\gamma}_1, \quad \left.\left(\alpha_2\frac{\partial v}{\partial x} + \beta_2 v\right)\right|_{x=l} = \overline{\gamma}_2, \quad t \ge 0,$$

где

$$\overline{f}(x) = L\big(U(x)\big) + f(x), \qquad \overline{\phi}(x) = \phi(x) - U(x), \qquad \overline{\psi}(x) = \psi(x),$$

$$\overline{\gamma}_1 = \gamma_1 - \left.\left(\alpha_1\frac{\partial U}{\partial x} - \beta_1 U\right)\right|_{x=0}, \qquad \overline{\gamma}_2 = \gamma_2 - \left.\left(\alpha_2\frac{\partial U}{\partial x} + \beta_2 U\right)\right|_{x=l}.$$

Потребуем $\overline{f}(x) = 0$, $\overline{\gamma}_1 = 0$, $\overline{\gamma}_2 = 0$, тогда для определения функции $U(x)$ получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$L\big(U(x)\big) = -f(x), \quad 0 < x < l,$$

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial U}{\partial x} - \beta_1 U\right)\Big|_{x=0} = \gamma_1, \quad \left(\alpha_2 \frac{\partial U}{\partial x} + \beta_2 U\right)\Big|_{x=l} = \gamma_2.$$

1.3.8. Метод разделения переменных для решения смешанных задач с неоднородным уравнением

В предыдущем параграфе было показано, что любая смешанная задача с общей постановкой (3.13)-(3.15) может быть сведена к смешанной задаче с однородными граничными условиями. Поэтому, рассмотрим задачу вида (3.67):

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L(u) = f(x,t) \quad \text{в области } \bar{D}, \tag{3.68}$$

$$u|t = 0 = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{3.69}$$

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} - \beta_1 u\right)\Big|_{x=0} = 0, \quad \left(\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u\right)\Big|_{x=l} = 0, \quad t \ge 0. \tag{3.70}$$

Метод разделения переменных, изложенный в параграфе 3.5, для решения этой задачи не применим, так как уравнение (3.68) неоднородное. Модифицируем метод разделения переменных применительно к задаче (3.68)-(3.70). Для этого рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля (3.30), (3.31), соответствующую смешанной задаче (3.68)-(3.70). Пусть $X_n(x)$ и λ_n собственные функции и собственные значения, для которых выполнены соотношения (3.35), (3.36)

Представим решение задачи (3.68)-(3.70) в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям $X_n(x)$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) X_n(x), \tag{3.71}$$

где $a_n(t)$ - неизвестные функции.

Разложим в ряды Фурье также функции $\frac{f(x,t)}{\rho(x)}$, $\phi(x)$, $\psi(x)$:

$$g(x,t) \equiv \frac{f(x,t)}{\rho(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) X_n(x), \tag{3.72}$$

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n X_n(x), \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x), \tag{3.73}$$

где

$$g_n(t) = \frac{1}{\alpha_n} \int_0^l f(x,t) X_n(x) dx, \quad \alpha_n = \|X_n\|^2,$$

$$\phi_n = \frac{1}{\alpha_n} \int_0^l \phi(x) X_n(x) \rho(x) dx, \quad \psi_n = \frac{1}{\alpha_n} \int_0^l \psi(x) X_n(x) \rho(x) dx,$$

Подставим ряды (3.71), (3.72) в уравнение (3.68), тогда

$$\rho \sum_{n=1}^{\infty} a_n''(t) X_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) L(X_n) = \rho \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) X_n.$$

Учтем соотношение (3.35) и приравняем коэффициенты при одинаковых функциях X_n, получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для определения функций $a_n(t)$:

$$a_n''(t) + \lambda_n a_n(t) = g_n(t), \quad t \geq 0. \tag{3.74}$$

Далее потребуем, чтобы для ряда (3.71) выполнялись начальные условия (3.69). Подставляя ряды (3.71), (3.73) в условия (3.69) и приравнивая коэффициенты при функциях X_n, получаем начальные условия для функции $a_n(t)$:

$$a_n(0) = \phi_n, \qquad a_n'(0) = \psi_n. \tag{3.75}$$

Таким образом, необходимо решить задачу Коши (3.74), (3.75). Будем считать, что собственные значения $\lambda_n > 0$, тогда общее решение уравнения (3.74) определяется формулой

$$a_n(t) = A_n \cos\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) + B_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) + G_n(t), \tag{3.76}$$

где $G_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t g_n(\tau) \sin\left(\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)\right) d\tau$ - частное решение неоднородного уравнения (3.74), для которого выполнены условия $G_n(0) = 0$, $G_n{}'(0) = 0$.

Найдем коэффициенты A_n, B_n, подставляя (3.76) в начальные условия (3.75):

$$a_n(0) = A_n = \phi_n, \qquad a_n'(0) = \sqrt{\lambda_n} B_n = \psi_n \Rightarrow B_n = \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Найденные функции (3.76) подставим в ряд (3.71), получим окончательный вид решения исходной задачи (3.68)-(3.70):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\phi_n \cos\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) + \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) \right) X_n(x) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t g_n(\tau) \sin\left(\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)\right) d\tau\, X_n(x). \qquad (3.77)$$

Заметим, что при наличии собственного значения $\lambda_0 = 0$ и собственной функции $X_0(x) = 1$ (см. замечание 3.1) необходимо рассматривать суммирование рядов (3.71)-(3.73) от $n = 0$. Функцию $a_0(t)$ определим, решая задачу Коши

$$a_n''(t) = g_0(t), \qquad a_0(0) = \phi_0, \qquad a_0'(0) = \psi_0.$$

Очевидно, что

$$a_0(t) = \phi_0 + \psi_0 t + \int_0^t (t-\tau) g_0(\tau)\, d\tau.$$

Таким образом, решение второй смешанной задачи $(\beta_1 = 0, \beta_2 = 0)$ для уравнения (3.68) определяется разложением

$$u(x,t) = \phi_0 + \psi_0 t + \int_0^t (t-\tau) g_0(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\phi_n \cos\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) + \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) \right) X_n(x) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t g_n(\tau) \sin\left(\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)\right) d\tau\, X_n(x).$$

Решение (3.77) является обобщенным решением. Для того, чтобы решение (3.77) было классическим, на функции ϕ, ψ, f необходимо накладывать некоторые условия гладкости и условия согласования в угловых точках области D.

1.3.9. Решение методом разделения переменных первой смешанной задачи для однородного уравнения теплопроводности в стержне

Рассмотрим первую смешанную задачу (3.17)-(3.19) для однородного одномерного уравнения теплопроводности с однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{в области } D = (0 < x < l) \times (0 < t < \infty), \tag{3.78}$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{3.79}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \qquad 0 \le t < \infty. \tag{3.80}$$

Выберем пространства функций, учитывая условия согласования:

$$V_0 = \{\phi(x) | \phi \in C(0 \le x \le l), \phi' \in L_2(0,l), \phi(0) = \phi(l) = 0\},$$

$$V = \{u(x,t) | u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})\}.$$

Для решения задачи (3.78)-(3.80) применим метод разделения переменных, отыскивая решения уравнения (3.78) в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{3.81}$$

Подставив в уравнение (3.78) и разделив переменные, получим соотношение

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

где λ - постоянная разделения.

Имеем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$T' + \lambda a^2 T = 0, \tag{3.82}$$

$$X'' + \lambda X = 0. \tag{3.83}$$

Потребуем, чтобы решения (3.81) удовлетворяли граничным условиям (3.80). Подставив (3.81) в (3.80), получим

$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0. \tag{3.84}$$

Таким образом, получена задача Штурма-Лиувилля (3.83), (3.84), совпадающая с задачей (3.57), (3.58), для которой собственные значения λ_n и собственные функции X_n определяются формулами (3.59), (3.60).

Вычислим $T(t)$, положив в уравнении (3.82) $\lambda = \lambda_n$:

$$T' + \lambda_n a^2 T = 0.$$

Общее решение

$$T(t) = T_n(t) \equiv A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

где A_n- произвольные постоянные.

В результате получена бесконечная последовательность частных решений вида (3.81) уравнения (3.78), которая удовлетворяет граничным условиям (3.80):

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right). \tag{3.85}$$

Из этих решений составим общее решение в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right). \tag{3.86}$$

Вычислим коэффициенты A_n, удовлетворяя начальному условию (3.79):

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) = \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),$$

откуда

$$A_n = \phi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) dx. \tag{3.87}$$

Таким образом, решение задачи (3.78)-(3.80) представлено в виде разложения (3.86).

1.3.10. Корректность первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности

В предыдущем параграфе была рассмотрена смешанная задача (3.78)-(3.80):

$$L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{в } D = (0 < x < l) \times (0 < t < \infty), \tag{3.88}$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{3.89}$$

$$u|_{x=l} = 0, \qquad 0 \le t < \infty, \tag{3.90}$$

для пары пространств $V_0,\ V$.

Определение 3.1. Смешанная задача (3.88)-(3.90) поставлена корректно для пары пространств V_0, V, если:

1) для $\forall\phi \in V_0$ существует решение задачи (3.88)-(3.90) $u \in V$;

2) для $\forall\phi \in V_0$ решение u задачи (3.88)-(3.90) единственно в пространстве V;

3) решение u задачи (3.88)-(3.90) непрерывно зависит от начальных функций $\phi \in V_0$ в пространстве V.

В дальнейшем докажем корректность задачи (3.88)-(3.90).

Существование решения.

Решение задачи было построено методом разделения переменных и представлено в виде ряда (3.86):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \tag{3.91}$$

Необходимо показать, что решение (3.91) является классическим, то есть $u \in V = C^2(D) \cap C(\bar{D})$.

Лемма 3.1. Если $\phi(x) \in C(0 \le x \le l)$, то функция $u(x,\ t)$, представленная рядом (3.91), любое число раз непрерывно дифференцируема по переменным x и t в области $\Omega = (-\infty < x < \infty) \times (0 < t < \infty)$.

Доказательство. Из непрерывности функции $\phi(x)$ следует ее ограниченность $|\phi(x)| \le C$. Оценим коэффициент (3.87), учитывая неравенство $\left|\sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)\right| \le 1$, тогда

$$|\phi_n| \le \frac{2}{l} \int_0^l |\phi(x)| \left|\sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)\right| \, dx \le 2C. \tag{3.92}$$

Далее, продифференцируем ряд (3.91) почленно k раз по переменной t:

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^k u_n}{\partial t^k} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^{2k} \phi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \tag{3.93}$$

Дифференцирование под знаком бесконечной суммы законно, если ряд (3.93) сходится равномерно. Построим мажорантный ряд для ряда (3.93) в области $t_0 \le t < \infty \quad (t_0 > 0)$, используя оценку (3.92). Сходимость мажорантного ряда,

$$\left|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right| \le 2C \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^{2k} e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t_0} < \infty,$$

доказывает равномерную сходимость ряда (3.93). В силу произвольности t_0 формула (3.93) верна для области Ω. Аналогично доказывается формула

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} u}{\partial t^{\alpha_1} \partial x^{\alpha_2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} u_n}{\partial t^{\alpha_1} \partial x^{\alpha_2}}. \tag{3.94}$$

Следствие 3.1. Из формулы (3.94) следует $L(u) = \sum_{n=1}^{\infty} L(u_n) = 0$, так как функции $u_n(x, t)$ являются частными решениями уравнения (3.88).

Лемма 3.2. Если $\phi(x) \in V_0$, тогда функция $u(x, t)$, представленная рядом (3.91), непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, то есть $u \in C(\bar{D})$.

Доказательство. Преобразуем коэффициент ϕ_n, интегрируя по частям интеграл (3.87) и учитывая свойство $\phi(0) = \phi(l) = 0$, тогда

$$\phi_n = -\frac{l}{\pi n}\left(\frac{2}{l}\phi(x)\, cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\Big|_{x=0}^{x=l} - \psi_n\right) = \frac{l}{\pi n}\psi_n, \tag{3.95}$$

где $\psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi'(x)\, cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right) dx$ - коэффициент ряда Фурье функции $\phi'(x)$ по системе взаимно ортогональных функций $cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$. Так как $\phi' \in L_2(0, l)$, то из неравенства Бесселя [11, с. 151] следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n|^2 \le \frac{2}{l}\int_0^l |\phi'(x)|^2 dx < \infty. \tag{3.96}$$

Подставим формулу (3.95) в ряд (3.91) и построим мажорантный ряд в области $\bar{D}$:

$$|u| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n}|\psi_n|\, e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \left|sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\right| dx \le \frac{l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|\psi_n|.$$

Мажорантный ряд сходится на основании неравенства Коши-Буняковского и оценки (3.96):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|\psi_n| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\psi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Из сходимости мажорантного ряда следует равномерная сходимость ряда (3.91) в области $\bar{D}$. Так как ряд составлен из непрерывных функций, то равномерная сходимость обеспечивает непрерывность функции и в D.

Следствие 3.2. Функция (3.91) непрерывно примыкает к граничным линиям $t = 0,\ x = 0,\ \ x = l$ области $\bar{D}$ (см. рис. 3.1) и удовлетворяет условиям (3.89), (3.90).

Суммируя результаты доказанных лемм, заключаем, что $u \in V$, то есть функция (3.91) является классическим решением первой смешанной задачи (3.88)-(3.90).

Единственность решения.

Утверждение 3.1. Классическое решение $u \in V$ первой смешанной задачи (3.17)-(3.19) (в предположении существования решения) единственно в пространстве V.

Доказательство. Пусть существуют два решения $u_i \in V$. Образуем функцию $v = u_2 - u_1 \in V$. Очевидно, что

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad v|_{t=0} = 0, \quad v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0. \tag{3.97}$$

Функция v удовлетворяет уравнению теплопроводности, поэтому на основании принципа максимума и минимума (2.58) функция v достигает максимального и минимального значений на линиях $t = 0, \quad x = 0, \quad x = l.$ Из (3.97) следует, что $\max\limits_{D} u = 0, \quad \min\limits_{D} u = 0,$ значит $v \equiv 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2$ в области $\bar{D}$.

Непрерывная зависимость решения от начальной и граничных функций.

Рассмотрим две первые смешанные задачи (3.17)-(3.19) с различными начальными и граничными функциями:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = f(x,t),$$

$$u_i|_{t=0} = \phi_i(x),$$

$$u_i|_{x=0} = \mu_1^{(i)}(t), \quad u_i|_{x=l} = \mu_2^{(i)}(t). \tag{3.98}$$

Определение 3.2. Решение u первой смешанной задачи (3.17)-(3.19) непрерывно зависит от начальной функции ϕ и граничных функций μ_1 и μ_2, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что если $|\phi_2(x) - \phi_1(x)| \le \delta, \quad \left|\mu_i^{(2)}(t) - \mu_i^{(1)}(t)\right| \le \delta$, тогда $|u_2(x,t) - u_1(x,t)| \le \varepsilon.$

Утверждение 3.2. Классическое решение $u \in V$ первой смешанной задачи (3.17)-(3.19) непрерывно зависит от начальной и граничных функций.

Доказательство.

Обозначим: $\bar{\phi} = \phi_2 - \phi_1, \quad \bar{\mu}_i = \mu_i^{(2)} - \mu_i^{(1)}, \quad v = u_2 - u_1$. С учетом (3.98) получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0,$$

$$v|_{t=0} = \bar{\phi}(x),$$

$$v|_{x=0} = \bar{\mu}_1(t), \quad v|_{x=l} = \bar{\mu}_2(t).$$

Пусть $|\bar{\phi}(x)| \le \delta, \quad |\bar{\mu}_i(t)| \le \delta$. Это означает, что на границе $L = (x = 0) \cup (t = 0) \cup (x = l)$ области D $\left.|v|\right|_L \le \delta$. Используя следствие 2.4. из принципа максимума и минимума для уравнения теплопроводности, заключаем, что $|v(x,t)| \le \delta$ для $\forall (x,t) \in \bar{D}$. Таким образом, для $\forall \varepsilon > 0$ найдено $\delta = \varepsilon > 0$, что из условий $|\bar{\phi}| \le \varepsilon, \quad |\bar{\mu}_i| \le \varepsilon$ следует неравенство $|u_2 - u_1| \le \varepsilon$.

Непрерывная зависимость доказана.

1.3.11. Решение методом разделения переменных первой смешанной задачи для однородного уравнения теплопроводности в пластине

Рассмотрим первую смешанную задачу (3.27)–(3.29) для двухмерного однородного уравнения теплопроводности в прямоугольной пластине $\Omega = (0 < x < l_1) \times (0 < y < l_2)$ с однородными граничными условиями на контуре $\gamma = \partial\Omega$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{в } D = \Omega \times (0 < t < \infty), \tag{3.99}$$

$$u|_{t=0} = \phi(x,y), \qquad (x,y) \in \overline{\Omega}, \tag{3.100}$$

$$u|_{(x,y)\in\gamma} = 0, \qquad 0 \le t < \infty. \tag{3.101}$$

Выберем пространства функций, учитывая условия согласования:

$$V_0 = \left\{ \phi(x,y) | \phi \in C^1(\overline{\Omega}),\ \phi''_{xy} \in L_2(\Omega),\ \phi|_{(x,y)\in\gamma} = 0 \right\},$$

$$V = \left\{ u(x,y,t) | u \in C^2(D) \cap C(\overline{\Omega}) \right\}.$$

Для решения задачи (3.99)-(3.101) применим метод Фурье, состоящий в отыскании решений уравнения (3.99) в виде

$$u(x,y,t) = T(t)v(x,y) \tag{3.102}$$

и представлении решения исходной задачи в виде разложения в ряд.

Подставляя (3.102) в уравнение (3.99) и разделяя переменные, получаем соотношение

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{\Delta v(x,y)}{v(x,y)} = -\lambda,$$

где $\Delta v = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; λ - постоянная разделения.

Имеем два дифференциальных уравнения:

$$\boldsymbol{T' + \lambda a^2 T = 0}, \tag{3.103}$$

$$\boldsymbol{\Delta v + \lambda v = 0}. \tag{3.104}$$

Потребуем, чтобы решения (3.102) удовлетворяли граничному условию (3.101). Подставляя функцию (3.102) в (3.101), получаем условие

$$v|_{(x,y)\in\gamma} = 0. \tag{3.105}$$

Таким образом, для отыскания функции v в области Ω получена задача Дирихле для эллиптического уравнения (3.104) с однородным граничным условием (3.105) (См. параграф 4.5). Величина λ в уравнении (3.104) также подлежит определению.

Спектральная задача.

$$\Delta v + \lambda v = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{3.106}$$

$$v|_{(x,y)\in\gamma} = 0. \tag{3.107}$$

Требуется найти числа λ, для которых существуют нетривиальные решения $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ уравнения (3.106) с условием (3.107). Числа λ называются собственными значениями, а соответствующие нетривиальные функции v называются собственными функциями спектральной задачи для оператора Лапласа.

Спектральную задачу (3.106), (3.107) для прямоугольной области Ω решим методом разделения переменных в координатах x, y. Для этого найдем все решения уравнения (3.106) вида

$$v(x,y) = X(x)Y(y). \tag{3.108}$$

Подставим (3.108) в уравнение (3.106) и разделим на $X(x)Y(y)$ тогда

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = -\mu^2,$$

где μ^2 - постоянная разделения.

Таким образом, получены два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$X'' + \mu^2 X = 0, \tag{3.109}$$

$$Y'' + \nu^2 Y = 0, \qquad \nu^2 = \lambda - \mu^2, \tag{3.110}$$

для определения функций $X(x),\ Y(y)$.

Запишем граничное условие (3.107) в виде четырех условий на сторонах прямоугольника Ω:

$$\begin{gathered} v|_{x=0} = 0, \qquad v|_{x=l_1} = 0, \\ v|_{y=0} = 0, \qquad v|_{y=l_2} = 0 \end{gathered} \tag{3.111}$$

и потребуем, чтобы функции (3.108) удовлетворяли этим условиям. После подстановки (3.108) в (3.111) получим

$$X(0) = 0, \qquad X(l_1) = 0, \tag{3.112}$$

$$\boldsymbol{Y(0) = 0}, \qquad Y(l_2) = 0. \tag{3.113}$$

Добавим условия (3.112) к уравнению (3.109). Получим задачу Штурма-Лиувилля (3.57), (3.58), решение которой определяется формулами (3.59), (3.60). Таким образом,

$$\mu^2 = \left(\frac{\pi n}{l_1}\right)^2, \qquad X(x) = X_n(x) \equiv sin\left(\frac{\pi n}{l_1}x\right), \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots.$$

Аналогично решим задачу (3.110), (3.113):

$$\nu^2 = \left(\frac{\pi m}{l_1}\right)^2, \qquad Y(y) = Y_m(y) \equiv sin\left(\frac{\pi m}{l_2}y\right), \qquad m = 1,\ 2,\ \ldots.$$

Все собственные функции спектральной задачи (3.106), (3.107), определяемые формулой (3.108), найдены:

$$v = X_n(x)Y_m(y) = v_{nm}(x,y) \equiv \sin\left(\frac{\pi n}{l_1}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{l_2}y\right),\ n = 1,\ 2,\dots;\ m = 1,\ 2,\ \dots. \tag{3.114}$$

Найдем соответствующие собственные значения:

$$\lambda = \mu^2 + \nu^2 = \lambda_{nm} \equiv \left(\frac{\pi n}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{l_2}\right)^2. \tag{3.115}$$

Найденные числа подставим в уравнение (3.103) и запишем его общее решение:

$$T(t) = T_{mn}(t) \equiv Ce^{-\lambda_{nm}a^2t}, \tag{3.116}$$

где C - произвольная постоянная интегрирования.

Подставив функции (3.114), (3.116), в формулу (3.102), получим последовательность частных решений уравнения теплопроводности (3.99), удовлетворяющих граничному условию (3.101):

$$u = u_{nm} = T_{nm}(t)v_{nm}(x,y) = Ce^{-\lambda_{nm}a^2t}\sin\left(\frac{\pi n}{l_1}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{l_2}y\right), \tag{3.117}$$

$n = 1,2,\dots;\ m = 1,2,\dots$.

Построим общее решение уравнения теплопроводности (3.99) как линейную комбинацию частных решений (3.117):

$$u = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{nm} = \sum_{n,m=1}^{\infty} C_{nm}e^{-\lambda_{nm}a^2t}v_{nm}(x,y). \tag{3.118}$$

Неизвестные коэффициенты C_{nm} определим, подставив ряд в начальное условие (3.100). Тогда

$$u|_{t=0} = \sum_{n,m=1}^{\infty} C_{nm}v_{nm}(x,y) = \phi(x,y). \tag{3.119}$$

Используя ортогональность собственных функций v_{nm} на прямоугольнике Ω

$$\iint_{\Omega} v_{nm}(x,y)v_{ks}(x,y)dxdy = \|v_{nm}\|^2\,\delta_{nk}\delta_{ms},$$

находим коэффициенты ряда Фурье (3.119):

$$C_{nm} = \frac{4}{l_1 l_2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \phi(x,y)\ v_{nm}(x,y)\ dxdy. \tag{3.120}$$

По аналогии с леммой 3.2 можно доказать, что для начальных функций $\phi \in V_0$ ряд (3.118) с коэффициентами (3.120) сходится абсолютно и равномерно и определяет решение смешанной задачи (3.99)-(3.101), принадлежащее пространству V.

1.4. Краевые задачи для эллиптических уравнений

1.4.1. Формулы Грина для оператора Лапласа

Гармонические функции. Для простоты изложения ограничимся трехмерным евклидовым пространством R^3 с декартовой системой координат $Oxyz$. В пространстве R^3 рассмотрим простейшее эллиптическое уравнение – уравнение Лапласа:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{4.1}$$

В плоском случае R^2 имеем уравнение (1.83).

Выделим ограниченную связную область $D \subset R^3$. Пусть граница Γ области $D(\Gamma = \partial D)$ представляет собой поверхность без самопересечений, $\Gamma \in C^1$ (см. определение 2.1).

Определение 4.1. Функция $u = u(x,y,z)$ называется гармонической в области D, если $u \in C^2(D)$ и удовлетворяет уравнению Лапласа (4.1) в области D.

В параграфе 1.6 был описан метод построения гармонических функций на плоскости R^2. Укажем на исключительную роль при исследовании краевых задач для уравнения (4.1) фундаментального решения (1.86).

Первая, вторая и третья формулы Грина. При изучении свойств решений уравнения (4.1) важную роль играют формулы Грина, связывающие значения функций на границе Γ и внутри области D.

Для вывода воспользуемся формулой векторного анализа

$$div\left(a\vec{A}\right) = a\,\overrightarrow{div\,A} + \left(grad\ a\,, \vec{A}\right), \tag{4.2}$$

где $a = a(x,y,z)$ - скалярная функция; $\vec{A} = \left(A_1(x,y,z), A_2(x,y,z), A_3(x,y,z)\right)$ - вектор-функция, то есть векторное поле в области D; $\left(grad\ \ a, \vec{A}\right)$ - скалярное произведение векторов $grad\ a$ и $\vec{A}$.

Дифференциальные операторы определяются формулами

$$grad\ a = \left(\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial a}{\partial z}\right), \qquad div\ \ \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}.$$

Выберем $a = v(x,y,z)$, $\vec{A} = grad\, u\,(x,y,z)$, где произвольные функции $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$, $\Delta u \in L_2(D)$, $v \in C^1(\bar{D})$, $\bar{D} = D \cup \Gamma$.

После подстановки в (4.2) получим

$$div(v\, grad\, u) = v\Delta u + (grad\, v\, , grad\, u),$$

так как $div(grad\, u) = \Delta u$.

Проинтегрируем полученное тождество по области D, тогда

$$\iiint_D div(v\, grad\, u)\, dV = \iiint_D [v\Delta u + (grad\, v\, , grad\, u)]\ dV.$$

Преобразуем интеграл слева к поверхностному интегралу, используя формулу Остроградского-Гаусса

$$\iiint_D \overrightarrow{div\ B}\, dV = \iint_\Gamma (\vec{B}, \vec{n}) dS,$$

где $\vec{n}$- внешняя единичная нормаль к поверхности Γ, а $\vec{B} = v\, grad\, u$. В результате получим первую формулу Грина:

$$\iint_\Gamma v(P) \frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}_P} dS_P = \iiint_D \left[v(Q)\Delta u(Q) + \big(grad\, v\,(Q), grad\, u\,(Q)\big)\right] dV_Q, \qquad (4.3)$$

где $P \in \Gamma, Q \in D;\ \vec{n}_P = (n_1, n_2, n_3)$ - нормаль к поверхности Γ в точке P; $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}_P} = (grad\, u\, , \vec{n}_P) = \frac{\partial u(P)}{\partial x} n_1 + \frac{\partial u(P)}{\partial y} n_2 + \frac{\partial u(P)}{\partial z} n_3$ - производная по нормали; $v \in C^1(\bar{D}),\ u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D}),\ \Delta u \in L_2(D)$.

В формуле (4.3) поменяем местами функции $u,\ v$ и вычтем из формулы (4.3), получим вторую формулу Грина

$$\iint_\Gamma \left[u(P) \frac{\partial v(P)}{\partial \vec{n}_p} - v(P) \frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}_p}\right] dS_p = \iiint_D [u(Q)\Delta v(Q) - v(Q)\Delta u(Q)]\, dV_Q, \qquad (4.4)$$

где $u,\ v \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D});\ \Delta u,\ \Delta v \in L_2(D)$.

В равенстве (4.3) положим $v = u$, получим формулу

$$\iint_\Gamma u(P) \frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}_P} dS_P = \iiint_D [u(Q)\Delta u(Q) + |grad\, u\,(Q)|^2]\, dV_Q, \qquad (4.5)$$

называемую третьей формулой Грина

1.4.2. Интегральная формула Грина

В теории гармонических функций важную роль играет интегральная формула Грина, в которой значение функции в любой внутренней точке M, области D выражается через значения функции на границе Γ области D. Для вывода такой формулы во второй формуле Грина (4.4) функцию $\upsilon(Q)$ выберем специальным образом, положив ее равной фундаментальному решению (1.86), то есть приняв $\upsilon(Q) = \frac{1}{4\pi R_{QM}}$, где $M \in D$. Подстановка такой функции в (4.4) неправомочна, так как функция $\upsilon(Q)$ имеет особенность в точке $Q = M$. В связи с этим опишем вокруг точки M сферу Γ_ε радиуса ε и рассмотрим область D_ε, заключенную между поверхностями Γ_ε и Γ (см. рисунок 4.1).

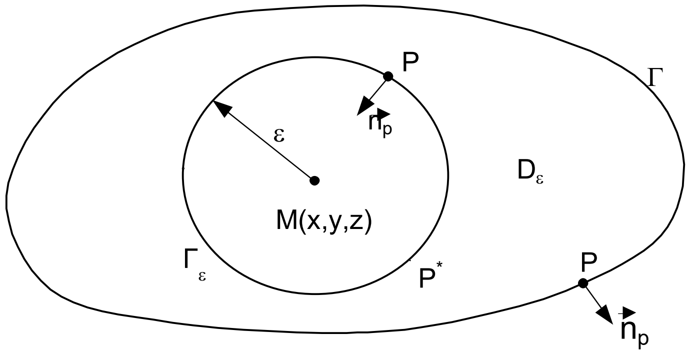


Рисунок 4.1.

В области D_ε выбранная функция $\upsilon(Q)$, $Q \in D_\varepsilon$, принадлежит пространству $C^2(D_\varepsilon) \cap C^1(\overline{D}_\varepsilon)$, поэтому для области D_ε имеет место вторая формула Грина:

$$\iint_{\Gamma \cup \Gamma_\varepsilon} \left[u(P) \frac{\partial \upsilon(P)}{\partial \vec{n}_P} - \upsilon(P) \frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}_P} \right] dS_P = \iiint_{D_\varepsilon} [u(Q) \Delta \upsilon(Q) - \upsilon(Q) \Delta u(Q)] \, dV_Q . \qquad (4.6)$$

Здесь $\Delta \upsilon = 0$, так как $\upsilon(Q)$ - фундаментальное решение уравнения Лапласа. Преобразуем интеграл по сфере Γ_ε:

$$I = I_1 - I_2 = \iint_{\Gamma_\varepsilon} \left[u(P) \frac{\partial \upsilon(P)}{\partial \vec{n}_P} - \upsilon(P) \frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}_P} \right] dS_P . \qquad (4.7)$$

Вычислим

$$\frac{\partial \upsilon(P)}{\partial \vec{n}_P} = \frac{\partial}{\partial \vec{n}_P}\left(\frac{1}{4\pi R_{PM}}\right) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial R_{PM}}\left(\frac{1}{R_{PM}}\right) = \frac{1}{4\pi R_{PM}^2}.$$

Точка $P \in \Gamma_\varepsilon$, поэтому $R_{PM} = \varepsilon$. Таким образом, в выражении (4.7)

$$\frac{\partial \upsilon(P)}{\partial \vec{n}_P} = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2},\ \upsilon(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}.$$

Преобразуем каждый интеграл в отдельности, используя теорему о среднем:

$$I_1 = \iint_{\Gamma_\varepsilon} u(P)\frac{\partial \upsilon(P)}{\partial \vec{n}_P} dS_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\iint_{\Gamma_\varepsilon} u(P) dS_P = \frac{u(P^*)}{4\pi\varepsilon^2}\iint_{\Gamma_\varepsilon} dS_P = u(P^*),$$

$$I_2 = \iint_{\Gamma_\varepsilon} \upsilon(P)\frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}_P} dS_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}_P} dS_P = \varepsilon\frac{\partial u(P^*)}{\partial \vec{n}_P},$$

где P^* - некоторая точка на сфере Γ_ε.

Полученные выражения подставим в (4.6), тогда

$$\int_\Gamma \left(u\frac{\partial \upsilon}{\partial \vec{n}_P} - \upsilon\frac{\partial u}{\partial \vec{n}_p}\right) dS + u(P^*) - \varepsilon\frac{\partial u(P^*)}{\partial \vec{n}_P} = -\iiint_{D_\varepsilon} \upsilon \Delta u dV.$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. Так как $P^* \to M$ при $\varepsilon \to 0$, то $u(P^*) \to u(M)$ в силу непрерывности функции u. В результате получим интегральную формулу Грина:

$$u(M) = \frac{1}{4\pi}\iint_\Gamma \left[\frac{1}{R_{MP}}\frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial \vec{n}_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\right] dS_P - \frac{1}{4\pi}\iiint_D \frac{\Delta u(Q)}{R_{MQ}} dV_Q, \tag{4.8}$$

где u - любая функция из пространства $C^2(D) \cap C^1(\bar{D}),\ \Delta u \in L_2(D)$, $\vec{n}_P$ – внешняя единичная нормаль к поверхности Γ в точке P.

Если u - гармоническая функция ($\Delta u = 0$), тогда получим интегральную формулу для гармонических функций:

$$u(M) = \frac{1}{4\pi}\iint_\Gamma \left[\frac{1}{R_{MP}}\frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial \vec{n}_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\right] dS_P. \tag{4.9}$$

Замечание 4.1. Формула (4.8) может быть получена с использо-ванием обобщенных функций. Действительно, для фундаментального решения (1.86) имеет место формула (2.91), то есть

$$\Delta v(Q) = -\delta(Q,M), \tag{4.10}$$

где $\delta(Q,M)$- δ - функция Дирака.

Подставляя (4.10) в формулу (4.4) и используя свойство δ - функции (2.71), вычисляем интеграл:

$$\iiint_D u(Q)\Delta v(Q)dV_Q = -\iiint_D u(Q)\delta(Q,M)dV_Q = -u(M).$$

В результате из второй формулы Грина (4.4) следует формула (4.8).

Замечание 4.2. Заменив фундаментальное решение (1.86) на функцию (1.84), получим интегральную формулу Грина в плоском случае R^2:

$$u(M) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \left[ln\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial \vec{n}_P} ln\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\right] dl_P - \frac{1}{2\pi}\iint_\Omega ln\left(\frac{1}{R_{MQ}}\right)\Delta u(Q)dS_Q,$$

где Ω - плоская область, $\gamma = \partial\Omega$; $\vec{n}_P$ – внешняя единичная нормаль к контуру γ в точке P.

1.4.3. Свойства гармонических функций

Свойство 4.1. Пусть $u(x,y,z)$ - гармоническая функция в области D, тогда функция u любое число раз непрерывно дифференцируема по координатам $x,\ y,\ z$ в области D, то есть $u \in C^\infty(D)$.

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что $u \in C^2(\bar{D})$. Воспользуемся интегральной формулой Грина (4.9):

$$u(M) = \frac{1}{4\pi}\iint_\Gamma \left[\frac{1}{R_{MP}}\frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial \vec{n}_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\right] dS_P \equiv \iint_\Gamma F(M,P)dS_P, \tag{4.11}$$

где $M = (x,\ y,\ z)$ - внутренняя точка области D. Докажем дифференцируемость функции (4.11) в окрестности любой точки $M_0 \in D$. Пусть $\bar{K}_\varepsilon^{M_0}$ - замкнутая шаровая область радиуса ε, описанная вокруг точки M_0, $\bar{K}_\varepsilon^{M_0} \subset D$. В подынтегральном выражении (4.11) функция $\frac{1}{R_{MP}}$ любое число раз непрерывно дифференцируема по координатам $x,\ y,\ z$ точки $M \in \bar{K}_\varepsilon^{M_0}$, так как $P \in \Gamma$, а расстояние $R_{MP} \neq 0$. Следовательно, всевозможные производные

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}F(M,P)}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}}$$

являются непрерывными функциями на множестве точек $M \in \bar{K}_\varepsilon^{M_0}$ и $P \in \Gamma$. На основании соответствующей теоремы из математического анализа выражение (4.11) дифференцируемо и имеет место формула

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} u(M)}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2} \partial z^{\alpha_3}} = \iint_\Gamma \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} F(M,P)}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2} \partial z^{\alpha_3}} dS_P.$$

Из произвольности точки M_0 следует, что $u \in C^\infty(D)$.

Свойство 4.2. Теорема о нормальной производной. Пусть любая функция $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ и является гармонической в области D, тогда

$$\iint_\Gamma \frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}_P} dS_P = 0, \qquad \Gamma = \partial D. \tag{4.12}$$

Доказательство. Воспользуемся первой формулой Грина (4.3), где произвольная функция $v \in C^1(\bar{D})$. Положим $v \equiv 1$, тогда $grad v = 0$; $\Delta u = 0$ из условия теоремы. В результате формула (4.3) преобразуется к виду (4.12).

Рассмотрим произвольную точку $M \in D$. Опишем вокруг точки M сферу Γ_a^M радиуса a, такую, что замкнутый шар $\bar{K}_a^M$ сферы Γ_a^M целиком содержится внутри области D. Выведем формулу, выражающую значение гармонической функции u в центре сферы, то есть в точке M, через значения на сфере Γ_a^M.

Свойство 4.3. Теорема о среднем. Пусть u - гармоническая функция в области D, тогда для $\forall M \in D$ и $\forall$сферы Γ_a^M, $\bar{K}_a^M \subset D$, имеет место формула

$$u(M) = \frac{1}{|\Gamma_a^M|} \iint_{\Gamma_a^M} u(P)\, dS_P, \tag{4.13}$$

где $|\Gamma_a^M| = 4\pi a^2$ - площадь сферы.

Доказательство. Рассмотрим интегральную формулу Грина (4.9) для сферы Γ_a^M, взяв в качестве точки M центр сферы:

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma_a^M} \left[\frac{1}{R_{MP}} \frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}_P} - u(P) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_P} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) \right] dS_P.$$

Так как $P \in \Gamma_a^M$, то $R_{MP} = a$, $\quad \frac{\partial}{\partial \vec{n}_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) = \frac{\partial}{\partial R_{MP}}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) = -\frac{1}{R^2{}_{MP}} = -\frac{1}{a^2}$.
В результате

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma_a^M} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}_P} + \frac{1}{a^2} u(P) \right) dS_P.$$

Учитывая соотношение (4.12) для поверхности $\Gamma = \Gamma_a^M$, получаем требуемую формулу (4.13).

В плоском случае с учетом замечания 4.2 имеем формулу

$$\boldsymbol{u(M) = \frac{1}{2\pi a}\int_{\gamma_a^M} u(P)dl_P}.$$

1.4.4. Принцип максимума и минимума для гармонических функций

Рассмотрим связную ограниченную область $D \subset R^3$ с границей $\Gamma = \partial D$. Будем считать для определенности, что $\Gamma \in C$. В области $\bar{D}$ задана функция $u = u(x, y, z) = u(M)$.

Свойство 4.4. Принцип максимума и минимума. Пусть $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ и удовлетворяет в области D уравнению Лапласа $\Delta u = 0$. Тогда функция u достигает своего максимального и минимального значений на границе Γ, то есть

$$\min_{M\in\Gamma} u(M) \leq \underset{M\in\bar{D}}{u(M)} \leq \max_{M\in\Gamma} u(M).$$

Доказательство. От противного. Пусть максимум функции u достигается в некоторой внутренней точке $M_0 \in D$, то есть

$$u(M_0) \geq u(M) \text{ для } \forall M \in \bar{D}. \tag{4.14}$$

Опишем вокруг точки M_0 сферу $\Gamma_a^{M_0}$ радиуса a, которая вместе со своим шаром принадлежит области D (см. рисунок 4.2)

Для сферы $\Gamma_a^{M_0}$ имеет место формула (4.13) из теоремы о среднем:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2}\iint_{\Gamma_a^{M_0}} u(P)dS_P.$$

Представим эту формулу в виде

$$\iint_{\Gamma_a^{M_0}} w(P)dS_P = 0, \tag{4.15}$$

где функция $w(P) = u(M_0) - u(P) \geq 0$ в силу неравенства (4.14).

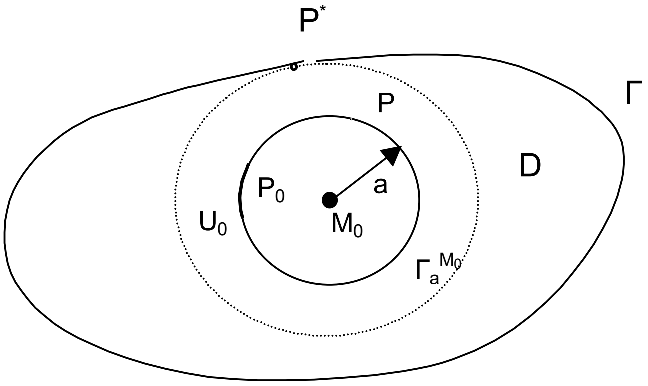


Рисунок 4.2.

Покажем, что $w(P)=0$ для $\forall P\in\Gamma_a^{M_0}$. От противного, пусть существует точка $P_0\in\Gamma_a^{M_0}$ такая, что $w(P_0)>0$. Функция $w(P)$ непрерывная, поэтому существует окрестность U_0 точки P_0, то есть $P_0\in U_0\subset\Gamma_a^{M_0}$, для которой $w(P)>0$ при$P\in U_0$. Поэтому

$$\iint_{\Gamma_a^{M_0}} w(P)dS_P=\iint_{U_0} w(P)dS_P+\iint_{\Gamma_a^{M_0}/U_0} w(P)dS_P>0,$$

что противоречит условию (4.15). Таким образом, $u(P)=u(M_0)$ при $P\in\Gamma_a^{M_0}$. Так как радиус a произвольный, то будем его увеличивать до касания сферы $\Gamma_a^{M_0}$ с границей Γ в точке P^*. В результате $u(P^*)=u(M_0)$, то есть максимум достигается в точке P^* на границе Γ.

Для минимума доказательство проводится аналогично.

Заметим, что принцип максимума и минимума и другие свойства имеют место для гармонических функций в пространстве R^n произвольной размерности.

Приведем некоторые следствия из принципа максимума и минимума, аналогичные следствиям 2.1-2.4.

Следствие 4.1. Пусть функции $u,v\in C^2(D)\cap C(\overline{D})$ и являются гармоническими в D. Если $u(P)\geq v(P)$ для $\forall P\in\Gamma$, то $u(M)\geq v(M)$ для $\forall M\in\overline{D}$.

Следствие 4.2. Пусть функции $u_1,u_2,u_3\in C^2(D)\cap C(\overline{D})$ и являются гармоническими в D. Если $u_3(P)\geq u_2(P)\geq u_1(P)$ для $\forall P\in\Gamma$, то $u_3(M)\geq u_2(M)\geq u_1(M)$ для $\forall M\in\overline{D}$.

Следствие 4.3. Пусть функции $u,v\in C^2(D)\cap C(\overline{D})$ и являются гармоническими в D. Если $|u(P)|\leq v(P)$ для $\forall P\in\Gamma$, то $|u(M)|\leq v(M)$ для $\forall M\in\overline{D}$.

Следствие 4.4. Пусть функция $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ и является гармонической в области D. Если $|u(P)| \le \varepsilon$, $\varepsilon - const$, для $\forall P \in \Gamma$, то $|u(M)| \le \varepsilon$ для $\forall M \in \overline{D}$.

1.4.5. Задача Дирихле для уравнения Пуассона

Изучим еще один класс задач, называемых краевыми задачами для эллиптических уравнений. Сначала обратимся к общей постановке таких задач. Рассмотрим ограниченную связную область $D \in R^n$ с граничной поверхностью $\Gamma = \partial D$, охватывающей область D (см. рис. 4.3). Пусть для определенности $\Gamma \in C^2$. В области D зададим эллиптическое уравнение второго порядка с достаточно гладкими коэффициентами:

$$L(u) \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\vec{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(\vec{x})u = f(\vec{x}), \qquad (4.16)$$

где $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$.

Потребуем, чтобы искомая функция u на границе Γ принимала заданные значения, то есть

$$u(\vec{x})|_{\vec{x}\in\Gamma} = \phi(\vec{x}),$$

где $\phi(\vec{x})$ - заданная функция на поверхности Γ.

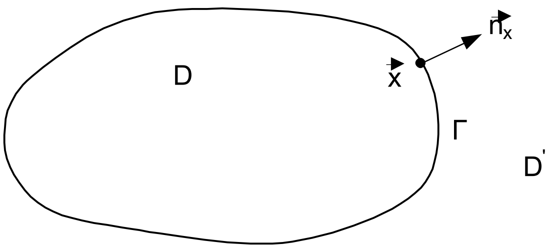


Рисунок 4.3.

Задача Дирихле.

$$L(u) = f(\vec{x}) \quad \text{в области} \quad D, \qquad (4.17)$$

$$u(\vec{x})|_{\vec{x}\in\Gamma} = \phi(\vec{x}), \qquad (4.18)$$

где D – ограниченная область.

Требуется найти функцию $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$, которая удовлетворяет уравнению (4.17) в области D и граничному условию (4.18) на граничной поверхности Γ. Задача Дирихле называется также первой краевой задачей.

В дальнейшем рассмотрим частный случай задачи (4.17), (4.18), когда уравнение (4.17) является уравнением Пуассона в трехмерном пространстве R^3 с координатами $x, \ y, \ z$, а область $D \subset R^3$.

Внутренняя задача Дирихле.

$$\boldsymbol{\Delta u} \equiv \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{z}^2} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \quad \text{в области } \boldsymbol{D}, \tag{4.19}$$

$$u(P)|_{P \in \Gamma} = \phi(P), \tag{4.20}$$

где D – ограниченная область.

Решение $u(M) = u(x, y, z) \in U = C^2(D) \cap C(\overline{D})$ называется классическим решением задачи (4.19), (4.20).

Возникает естественный вопрос о корректности задачи (4.19), (4.20), состоящей в следующем: требуется выделить пространство V граничных функций ϕ, для которых решение задачи существует, единственно в пространстве U и непрерывно зависит от граничных функций. Наиболее просто решаются вопросы о единственности и непрерывной зависимости.

Теорема 4.1. Если решение $u \in U = C^2(D) \cap C(\overline{D})$ задачи Дирихле (4.19), (4.20) существует, тогда оно единственно в пространстве U.

Доказательство. Пусть существуют два решения $u_1, u_2 \in U$. Образуем функцию $v = u_2 - u_1 \in U$. Очевидно, что выполнены условия:

$\Delta v = 0$ в области D,

$$v(P)|_{P \in \Gamma} = 0. \tag{4.21}$$

Так как функция v гармоническая в области D, то для нее выполнен принцип максимума и минимума (см. свойство 4.4). Учитывая равенство (4.21), получаем $\max\limits_{\overline{D}} v = \max\limits_{\Gamma} v = 0$, $\min\limits_{\overline{D}} v = \min\limits_{\Gamma} v = 0$. Следует $v \equiv 0$ в D, значит $u_1 = u_2$.

Теорема 4.2. Решение задачи Дирихле (4.19), (4.20), в предположении его существования в пространстве U, непрерывно зависит от граничных функций ϕ.

Доказательство. Рассмотрим две вспомогательные задачи (4.19), (4.20) с различными граничными функциями ϕ_i:

$$\Delta u_i = f(x,y,z) \text{ в области } D, \quad u_i(P)|_{P\in\Gamma} = \phi_i(P); \quad i = 1,\ 2.$$

Пусть функции ϕ_i мало различаются, то есть $|\phi_2(P) - \phi_1(P)| \le \varepsilon$ для $\forall P \in \Gamma$. Образуем разность $v = u_2 - u_1 \in U$, для которой выполнены условия $\Delta v = 0$ в D,

$$v(P)|_{P\in\Gamma} = \overline{\phi}(P),$$

где $\overline{\phi} = \phi_2 - \phi_1$.

Функция v гармоническая, поэтому воспользуемся следствием 4.4. Из условия $|\overline{\phi}(P)| \le \varepsilon$ следует $|v(M)| \le \varepsilon$ при $M \in \overline{D}$. Таким образом, по $\forall \varepsilon > 0$ найдено $\delta = \varepsilon$, что как только $|\phi_2(p) - \phi_1(P)| \le \delta$, $P \in \Gamma$, тогда $|u_2(M) - u_1(M)| \le \varepsilon$ при $M \in D$. Непрерывная зависимость доказана.

Теорема Шаудера. Пусть в уравнении (4.16) коэффициенты $a_{ij}(\vec{x}),\ a_i(\vec{x}),\ a(x),\ f(\vec{x}) \in C^{m+\nu}(\overline{D}),\ \ m \ge 0,\ \ a(x) \le 0$, граничная поверхность $\Gamma \in C^{m+\nu+2}$, граничная функция $\phi(\vec{x}) \in C^{m+\nu+2}(\Gamma)$. Пусть выполнено неравенство равномерной эллиптичности уравнения (4.17):

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\vec{x})\, \xi_i \xi_j \ge C \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad C > 0,$$

тогда существует единственное решение задачи (4.17), (4.18) $u \in C^{m+\nu+2}(\overline{D})$.

Сформулированные теоремы позволяют заключить, что в соответствующих пространствах U и V задача Дирихле (4.19), (4.20) для уравнения Пуассона поставлена корректно.

Рассмотрим область $D' = R^3 \backslash \overline{D}$, внешнюю по отношению к ограниченной области $D \subset R^3$. Для бесконечной области D' поставим задачу Дирихле для уравнения Пуассона. В области D' решение уравнения Пуассона может неограниченно возрастать на бесконечности, но потенциал u, описывающий электрическое поле зарядов, расположенных в окрестности границы Γ, не может стремиться к бесконечности. Поэтому из физических соображений необходимо наложить условие $u(M) \to 0$ при $M \to \infty$.

Внешняя задача Дирихле в $\boldsymbol{R^3}$.

$$\Delta u = f(x,y,z) \quad \text{в области } D', \tag{4.22}$$

$$u(P)|_{P\in\Gamma} = \phi(P), \tag{4.23}$$

$$u(M) \rightrightarrows 0 \quad \text{при } M \to \infty. \tag{4.24}$$

Требуется найти функцию $u \in C^2(D') \cap C(\overline{D'})$, которая удовлетворяет уравнению (4.22) в области D', граничному условию (4.23) и равномерно стремится к нулю на бесконечности.

Заметим, что для задачи (4.22)-(4.24) имеют место теоремы единственности и непрерывной зависимости. Если опустить условие на бесконечности (4.24), тогда задача может иметь неединственное решение.

Для внешней задачи Дирихле на плоскости R^2 условие (4.24) необходимо заменить на условие ограниченности решения u в области D'.

1.4.6. Задача Неймана для уравнения Пуассона

Рассмотрим ограниченную область $D \subset R^3$ с границей $\Gamma \in C^2$. Для области D поставим краевую задачу для уравнения Пуассона, когда на поверхности Γ задана производная функции u.

Внутренняя задача Неймана.

$$\boldsymbol{\Delta u} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \quad \text{в } D, \qquad f \in C(\overline{D}), \tag{4.25}$$

$$\left.\frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}_P}\right|_{P \in \Gamma} = \psi(P), \qquad \psi \in C(\Gamma), \tag{4.26}$$

где $\vec{n}_P$- внешняя единичная нормаль к поверхности Γ в точке $P \in \Gamma$.

Требуется найти функцию $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, которая удовлетворяет уравнению (4.25) в области D и граничному условию (4.26) на граничной поверхности Γ области D.

Задача Неймана называется также второй краевой задачей.

Теорема 4.3. Пусть функция $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ является решением задачи (4.25), (4.26), тогда

$$\iint_\Gamma \psi(P)\, dS_P = \iiint_D f(Q) dV_Q, \tag{4.27}$$

то есть соотношение (4.27) является необходимым условием разрешимости задачи Неймана (4.25), (4.26).

Доказательство. Воспользуемся первой формулой Грина (4.3), рассмотрев в качестве функции u решение задачи (4.25), (4.26) и положив $v \equiv 1$. В результате

$$\iint_\Gamma \frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}_P} dS_P = \iiint_D \Delta u(Q) dV_Q.$$

Учитывая равенства (4.25), (4.26), получаем требуемое соотношение (4.27).

Теорема 4.4. Если существует решение $u \in U = C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ внутренней задачи Неймана (4.25), (4.26), тогда оно единственно с точностью до постоянного слагаемого.

Доказательство. Легко проверить, что если u решение задачи (4.25), (4.26), то $u + C$, $C - const$, также решение. Покажем, что других решений нет. Предположим, что существуют два линейно независимых решения $u_1, u_2 \in U$. Образуем разность $v = u_2 - u_1 \in U$. Для функции v выполнены условия:

$\Delta v = 0$ в области D,

$$\left.\frac{\partial v(P)}{\partial \vec{n}_P}\right|_{P\in\Gamma} = 0. \qquad (4.28)$$

Воспользуемся третьей формулой Грина (4.5), в которой положим $u = v$, тогда, учитывая условия (4.28), получаем

$$\iiint_D |grad\, v\,(Q)|^2 dV_Q = 0.$$

Следовательно, $|grad\, v|^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 = 0$ в области D. Заключаем, что $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \equiv 0,\quad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \equiv 0,\quad \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) \equiv 0,$ тогда $v = C - const$. Таким образом $u_2 = u_1 + C$.

Доказанные теоремы показывают, что внутренняя задача Неймана поставлена некорректно, то есть не для всех непрерывных граничных функций ψ из условия (4.26) существует решение задачи, а если существует, то оно не единственное.

Внешняя задача Неймана в $\boldsymbol{R^3}$.

$$\Delta u = f(x, y, z) \quad \text{в области } D', \qquad (4.29)$$

$$\left.\frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}_P}\right|_{P\in\Gamma} = \psi(P), \qquad (4.30)$$

$$u(M) \rightrightarrows 0 \quad \text{при } M \to \infty. \qquad (4.31)$$

Теорема 4.5. Если существует решение $u \in U = C^2(D') \cap C^1(\overline{D'})$ внешней задачи Неймана (4.29)-(4.31), тогда оно единственно в пространстве U.

Доказательство. Пусть существуют два решения u_1, u_2 из пространства U. Образуем разность $v = u_2 - u_1 \in U$. Очевидно, что для функции v выполнены условия:

$$\Delta v = 0 \quad \text{в } D',$$
$$\left.\frac{\partial v(P)}{\partial \vec{n}_P}\right|_{P \in \Gamma} = 0, \tag{4.32}$$

$$v(M) \rightrightarrows 0 \quad \text{при } M \to \infty. \tag{4.33}$$

Воспользуемся третьей формулой Грина (4.5):

$$\iint_\Gamma v(P)\frac{\partial v(P)}{\partial \vec{n}_P} dS_P = \iiint_{D'} (v(Q)\Delta v(Q) + |grad\, v\,(Q)|^2)\ dV_Q,$$

которая справедлива для бесконечной области D', если гармоническая функция v равномерно стремится к нулю на бесконечности, то есть является регулярной на бесконечности [1, с. 301].

Учитывая (4.32), получим

$$\iiint_{D'} |grad\, v\,(Q)|^2 dV_Q = 0.$$

Как и в предыдущей теореме, следует $v = C - \text{const}$. В силу условия (4.33) $C = 0$. Следовательно, $v = 0$, то есть $u_1 \equiv u_2$ в области D'. Единственность доказана.

1.4.7. Решение задачи Дирихле для круга методом разделения переменных

На плоскости R^2 с координатами x, y рассмотрим круг Ω радиуса R, описанный вокруг начала координат O. Граница круга – окружность $\Gamma = \partial\Omega$ (см. рисунок 4.4). Для круга сформулируем внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{в области } \Omega, \tag{4.34}$$

$$u(P)|_{P \in \Gamma} = g(P), \tag{4.35}$$

где $g(P)$ - заданная функция на окружности Γ.

Требуется найти решение $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

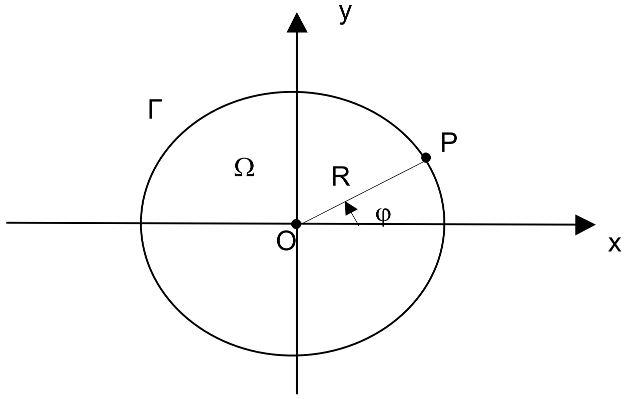


Рисунок 4.4.

В полярных координатах ρ, ϕ: $x = \rho \cos\phi$, $y = \rho \sin\phi$, $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \phi < 2\pi$, задача (4.34), (4.35) запишется в виде

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0, \quad 0 \le \rho < R, \quad 0 \le \phi \le 2\pi, \tag{4.36}$$

$$u|_{\rho=R} = g(\phi), \quad 0 \le \phi \le 2\pi. \tag{4.37}$$

Задачу (4.36), (4.37) решим методом разделения переменных в полярных координатах. Согласно методу разделения переменных, найдем все решения уравнения Лапласа (4.36) вида

$$u = P(\rho)\Phi(\phi). \tag{4.38}$$

Подставив (4.38) в уравнение (4.36), получим равенство

$$P''(\rho)\Phi(\phi) + \frac{1}{\rho}P'(\rho)\Phi(\phi) + \frac{1}{\rho^2}P(\rho)\Phi''(\phi) = 0.$$

Разделим это равенство на $\frac{P(\rho)\Phi(\phi)}{\rho^2}$, отделяя функции зависящие от ρ и функции зависящие от ϕ, тогда

$$\frac{\rho^2 P''(\rho)}{P(\rho)} + \frac{\rho P'(\rho)}{P(\rho)} = -\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)}.$$

Выражение слева зависит только от ρ, а выражение справа - только от ϕ, поэтому это равенство имеет место тогда и только тогда, когда эти выражения являются постоянными, то есть

$$\frac{\rho^2 P''(\rho)}{P(\rho)} + \frac{\rho P'(\rho)}{P(\rho)} = -\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = \mu^2,$$

где μ - постоянная разделения.

В результате получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\Phi'' + \mu^2 \Phi = 0,$$
$$\rho^2 P'' + \rho P' - \mu^2 P = 0. \tag{4.39}$$

Рассмотрим случай, когда $\mu \neq 0$. Общие решения уравнений (4.39) определяются формулами

$$\Phi(\phi) = A\cos(\mu\phi) + B\sin(\mu\phi),$$
$$P(\rho) = C\rho^{\mu} + D\rho^{-\mu}, \tag{4.40}$$

где A, B, C, D - произвольные постоянные.

Рассмотрим случай, когда $\mu = 0$. Уравнения (4.39) примут вид

$$\Phi'' = 0, \qquad \rho P'' + P' = 0.$$

Запишем общие решения этих уравнений:

$$\Phi(\phi) = A_0\phi + B_0, \qquad P(\rho) = C_0 \ln\rho + D_0, \tag{4.41}$$

где $A_0,\ B_0,\ C_0,\ D_0$- произвольные постоянные.

После подстановки функций (4.40), (4.41) в (4.38) получим частные решения уравнения Лапласа в полярных координатах:

$$u(\rho,\phi) = (C\rho^{\mu} + D\rho^{-\mu})(A\cos(\mu\phi) + B\sin(\mu\phi)),$$
$$u(\rho,\phi) = (C_0 \ln\rho + D_0)(A_0\phi + B_0). \tag{4.42}$$

По смыслу задачи (4.36), (4.37) решение u должно быть периодическим по углу ϕ с периодом 2π, то есть $u(\rho,\phi+2\pi) = u(\rho,\phi)$. Условие периодичности для функций (4.42) будет выполнено, если $A_0 = 0,\ \mu = n = 1,\ 2,\ \ldots$.

В результате получим последовательность частных периодических решений уравнения (4.36):

$$u = u_n(\rho, \phi) \equiv (C_n\rho^n + D_n\rho^{-n})(A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi)), \quad n = 1,\ 2,\ \dots$$
$$u = u_0(\rho, \phi) \equiv C_0 \ln \rho + D_0. \tag{4.43}$$

Образуем общее решение уравнения (4.36) в виде линейной комбинации частных решений (4.43):

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = C_0 \ln \rho + D_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\rho^n + D_n\rho^{-n})(A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi)).$$

По смыслу задачи решение u должно быть ограниченным в центре круга $\rho = 0$. В связи с этим необходимо положить $C_0 = 0,\ D_n = 0$.

В результате получим представление решения задачи (4.36), (4.37) в виде разложения в ряд

$$u = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi)). \tag{4.44}$$

Неизвестные коэффициенты D_0, A_n, B_n определим из граничного условия (4.37). Подставляя (4.44) в (4.37), получим

$$u|_{\rho=R} = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi)) = g(\phi). \tag{4.45}$$

Разложим функцию $g(\phi)$ в ряд Фурье

$$g(\phi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos(n\phi) + \beta_n \sin(n\phi)), \tag{4.46}$$

где

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\psi) \cos(n\psi)\, d\psi, \qquad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\psi) \sin(n\psi)\, d\psi. \tag{4.47}$$

Приравнивая ряды (4.45) и (4.46), вычисляем коэффициенты

$$D_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = \frac{\alpha_n}{R^n}, \quad B_n = \frac{\beta_n}{R^n}.$$

Подставив коэффициенты в разложение (4.44), получим решение исходной задачи Дирихле (4.34), (4.35):

$$u = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n (\alpha_n \cos(n\phi) + \beta_n \sin(n\phi)). \tag{4.48}$$

Можно показать, что если граничная функция $g \in C(\Gamma)$ и $g'(\phi) \in L_2(0,2\pi)$, то ряд (4.48) равномерно сходится и $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Если подставить интегралы (4.47) в (4.48) и просуммировать ряды, то получим решение задачи Дирихле для круга в виде интеграла

$$u(\rho,\phi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\psi)\,\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2\rho R\cos(\phi-\psi)+\rho^2}\,d\psi,$$

называемого интегралом Пуассона.

Аналогично показывается, что решение внешней задачи Дирихле для круга в области $\Omega'(R<\rho<\infty)$ определяется рядом

$$u=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{\rho}\right)^n(\alpha_n\cos(n\phi)+\beta_n\sin(n\phi)).$$

2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Перечень заданий для лабораторных занятий

Задание 1. Привести к каноническому виду уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + cu = f,$$

если $n = 3,\ f = 0,\ a_{ij} = a_{ji}$ и коэффициенты определены в таблице:

№	a_{11}	a_{22}	a_{33}	a_{12}	a_{13}	a_{23}	b_1	b_2	b_3	c
1	1	2	2	1	-1	0	0	0	0	0
2	1	0	-1	1	-2	-3	0	0	0	0
3	2	2	-6	3	5	2	0	0	0	0
4	1	2	0	1	0	-1	0	0	3	-1
5	3	4	5	1	0	2	0	0	0	0
6	1	2	5	1	0	2	0	0	0	0
7	1	4	1	-2	1	0	3	0	0	0
8	0	0	0	3/2	-1	-1/2	0	0	0	-1
9	1	3	3	-1	-1	-1	0	0	0	-8
10	1	1	1	3	1	1	2	2	2	4
11	2	5	2	-3	-2	3	0	0	0	-3
12	0	3	0	-1	0	-1	0	0	0	4
13	1	4	1	2	1	2	0	0	0	2
14	1	2	9	2	3	6	-2	-4	-6	0
15	0	0	0	1	-1/2	1	0	0	0	-1
16	0	0	0	1/2	-1/2	-1/2	0	0	0	0
17	0	0	0	1/2	-1	1/2	1	1/2	0	0
18	0	0	1	1/2	0	0	1	-1	0	0

Задание 2. Привести к каноническому виду уравнение

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + +b_2u_y + cu = f$$

и упростить, если коэффициенты постоянны и определены следующим образом

№	a_{11}	$2a_{12}$	a_{22}	b_1	b_2	c	f
1	1	4	5	1	1	1	0
2	1	-6	9	-1	2	0	0
3	0	2	-4	1	-2	1	x
4	0	1	2	-1	4	1	0
5	2	2	1	4	4	1	0
6	1	2	1	3	-5	4	y
7	1	0	1	1	1	-4	0
8	1	1	0	0	-1	-10	$-4x$
9	3	1	0	3	1	-1	$-y$
10	1	2	5	-2	-2	1	0
11	5	16	16	24	32	64	0
12	1	-2	1	-3	12	27	0
13	2	3	1	7	4	-2	0

14	1	1	-2	-3	-15	27	0
15	9	-6	1	10	-15	50	$2y-x$
16	1	4	10	-24	42	0	$-2(x+y)$
17	1	4	13	3	24	-9	$-9(x+y)$
18	a	$4a$	a	b	c	1	0

Задание 3. Привести к каноническому виду уравнение

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + +b_2u_y + cu = f,$$

если коэффициенты переменные и определены следующим образом

№	a_{11}	$2a_{12}$	a_{22}
1	1	0	x
2	1	0	y
3	x	0	y
4	1	0	xy
5	$sign\, y$	2	1
6	1	2	$1-sign\, y$
7	$sign\, y$	2	$sign\, x$
8	x	0	1
9	y	0	1
10	1	0	$-x$
11	1	0	$-y$
12	y	0	x
13	x	0	$-y$
14	y	0	$-x$
15	1	0	$-xy$
16	xy	0	1
17	xy	0	-1
18	1	2	$sign\, y$

Задание 4. Привести к каноническому виду уравнение

$$a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + +a_{22}(x,y)u_{yy} = 0$$

в каждой из областей, где сохраняется тип уравнения. Коэффициенты уравнения заданы в таблице

№	a_{11}	$2a_{12}$	a_{22}	b_1	b_2	c	f
1	y^2	0	$-x^2$	0	0	0	0
2	x^2	0	$-y^2$	0	0	0	0
3	x^2	0	y^2	0	0	0	0
4	y^2	0	x^2	0	0	0	0

5	y^2	$2xy$	x^2	0	0	0	0
6	$4y^2$	$-e^{2x}$	$-4y^2$	0	0	0	0
7	x^2	$2xy$	y^2	0	0	0	0
8	x^2	$2xy$	$-3y^2$	$-2x$	$4y$	$16x^4$	0
9	$1+x^2$	0	$1+y^2$	x	y	0	0
10	$sin^2 x$	$-2y \sin x$	y^2	0	0	0	0
11	1	0	$(1+y^2)^2$	0	$-2y(1+y^2)$	0	0
12	xy^2	$-2x^2y$	x^2	$-y^2$	0	0	0
13	1	$-2\sin x$	$-\cos^2 x$	0	$-\cos x$	0	0
14	e^{2x}	$2e^{x+y}$	e^{2y}	0	0	$-x$	0
15	1	$-2\sin x$	$2-\cos^2 x$	0	0	0	0
16	y^2	$2y$	1	0	0	0	0
17	x^2	$-2x$	1	0	0	0	0
18	1	$2(1+2x)$	$4x(1+x)$	0	2	0	0

Задание 5. Найти общее решение уравнения

№	Вид уравнения
1	$u_{xy} = f(x,y)$
2	$u_{yy} = f(x,y)$
3	$u_{xy} + au_x = 0$, $a = const$
4	$u_{xy} + a(x)u_x = 0$
5	$u_{xy} + b(y)u_x = 0$
6	$u_{xx} + b(y)u_x = 0$
7	$u_{xy} + a(x,y)u_x = 0$
8	$u_{xx} + a(x,y)u_x = 0$
9	$u_{xy} - xu_x + u = 0$
10	$u_{xy} + u_x + yu_y + (1-y)u = 0$
11	$u_{xy} + xu_x + 2yu_y + 2xyu = 0$
12	$u_{xy} + xu_x - u + \cos y = 0$
13	$u_{xy} + yu_y - u = 0$
14	$ch\, x\, u_{xy} + (sh\, x + y\, ch\, x)u_y - ch\, x\, u = 0$
15	$u_{xy} + u_y + 2x^2y(u_x + u) = 0$
16	$u_{xy} + u_y + x(u_x + u) + x^2y = 0$
17	$u_{xy} + yu_y - u = 0$
18	$u_{xy} - \frac{1}{x-y}u_x + \frac{1}{x-y}u_y = 0$

Задание 6. Найти общее решение уравнения

№	Вид уравнения
1	$yu_{xx} - (y-x)u_{xy} - xu_{yy} = 0$
2	$x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$

3	$3u_{xx}+10u_{xy}+3u_{yy}+u_x+u_y+\frac{1}{16}u-16xe^{-\frac{x+y}{16}}=0$
4	$u_{yy}-2u_{xy}+2u_x-u_y-4e^x=0$
5	$u_{xx}-2\cos x\,u_{xy}-(3+\sin^2 x)u_{yy}+u_x+(\sin x-\cos x-2)u_y=0$
6	$e^{-2x}u_{xx}-e^{-2y}u_{yy}-e^{-2x}u_x+e^{-2y}u_y+8e^y=0$
7	$4y^2u_{xx}+2(1-y^2)u_{xy}-u_{yy}-\frac{2y}{1+y^2}(2u_x-u_y)=0$
8	$u_{xx}+2\cos x\,u_{xy}-\sin^2 x\,u_{yy}-\sin x\,u_y=0$
9	$u_{xx}-2\sin x\,u_{xy}-(3+\cos^2 x)u_{yy}-\cos x\,u_y=0$
10	$u_{xx}+2\sin x\,u_{xy}-\cos^2 x\,u_{yy}+u_x+(\sin x+\cos x+1)u_y=0$
11	$x^2u_{xx}+2xyu_{xy}-3y^2u_{yy}-2xu_x=0$
12	$u_{xx}+2(1+2x)u_{xy}+4x(1+x)u_{yy}+2u_y=0$
13	$yu_{xx}+x(2y-1)u_{xy}-2x^2u_{yy}-\frac{y}{x}u_x+\frac{2x}{1+2y}(u_x+2xu_y)=0$
14	$yu_{xx}-(x+y)u_{xy}+xu_{yy}-\frac{x+y}{x-y}(u_x-u_y)=0$
15	$3u_{xx}-10u_{xy}+3u_{yy}-2u_x+4u_y+\frac{5}{16}u=0$
16	$e^yu_{xy}-u_{yy}+u_y-xe^{2y}=0$
17	$u_{xx}+2\cos x\,u_{xy}-\sin^2 x\,u_{yy}+u_x+(1+\cos x-\sin x)u_y=0$
18	$x^2u_{xx}-2xyu_{xy}-3y^2u_{yy}=0$

Задание 7. Найти решение задачи Коши

№	Задача Коши
1	$xu_{xy}-yu_{yy}-u_y=2x^3,\quad x>0$ $u\big\|_{y=\frac{1}{x}}=\sin x,\qquad u_x\big\|_{y=\frac{1}{x}}=\cos x$
2	$xu_{xx}+(x+y)u_{xy}+yu_{yy}=0,\quad x>0$ $u\big\|_{y=\frac{1}{x}}=x^3,\qquad u_x\big\|_{y=\frac{1}{x}}=2x^2$
3	$u_{xx}+2(1+2x)u_{xy}+4x(1+x)u_{yy}+2u_y=0,\quad \|y\|<\infty$ $u\|_{x=0}=y,\qquad u_x\|_{x=0}=2$
4	$x^2u_{xx}-y^2u_{yy}-2yu_y=0,\quad y<0$ $u\|_{x=1}=y,\qquad u_x\|_{x=1}=y$
5	$u_{xx}-4x^2u_{yy}-2yu_y=0,\quad \|y\|<\infty$ $u\|_{x=1}=y^2+1,\qquad u_x\|_{x=1}=4$
6	$x^2u_{xx}-2xyu_{xy}-3y^2u_{yy}=0,\qquad x>0$ $u\|_{y=1}=0,\qquad u_y\big\|_{y=1}=\sqrt[4]{x^7}$
7	$yu_{xx}+x(2y-1)u_{xy}-2x^2u_{yy}-\frac{y}{x}u_x+\frac{2x}{1+2y}(u_x+2xu_y)=0,$ $u\|_{y=0}=x^2,\qquad u_y\big\|_{y=0}=1$
8	$yu_{xx}-(x+y)u_{xy}+xu_{yy}-\frac{x+y}{x-y}(u_x-u_y)=0,\quad x>0$ $u\|_{y=0}=x^2,\qquad u_y\big\|_{y=0}=x$

9	$4y^2u_{xx}+2(1-y^2)u_{xy}-u_{yy}-\dfrac{2y}{1+y^2}(2u_x-u_y)=0, \quad \lvert y\rvert<\infty$ $u\vert_{y=0}=1, \quad u_y\vert_{y=0}=x$
10	$u_{xx}+2\cos x\, u_{xy}-\sin^2 x\, u_{yy}-\sin x\, u_y=0, \quad \lvert y\rvert<\infty$ $u\vert_{y=\sin x}=x+\cos x, \quad u_y\vert_{y=\sin x}=\sin x$
11	$u_{xx}-2\sin x\, u_{xy}-(3+\cos^2 x)u_{yy}-\cos x\, u_y=0, \quad \lvert y\rvert<\infty$ $u\vert_{y=\cos x}=\sin x, \quad u_y\vert_{y=\cos x}=\dfrac{1}{2}e^x$
12	$e^y u_{xy}-u_{yy}+u_y=0, \quad \lvert y\rvert<\infty$ $u\vert_{y=0}=-\dfrac{x^2}{2}, \quad u_y\vert_{y=0}=-\sin x$
13	$u_{xx}-2\sin x\, u_{xy}-(3+\cos^2 x)u_{yy}+u_x+(2-\sin x-\cos x)u_y=0, \quad \lvert y\rvert<\infty$ $u\vert_{y=\cos x}=0, \quad u_y\vert_{y=\cos x}=e^{-\frac{x}{2}}\cos x$
14	$u_{xx}+2\sin x\, u_{xy}-\cos^2 x\, u_{yy}+u_x+(\sin x+\cos x+1)u_y=0, \quad \lvert y\rvert<\infty$ $u\vert_{y=-\cos x}=1+2\sin x, \quad u_y\vert_{y=-\cos x}=\sin x$
15	$u_{xx}+2\cos x\, u_{xy}-\sin^2 x\, u_{yy}+u_x+(1+\cos x-\sin x)u_y=0, \quad \lvert y\rvert<\infty$ $u\vert_{y=\sin x}=\cos x, \quad u_y\vert_{y=\sin x}=\sin x$
16	$e^y u_{xy}-u_{yy}+u_y=xe^{2y}, \quad \lvert y\rvert<\infty$ $u\vert_{y=0}=\sin x, \quad u_y\vert_{y=0}=\dfrac{1}{1+x^2}$
17	$u_{xx}-u_{yy}+5u_x+3u_y+4u=0, \quad \lvert y\rvert<\infty$ $u\vert_{y=0}=x^2, \quad u_y\vert_{y=0}=1$
18	$yu_{xx}+x(2y-1)u_{xy}-2x^2u_{yy}-\dfrac{y}{x}u_x+\dfrac{2x}{1+2y}(u_x+2xu_y)=0,$ $u\vert_{y=0}=x^2, \quad u_y\vert_{y=0}=1$

Задание 8. Найти решение задачи Гурса

№	Задача Гурса
1	$u_{xx}+yu_{yy}+\dfrac{1}{2}u_y=0, \quad -\dfrac{1}{4}x^2<y<0, \ x>0$ $u\vert_{y=0}=0, \quad u\vert_{y=-\frac{1}{4}x^2}=x^2$
2	$u_{xy}-e^x u_{yy}=0, \quad y>-e^x, \quad x>0$ $u\vert_{x=0}=y^2, \quad u\vert_{y=-e^x}=1+x^2$
3	$yu_{xx}+(x-y)u_{xy}-xu_{yy}-u_x+u_y=0, \quad 0<y<x, \quad x>0$ $u\vert_{y=0}=0, \quad u\vert_{y=x}=4x^4$
4	$xu_{xx}+(x-y)u_{xy}-yu_{yy}=0, \quad 0<y<x, \quad x>0$ $u\vert_{y=0}=0, \quad u\vert_{y=x}=x$
5	$y^2u_{xx}+u_{xy}=0, \quad y^3-8<3x<y^3, \quad 0<y<2$ $u\vert_{y=2}=3x+8, \quad u\vert_{3x=y^3}=2y^3$
6	$x^2u_{xx}-y^2u_{yy}=0, \quad y>x, \quad x>1$ $u\vert_{x=1}=1, \quad u\vert_{y=x}=x$

7	$x^2u_{xx} - y^2u_{yy} + xu_x - yu_y = 0, \quad \frac{1}{x} < y < x, \quad x > 1$ $u\|_{y=x} = x, \qquad u\|_{y=\frac{1}{x}} = 1 + \ln x$
8	$3x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0, \quad x < y < \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad 0 < x < 1$ $u\|_{y=x} = x, \qquad u\|_{xy^3=1} = y^2$
9	$3x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0, \quad 1 < y < x, \quad x > 1$ $u\|_{y=x} = 0, \qquad u\|_{y=1} = \cos\frac{\pi x}{2}$
10	$u_{xx} - 2\sin x\, u_{xy} - \cos^2 x\, u_{yy} - \cos x\, u_y = 0, \qquad \|y - \cos x\| < x, \quad x > 0$ $u\|_{y=x+\cos x} = \cos x, \qquad u\|_{y=x+\cos x} = \cos x$
11	$u_{xy} - \frac{1}{x-y}(u_x - u_y) = 1, \qquad y < -x, \quad x > 2$ $u\|_{y=-x} = 0, \qquad u\|_{x=2} = 2 + 2y + \frac{1}{2}y^2$
12	$u_{xx} - u_{yy} + \frac{2}{x}u_x = 0, \qquad y > 1 + \|x\|$ $u\|_{y=x+1} = 1 - x, \qquad u\|_{y=1-x} = 1 + x$
13	$u_{xx} - u_{yy} + \frac{4}{x}u_x + \frac{2}{x^2}u = 0, \qquad y > x, \quad x > 1$ $u\|_{y=x} = 1, \qquad u\|_{x=1} = y$
14	$2u_{xx} - 2u_{yy} + u_x + u_y = 0, \qquad y > \|x\|$ $u\|_{y=x} = 1, \qquad u\|_{y=-x} = (x+1)e^x$
15	$2u_{xx} + u_{xy} - u_{yy} + u_x + u_y = 0, \qquad -\frac{1}{2}x < y < x, \quad x > 0$ $u\|_{y=x} = 1 + 3x, \qquad u\|_{y=-\frac{1}{2}x} = 1$
16	$u_{xy} = 1, \qquad \alpha x < y < \beta x, \quad x > 0, \quad 0 < \alpha < \beta$ $u\|_{y=\alpha x} = 0, \qquad u\|_{y=\beta x} = 0$
17	$u_{xy} + u_x = x, \qquad x > 0, \quad y > 0$ $u\|_{x=0} = y^2, \qquad u\|_{y=0} = x^2$
18	$u_{xy} + x^2yu_x = 0, \quad y > 0, \quad x > 0$ $u\|_{x=0} = 0, \qquad u\|_{y=0} = x$

Задание 9. Решить смешанные задачи для уравнения

$$u_{tt} - a^2u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

если граничные и начальные условия заданы следующим образом:

№	$x = 0$	$x = l$	$u\|_{t=0}$	$u_t\|_{t=0}$
1	$u = 0$	$u = 0$	x	0
2	$u_x = 0$	$u = 0$	1	x
3	$u_x = 0$	$u_x = 0$	$1 + x$	0
4	$u = 0$	$u_x = 0$	x	0
5	$u_x - u = 0$	$u = 0$	1	0

6	$u_x - u = 0$	$u_x = 0$	0	1
7	$u = 0$	$u_x + u = 0$	1	1
8	$u_x = 0$	$u_x + u = 0$	1	1
9	$u = 0$	$u = 0$	$sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$	1
10	$u_x = 0$	$u = 0$	$cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$	0
11	$u_x = 0$	$u_x = 0$	0	$cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$

Задание 10. Решить смешанные задачи для уравнения

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

если правая часть уравнения, граничные и начальные условия заданы следующим образом:

№	$f(x,t)$	$x = 0$	$x = l$	$u\|_{t=0}$	$u_t\|_{t=0}$
1	xt^2	$u = 0$	$u = 0$	0	$sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right)$
2	$t\,sin\left(\frac{5\pi x}{l}\right)$	$u = 0$	$u_x = 0$	$sin\left(\frac{3\pi x2}{l}\right)$	0
3	t^2	$u_x = 0$	$u = 0$	0	$cos\left(5\frac{\pi x}{2l}\right)$
4	xe^{-t}	$u_x = 0$	$u_x = 0$	1	$cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$
5	$cos\,t$	$u = 0$	$u_x = 0$	$sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$	0
6	t	$u_x = 0$	$u_x = 0$	$cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$	$cos\left(\frac{3\pi x}{2l}\right)$
7	$sin\,t$	$u = 0$	$u = 0$	x	0
8	e^{-t}	$u_x = 0$	$u_x = 0$	$cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$	0
9	t^3	$u = 0$	$u_x = 0$	1	$sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$
10	$cos\,t$	$u_x = 0$	$u = 0$	x	$cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$
11	$x\,cos\,t$	$u_x = 0$	$u_x = 0$	x^2	0

Задание 11. Решить смешанные задачи для уравнения

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

если $f(x,t) \equiv 0$, а граничные и начальные условия заданы следующим образом:

№	$x=0$	$x=l$	$u\|_{t=0}$	$u_t\|_{t=0}$
1	$u=t^2$	$u=t^3$	$sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$	0
2	$u=e^{-t}$	$u=t$	$sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$	1
3	$u=t$	$u_x=1$	$sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$	1
4	$u_x=0$	$u_x=e^{-t}$	$ch\,x$	0
5	$u=t+1$	$u=t^3+2$	$x+1$	0
6	$u=t^2$	$u=0$	$\frac{x}{l}$	$x+1$
7	$u=e^{-t}$	$u_x=0$	$\frac{x^2}{l^2}$	0
8	$u_x=0$	$u=t^3$	$\frac{x^2}{l^2}$	0
9	$u_x=2t$	$u=ty$	0	0
10	$u=t$	$u=t^2$	0	x
11	$u_x=0$	$u_x=e^{-t}$	1	0

3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

3.1. Перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

ТЕМА 1. Приведение к каноническому виду линейных уравнений второго порядка с двумя и многими независимыми переменными. Общее решение уравнений с частными производными.

Задание 1. Определить тип следующих уравнений:

1.1. $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + 2u - x^2 y = 0$.

1.2. $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + 2u_y - u = 0$.

1.3. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + 3u - xy^2 = 0$.

1.4. $u_{xx} + xu_{yy} = 0$.

Задание 2. Определить тип следующих систем уравнений:

2.1. $\begin{cases} 2u_x + 3u_y - 3v_y + u = 0, \\ -u_x + u_y + v_x + xy = 0. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} 2u_x + 3v_y + 3u_y - 2u = 0, \\ u_x + u_y + v_x + x^2 u = 0. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} 2u_x + 3v_y + 3u_y - 2u = 0, \\ u_x + v_x - u + xy^2 = 0. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} 2u_x - 4v_x + 3u_y + xv_y - u = 0, \\ 2u_x - 2v_x + yu_y + 3v_y + 2u = 0. \end{cases}$

Задание 3. Привести к каноническому виду уравнения с двумя независимыми переменными:

3.1. $9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 10u_x - 15u_y - 50u + x - 2y = 0$.

3.2. $u_{xx} + 4u_{xy} + 10u_{yy} - 24u_x + 42u_y + 2(x + y) = 0$.

3.3. $u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} + 3u_x + 24u_y - 9u + 9(x + y) = 0$.

3.4. $u_{xx} - 2\sin x\, u_{xy} - \cos^2 x\, u_{yy} - \cos x\; u_y = 0$.

Задание 4. Привести к каноническому виду и исключить младшие производные в уравнениях с тремя независимыми переменными:

4.1. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} = 0$.

4.2. $u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} + 3u_x = 0$.

4.3. $u_{xy} + u_{xz} + u_{yz} - u_x + u_y = 0$.

Задание 5. Найти общее решение уравнений:

5.1. $yu_x - xu_y = 0$.

5.2. $u_x + yu_y = xy, \quad y > 0$.

5.3. $2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0$.

5.4. $u_{yy} - 2u_{xy} + 2u_x - u_y = 4e^x$.

5.5. $u_{xx} + 2\cos x\, u_{xy} - \sin^2 x\, u_{yy} - \sin x\, u_y = 0$.

ТЕМА 2. Задача Коши

Задание 1. Найти решения задач Коши методом характеристик:

1.1. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 2, \quad (x,y) \in R^2;$
$u|_{y=0} = 0, \quad u_y\big|_{y=0} = x + \cos x, \quad |x| < \infty.$

1.2. $u_{xy} + u_x = 0, \quad (x,y) \in R^2;$
$u|_{y=x} = \sin x, \quad u_x|_{y=x} = 1, \quad |x| < \infty.$

1.3. $u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0, \quad (x,y) \in R^2;$
$u|_{y=0} = x, \quad u_y\big|_{y=0} = 0, \quad |x| < \infty.$

1.4. $u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} = 0, \quad (x,y) \in R^2;$
$u|_{y=0} = \phi(x), \quad u_y\big|_{y=0} = \psi(x), \quad |x| < \infty.$

1.5. $u_{xx} + 2(1+2x)u_{xy} + 4x(1+x)u_{yy} + 2u_y = 0, \quad (x,y) \in R^2;$
$u|_{x=0} = y, \quad u_x|_{x=0} = 2, \quad |y| < \infty.$

Задание 2. Решить задачи Коши для уравнения колебаний струны:

2.1. $u_{tt} = u_{xx} + 6, \ |x| < \infty, \ t > 0;$

$u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 4x, \ |x| < \infty.$

2.2. $u_{tt} = 4u_{xx} + xt, \ |x| < \infty, \ t > 0;$

$u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 4x, \ |x| < \infty.$

Задание 3. Решить задачи Коши для уравнения теплопроводности:

3.1. $u_t = 4u_{xx} + t + e^t$, $|x| < \infty$, $t > 0$;

$u|_{t=0} = 2$, $|x| < \infty$.

3.2. $u_t = u_{xx} + e^{-t} \cos x$, $|x| < \infty$, $t > 0$;

$u|_{t=0} = \cos x$, $|x| < \infty$.

Задание 4. Решить задачи, используя интегральные преобразования:

4.1. $u_t = a^2 u_{xx}$, $x > 0$, $t > 0$;
$u|_{t=0} = 0$, $x \geq 0$; $u|_{x=0} = g(t)$, $t \geq 0$.

4.2. $u_t = u_{xx} + e^{-t} \cos x$, $x > 0$, $t > 0$;
$u|_{t=0} = \phi(x)$, $x \geq 0$; $u_x|_{x=0} = 0$, $t \geq 0$.

4.3. $u_t = \alpha(t) u_{xx} + \beta(t) u_x + \gamma(t) u$, $|x| < \infty$, $t > 0$, $\alpha(t) > 0$;
$u|_{t=0} = \phi(x)$, $|x| < \infty$.

ТЕМА 3. Смешанные задачи для уравнений параболического и гиперболического типа.

Задание 1. Решить смешанные задачи для уравнений гиперболического типа:

1.1. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$;

$u|_{t=0} = \phi(x)$, $u_t|_{t=0} = \psi(x)$, $0 \leq x \leq l$;

$u|_{x=0} = 0$, $u_x|_{x=l} = 0$, $t \geq 0$.

1.2. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$;

$u|_{t=0} = x$, $u_t|_{t=0} = 1$, $0 \leq x \leq l$;

$u_x|_{x=0} = 1$, $u_x|_{x=l} = 1$, $t \geq 0$.

1.3. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$;

$$u|_{t=0} = \sin x,\ u_t|_{t=0} = 0,\ 0 \le x \le \pi;$$

$$u|_{x=0} = t^3, \quad u|_{x=\pi} = t^3,\ t \ge 0.$$

1.4. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + t,\ 0 < x < 1, t > 0;$

$$u|_{t=0} = 2,\ u_t|_{t=0} = x,\ 0 \le x \le 1;$$

$$u|_{x=0} = 2,\ u_x + u|_{x=1} = 2,\ t \ge 0.$$

1.5. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = \phi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \le x \le l;$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0,\ t \ge 0.$$

1.6. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < x < l, \quad 0 < y < l, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = \phi(x,y), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x,y), \quad 0 \le x \le l, \quad 0 \le y \le l;$$

$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=l} = 0, \quad 0 \le y \le l,\ t \ge 0; \quad u|_{y=0} = 0,\ u|_{y=l} = 0, \quad 0 \le x \le l,\ t \ge 0$

Задание 2. Решить смешанные задачи для уравнений параболического типа:

2.1. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = x - l,\ 0 \le x \le l;$$

$$u_x|_{x=0} = 1,\ u|_{x=l} = 0,\ t \ge 0.$$

2.2. $u_t = a^2 u_{xx} - \beta u,\ 0 < x < l, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = \sin\frac{\pi}{2l}x,\ 0 \le x \le l;$$

$$u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=l} = 0,\ t \ge 0.$$

2.3. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}),\ 0 < x < l_1,\ 0 < y < l_2,\ t > 0;$

$u|_{t=0} = \phi(x,y)$, $0 \le x \le l_1$, $0 \le y \le l_2$;

$u|_{x=0} = 0$, $u_x|_{x=l_1} = 0$, $0 \le y \le l_2$, $t \ge 0$;

$u|_{y=0} = 0$, $u|_{y=l_2} = 0$, $0 \le x \le l_1$, $t \ge 0$.

ТЕМА 4. Краевые задачи для эллиптических уравнений

Задание 1. Решить задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

1.1. $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $0 < x < a$, $0 < y < b$;

$u|_{x=0} = 0$, $u_x|_{x=a} = 0$, $0 \le y \le b$;

$u|_{y=0} = 0$, $u|_{y=b} = f(x)$, $0 \le x \le a$.

1.2. $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $0 < x < a$, $0 < y < b$;
$u_x|_{x=0} = 0$, $u_x|_{x=a} = 0$, $0 \le y \le b$;
$u|_{y=0} = A$, $u|_{y=b} = B$, $0 \le x \le a$.

1.3. $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $0 < x < a$, $0 < y < b$;

$u|_{x=0} = 0$, $u_x|_{x=a} = 0$, $0 \le y \le b$;

$u_y\big|_{y=0} = T \sin\frac{\pi x}{2a}$, $u|_{y=b} = 0$, $0 \le x \le a$.

1.4. $u_{xx} + u_{yy} = x$, $0 < x < a$, $0 < y < b$;
$u|_{x=0} = A \sin\frac{\pi y}{b}$, $u|_{x=a} = 0$, $0 \le y \le b$;
$u|_{y=0} = B \sin\frac{\pi x}{a}$, $u|_{y=b} = 0$, $0 \le x \le a$.

Задание 2. Решить задачи Дирихле и Неймана для круга и кольца:

2.1. $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$, $\rho > 1$, $0 \le \phi \le 2\pi$;

$u|_{\rho=1} = \cos^2 \phi$, $0 \le \phi \le 2\pi$.

2.2. $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0$, $0\le\rho<R$, $0\le\phi\le 2\pi$;

$u_\rho\big|_{\rho=R}=sin^2\phi$, $0\le\phi\le 2\pi$.

2.3. $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0$, $1<\rho<2$, $0\le\phi\le 2\pi$;

$u|_{\rho=1}=1+cos^2\phi$, $u|_{\rho=2}=sin^2\phi$, $0\le\phi\le 2\pi$.

Задание 3. Решить спектральную задачу:

3.1. $u_{xx}+u_{yy}+\lambda u=0$, $0<x<a$, $0<y<b$;

$u|_{x=0}=0$, $u|_{x=a}=0$, $0\le y\le b$; $u|_{y=0}=0$, $u_y\big|_{y=b}=0$, $0\le x\le a$.

3.2. Перечень вариантов для проведения коллоквиумов

Вариант 1.

1. Общие решения дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.
2. Решить задачу Гурса

$$u_{xy}-e^x u_{yy}=0,\quad y>e^{-x},\ x>0$$

$$u|_{x=0}=y^2,\quad u|_{y=e^{-x}}=1+x^2.$$

Вариант 2.

1. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка.
2. Решить задачу Коши

$$u_{xx}-u_{yy}+2u_x+2u_y=0$$

$$u|_{y=0}=x,\quad u_y\big|_{y=0}=0.$$

Вариант 3.

1. Системы дифференциальных уравнений с частными производными.
2. Найти общее решение уравнения

$$u_{xx}-2\cos x\, u_{xy}-(3+sin^2 x)u_{yy}+u_x+(sin\, x-cos\, x-2)u_y=0.$$

Вариант 4.

1. Метод Римана для решения обобщенной задачи Коши для гиперболического уравнения.
2. Решить задачу Коши

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$$

$$u|_{t=0} = xy, \quad u_t|_{t=0} = x + y.$$

Вариант 5.

1. Замена независимых переменных в дифференциальных уравнениях второго порядка с двумя независимыми переменными
2. Решить задачу Коши

$$xu_{xx} + (x + y)u_{xy} + yu_{yy} = 0,$$

$$u|_{y=1/x} = x^3, \quad u_y\big|_{y=1/x} = 2x^2.$$

Вариант 6.

1. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.
2. Решить задачу Коши

$$u_{xx} + 2(1 + 2x)u_{xy} + 4x(1 + x)u_{yy} + 2u_y = 0,$$

$$u|_{x=0} = y, \quad u_x|_{x=0} = 2.$$

Вариант 7.

1. Классификация дифференциальных уравнений второго порядка с n независимыми переменными.
2. Решить задачу Гурса

$$yu_{xx} + (x - y)u_{xy} - xu_{yy} - u_x + u_y = 0, \quad 0 < y < x, \ x > 0$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=x} = 4x^4.$$

Вариант 8.

1. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений второго порядка с n независимыми переменными.
2. Решить задачу Коши

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 2,$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u_y\big|_{y=0} = x + \cos x.$$

Вариант 9.

1. Исключение младших производных в уравнениях второго порядка с постоянными коэффициентами.
2. Привести к каноническому виду

$$u_{xx} - 2\sin x\, u_{xy} - \cos^2 x\, u_{yy} - \cos x\, u_y = 0.$$

Вариант 10.

1. Корректная постановка задачи Коши.
2. Решить задачу Коши

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 2,$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u_y\big|_{y=0} = x + \cos x.$$

Вариант 11.

1. Пример некорректно поставленной задачи Коши по Адамару.
2. Найти общее решение уравнения

$$u_{xx} - 2\cos x\, u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} + u_x + (\sin x - \cos x - 2)u_y = 0.$$

Вариант 12.

1. Общие решения дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.
2. Решить задачу Коши

$$xu_{xx} + (x + y)u_{xy} + yu_{yy} = 0,$$

$$u|_{y=1/x} = x^3, \quad u_y\big|_{y=1/x} = 2x^2.$$

Вариант 13.

1. Метод характеристик решения задачи Коши для волнового уравнения.
2. Решить методом Римана

$$u_{xy} = 1$$

$$u|_{y=-x} = x, \quad u_y\big|_{y=-x} = 1$$

Вариант 14.

1. Корректность задачи Коши для волнового уравнения.
2. Привести к каноническому виду

$$u_{xx} - 2\sin x\, u_{xy} - \cos^2 x\, u_{yy} - \cos x\, u_y = 0.$$

Вариант 15.

1. Метод Дюамеля решения задачи Коши для неоднородного волнового уравнения
2. Привести к каноническому виду и проделать дальнейшие упрощения

$$u_{xx} - 5u_{xy} + 6u_{yy} - 2u_x + 3u_y - 4u = 0.$$

Вариант 16.

1. Задача Коши для волнового уравнения на полуограниченной прямой. Метод продолжений
2. Найти общее решение уравнения

$$u_{xx} - 2\cos x\, u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} + u_x + (\sin x - \cos x - 2)u_y = 0.$$

Вариант 17.

1. Общие решения дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.
2. Решить методом Римана

$$u_{xy} = 0,$$

$$u|_{y=-\ln x} = 1, \quad u_y\big|_{y=-\ln x} = x$$

Вариант 18.

1. Задача Коши для волнового уравнения в пространстве
2. Решить методом Римана

$$u_{xy} = 1,$$

$$u|_{y=-x} = x, \quad u_y\big|_{y=-x} = 1.$$

Вариант 19.

1. Метод усреднений
2. Привести к каноническому виду и проделать дальнейшие упрощения

$$u_{xx} - 5u_{xy} + 6u_{yy} - 2u_x + 3u_y - 4u = 0.$$

Вариант 20.

1. Метод последовательных приближений для решения задачи Гурса.
2. Решить задачу Коши

$$xu_{xx} + (x + y)u_{xy} + yu_{yy} = 0,$$

$$u|_{y=1/x} = x^3, \quad u_y\big|_{y=1/x} = 2x^2.$$

Вариант 21.

1. Метод спуска.
2. Привести к каноническому виду

$$u_{xx} - 2\sin x\, u_{xy} - \cos^2 x\, u_{yy} - \cos x\, u_y = 0.$$

3.3. Перечень задач для контрольных работ

ЗАДАЧА 1

Найти решение следующей смешанной задачи

$$u_{tt} = u_{xx},$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = 0.$$

ЗАДАЧА 2

Найти решение задачи Гурса

$$2u_{xx} + u_{xy} - u_{yy} + u_x + u_y = 0$$

$$u|_{y=x} = 1 + 3x, \quad u|_{y=-\frac{1}{2}x} = 1,$$

ЗАДАЧА 3

Найти решение задачи Коши

$$u_{xy} + u_x = 0$$

$$u|_{y=x} = \sin x, \quad u_x|_{y=x} = 1,$$

ЗАДАЧА 4

Привести к каноническому виду

$$u_{xx} - (1 + y^2)^2 u_{yy} - 2y(1 + y^2)u_y = 0$$

ЗАДАЧА 5

Найти решение следующей смешанной задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \cos\frac{\pi}{2l}x, \quad u_t(x,0) = \cos\frac{3\pi}{2l}x + \cos\frac{5\pi}{2l}x$$

ЗАДАЧА 6
Найти решение задачи Гурса:
$\boldsymbol{u_{xy} - e^x u_{yy} = 0,}$
$\boldsymbol{u|_{x=0} = y^2, \quad u|_{y=-e^x} = 1 + x^2.}$

ЗАДАЧА 7
Привести к каноническому виду

$y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} + x u_y = 0.$

ЗАДАЧА 8
Найти решение следующей смешанной задачи:
$u_{tt} = a^2 u_{xx},$
$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0,$
$u(x,0) = \sin 2x, \quad u_t(x,0) = 0.$

ЗАДАЧА 9
Найти решение задачи Коши методом Римана:
$u_{xy} = 0,$
$u|_{y=-\ln x} = 1, \quad u_y|_{y=-\ln x} = x.$

ЗАДАЧА 10
Привести к каноническому виду
$4u_{x_1x_1} + 2u_{x_1x_2} - 2u_{x_1x_3} + 2u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} = 0.$

ЗАДАЧА 11
Привести к каноническому виду

$u_{xx} - 2\sin x\, u_{xy} + (2 - \cos^2 x)u_{yy} + \cos x\, u_x = 0.$

ЗАДАЧА 12
Найти решение задачи Коши:
$u_{tt} = u_{xx},$
$u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = 1.$

ЗАДАЧА 13
Найти решение следующей смешанной задачи:
$u_t = u_{xx},$
$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0,$
$u(x,0) = 1.$

ЗАДАЧА 14

Найти решение задачи Коши:

$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$

$u|_{t=0} = y^2, \quad u_t|_{t=0} = z^2.$

ЗАДАЧА 15

Найти решение следующей смешанной задачи:

$u_{tt} = u_{xx},$

$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0,$

$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = sin\, 2\,\pi x.$

ЗАДАЧА 16

Привести к каноническому виду

$$e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} + u_x - u_y = 0.$$

ЗАДАЧА 17

Найти решение следующей смешанной задачи:

$u_{tt} = u_{xx},$

$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0,$

$u(x,0) = cos\,\frac{2\pi}{l}x, \quad u_t(x,0) = 0.$

ЗАДАЧА 18

Привести к каноническому виду

$$4u_{x_1x_1} - 4u_{x_1x_2} - 2u_{x_2x_3} + u_{x_2} + u_{x_3} = 0.$$

ЗАДАЧА 19

Найти решение задачи Коши:

$u_t = u_{xx},$

$u|_{t=0} = cos\, x.$

ЗАДАЧА 20

Привести к каноническому виду

$$u_{x_1x_2} - u_{x_1x_3} + u_{x_2} - u_{x_3} = 0.$$

ЗАДАЧА 21

Найти решение задачи Коши:

$u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0,$

$u|_{y=0} = x, \quad u_y\big|_{y=0} = 0.$

ЗАДАЧА 22
Найти решение задачи Коши:
$$xu_{xx} - u_{yy} + \frac{1}{2}u_x = 0, \quad x > 0$$
$$u|_{y=0} = x, \quad u_y\big|_{y=0} = 0.$$

ЗАДАЧА 23
Найти решение задачи Гурса:

$$u_{xx} + 3u_{xy} - 4u_{yy} - u_x + u_y = 0, \quad x > 0$$
$$u|_{y=4x} = 5x + e^x, \quad u|_{y=-x} = 1.$$

ЗАДАЧА 24
Привести к каноническому виду:

$$\boldsymbol{u_{xx} - (1 + y^2)^2 u_{yy} - 2y(1 + y^2)u_y = 0}.$$

ЗАДАЧА 25
Найти решение задачи Гурса:
$$u_{xx} + 3u_{xy} - 4u_{yy} - u_x + u_y = 0, \quad x > 0$$
$$u|_{y=4x} = 5x + e^x, \quad u|_{y=-x} = 1.$$

ЗАДАЧА 26
Найти решение следующей смешанной задачи
$$u_{tt} = u_{xx}$$
$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0,$$
$$u(x, 0 = \sin x, \quad u_t(x, 0) = 0$$

ЗАДАЧА 27
Найти решение задачи Гурса
$$2u_{xx} + u_{xy} - u_{yy} + u_x + u_y = 0$$
$$u|_{y=x} = 1 + 3x, \quad u|_{y=-\frac{1}{2}x} = 1,$$

ЗАДАЧА 28
Найти решение задачи Коши
$$u_{xy} + u_x = 0$$
$$u|_{y=x} = \sin x, \quad u_x|_{y=x} = 1,$$

ЗАДАЧА 29
Привести к каноническому виду

$$u_{xx} - (1 + y^2)^2 u_{yy} - 2y(1 + y^2)u_y = 0$$

ЗАДАЧА 30
Найти решение следующей смешанной задачи
$u_{tt} = a^2 u_{xx}$
$u_x(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0,$
$u(x,0) = cos\frac{\pi}{2l}x, \quad u_t(x,0) = cos\frac{3\pi}{2l}x + cos\frac{5\pi}{2l}x$

3.4. Перечень вопросов к экзамену

1. Общее представление ДУ с ЧП
2. ДУ с ЧП первого порядка
3. Квазилинейные неоднородные ДУ с ЧП первого порядка
4. Системы ДУ с ЧП
5. Замена независимых переменных в уравнениях второго порядка с двумя независимыми переменными
6. Приведение к каноническому виду ДУ второго порядка с двумя независимыми переменными
7. Классификация ДУ второго порядка cn независимыми переменными
8. Приведение к каноническому виду ДУ второго порядка с nнезависимыми переменными
9. Исключение младших производных в уравнениях второго порядка с постоянными коэффициентами
10. Корректная постановка задачи Коши
11. Общее решение ДУ второго порядка с двумя независимыми переменными
12. Задача Коши для волнового уравнения. Формула д'Аламбера
13. Корректность задачи Коши для волнового уравнения
14. Пример некорректно поставленной задачи по Адамару
15. Метод Дюамеля
16. Физическая и геометрическая интерпретация формулы д'Аламбера
17. Полуограниченная прямая. Метод продолжений
18. Метод Римана
19. Уравнение колебания в пространстве
20. Метод усреднения
21. Метод спуска
22. Метод последовательных приближений для решения задачи Гурса
23. Задача Коши для уравнения теплопроводности
24. Метод интегральных преобразований для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности
25. Принцип максимума и минимума для уравнения теплопроводности
26. Корректная постановка задачи Коши для уравнения теплопроводности
27. Постановка смешанных задач для волнового уравнения
28. Постановка смешанных задач для уравнения теплопроводности
29. Задача Штурма-Лиувилля

30. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля

31. Сведение смешанных задач с неоднородными граничными условиями к задачам с однородными граничными условиями

32. Решение методом разделения переменных смешанных задач для неоднородного уравнения с однородными граничными условиями

33. Решение методом разделения переменных первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности

34. Постановка краевых задач для уравнения Лапласа

35. Формула Грина

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

4.1. Рекомендуемая литература

Основная

1. Корзюк, В.И. Уравнения математической физики: Учебное пособие. Изд. 2-е, испр. и доп / В.И. Корзюк. – М.: ЛЕНАНД, 2021. – 480 с.

2. Ерофеенко, В.Т Уравнения с частными производными и математические модели в экономике: Курс лекций. Изд. стереотипное / В.Т. Ерофеенко, И. С. Козловская. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2018. — 248 с.

3. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 2017. – 736 с.

Дополнительная

4. Мінюк, С.А. Ураўненні і метады матэматычнай фізікі / С.А. Мінюк, А.І. Глушцоў, З.М. Наркун, У.С. Немец. – Гродна: Грод. дзярж. ун-т, 2002. – 435 с.

5. Русак, В.Н. Математическая физика / В.Н. Русак. – Минск: Изд-во Дизайн ПРО, 2008. – 208 с.

6. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – 2-е изд., стер. – М.: МАИК "Наука", 2000.

4.2. Электронные ресурсы

1. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики: метод, указания и задания для студентов мех-мат, фак. В 3 ч. Ч. 1 / В. И. Корзюк, И. С. Козловская. - Минск: БГУ, 2019. - 31 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа https://elib.bsu.by/handle/123456789/233790 – Дата доступа: 12.11.2019.

2. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики : метод. указания и задания для студентов мех.-мат. фак. В 3 ч. Ч. 2 / В. И. Корзюк, И. С. Козловская. – Минск : БГУ, 2020. – 54 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа https://elib.bsu.by/handle/123456789/249214 – Дата доступа: 02.03.2020.

3. Корзюк, В. И. Математическое моделирование : курс лекций. В 8 ч. Ч.3/ В. И. Корзюк, И. С. Козловская. - Минск : БГУ, 2020. - 56 с [Электронный ресурс]. – Режим доступа https://elib.bsu.by/handle/123456789/240315 – Дата доступа: 18.02.2020.

4. Корзюк, В.И. Классические решения задач для гиперболических уравнений: курс лекций. В 10 ч. Ч.1/ В. И. Корзюк, И.С. Козловская. – Минск : БГУ, 2017. – 48 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа https://elib.bsu.by/handle/123456789/209157 – Дата доступа: 22.11.2018

5. Корзюк, В.И. Классические решения задач для гиперболических уравнений: курс лекций. В 10 ч. Ч.2/ В. И. Корзюк, И.С. Козловская. – Минск : БГУ, 2017. – 48 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа https://elib.bsu.by/handle/123456789/209158 – Дата доступа: 22.11.2018.

6. Учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальностей: 1-31 03 04 "Информатика", 1-98 01 01 "Компьютерная безопасность" [Электронный ресурс]. – Режим доступа https://elib.bsu.by/handle/123456789/232727 – Дата доступа: 21.10.2019.

7. Типовая учебная программа по учебной дисциплине для специальности 1-31 03 04 Информатика; направления специальности 1-98 01 01-01 Компьютерная безопасность (математические методы и программные системы) [Электронный ресурс]. – Режим доступа https://elib.bsu.by/handle/123456789/153216 – Дата доступа: 01.07. 2016.