

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе  
и образовательным инновациям

О.Н. Эдрок

«30» августа 2020 г.

Регистрационный № УД-9388 /уч.

**ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ РЫНОЧНЫХ ЦЕН**

Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности:

1-31 03 01 Математика (по направлениям)  
направление специальности

1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность)

2020 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 01-2013 и учебного плана № G31-139/уч. от 30.05.2013 по специальности 1-31 03 01 Математика (по направлениям) направление специальности 1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность)

**СОСТАВИТЕЛИ:**

**Кротов Вениамин Григорьевич**, профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

**Пыжкова Ольга Николаевна**, заведующий кафедрой высшей математики Учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет», кандидат физико-математических наук, доцент

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой функционального анализа и аналитической экономики (протокол № 12 от 04.06.2020);

Научно-методическим Советом БГУ (протокол № 5 от 17.06.2020)

Зав. кафедрой ФАиАЭ , профессор \_\_\_\_\_ А.В. Лебедев

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Финансовая экономика – быстро развивающаяся отрасль рыночной экономики. Используемые финансовые инструменты становятся все более разнообразными. Изменения процентных ставок и доходностей на рынках – стохастические, а математические модели этих изменений – случайные процессы. Поэтому основная задача участников финансовых рынков – определение цен финансовых инструментов – может быть решена только с привлечением вероятностных методов.

Рассмотрены простейшие стохастические модели цен для случая дискретного времени. Выделены основные типы моделей рыночных цен, позволяющие находить их основные характеристики (математическое ожидание, дисперсия, ковариационная матрица). Кроме того, на основе теории приближения в гильбертовых пространствах рассмотрены задачи линейного прогнозирования будущих значений цен по их статистическим данным.

### **Цели и задачи учебной дисциплины**

**Цель** учебной дисциплины – знакомство с ключевыми понятиями теории временных рядов и методами их вероятностного анализа, с основными принципами математического моделирования рыночных цен и методов прогнозирования на основе этих моделей.

Повышение уровня профессиональной компетентности в математическом моделировании и анализе математических моделей в экономике, теории принятия решений, теории рационального выбора, подготовка специалистов, способных использовать фундаментальные математические знания в качестве основы при проведении прикладных исследований.

### **Задачи учебной дисциплины:**

Ознакомление студентов с базовыми вероятностными моделями цен финансовых индексов и их основными характеристиками.

Построение теории линейного прогнозирования будущих значений цен по их историческим данным.

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

**Учебная дисциплина «Вероятностные модели рыночных цен»** относится к циклу дисциплин специализации компонента учреждения высшего образования.

**Связи** с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Изучение дисциплины базируется на знаниях дисциплин «Математический анализ», «Функциональный анализ», «Теория вероятностей и математическая статистика».

### **Требования к компетенциям**

Освоение учебной дисциплины «Вероятностные модели рыночных цен» должно обеспечить формирование следующих академических, социально-личностных и профессиональных компетенций:

#### **академические** компетенции:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.

АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.

#### **социально-личностные** компетенции:

СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

СЛК-6. Уметь работать в команде.

#### **профессиональные** компетенции:

ПК-5. Заниматься аналитической и научно-исследовательской деятельностью в области математики и информационных технологий.

ПК-7. Проводить исследования в области эффективности решения производственных задач.

ПК-16. Готовить доклады, материалы к презентациям.

ПК-17. Пользоваться глобальными информационными ресурсами.

ПК-18. Владеть современными средствами телекоммуникаций.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

#### **Знать:**

— общее определение вероятности, свойства вероятностей;

— теорему об ортогональном разложении;

— вероятностное описание и представление цен;

— условное математическое ожидание;

— основные понятия стационарных моделей цен.

#### **Уметь:**

— оценивать случайные события;

— делать вероятностное описание и представление цен;

— прогнозировать будущие значения цен по их прошлому значению.

#### **Владеть:**

— основными способами построения вероятностных моделей рыночных цен,

— методами вычисления вероятностных характеристик цен,

— принципами построения прогнозных значений цен.

## **Структура учебной дисциплины**

Дисциплина изучается в 7 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Вероятностные модели рыночных цен» отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 80 часов, в том числе 36 часов аудиторных занятий, из них: лекции – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 2 зачетные единицы. Форма текущей аттестации – зачет.

## СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

### Тема 1. Приближение в гильбертовых пространствах

1.1. Приближение множеством в метрическом пространстве. Элемент наилучшего приближения.

1.2. Пространства с внутренним произведением. Критерий элемента наилучшего приближения подпространством. Теорема об ортогональном разложении.

1.3. Ортогональные системы и ряды Фурье. Белый шум, гауссовский белый шум.

### Тема 2. Вероятностные модели рыночных цен

2.1. Вероятностное описание и представление цен. Стохастический базис. Способы представления цен.

2.2. Гауссовские и условно-гауссовские модели. Стационарные последовательности в широком и узком смысле.

2.3. Модель скользящего среднего  $MA(q)$ . Авторегрессионная модель  $AR(p)$ . Модели  $ARMA(p, q)$  и  $ARIMA(p, d, q)$ .

2.4. Нелинейные условно-гауссовские модели. Авторегрессионная модель условной неоднородности  $ARCH(p)$ . Обобщенная модель  $GARCH(p, q)$

### Тема 3. Прогнозирование в стационарных моделях

3.1. Оптимальное прогнозирование. Линейное оптимальное прогнозирование.

3.2. Условное математическое ожидание в широком смысле.

### Тема 4. Спектральное представление и прогнозирование

4.1. Постановка задачи прогнозирования в линейных моделях. Регулярные и сингулярные последовательности. Обновляющая последовательность. Критерий регулярности – разложение Вольда.

4.2. Спектральное представление. Стохастическая мера, ортогональная стохастическая мера.

4.3. Теорема о спектральном представлении с помощью спектральной меры.

4.4. Теорема Колмогорова о спектральной плотности и регулярных последовательностях.

### Тема 5. Прогнозирование в линейных моделях

5.1. Общие односторонние скользящие средние. Прогнозирование в модели  $MA(q)$ .

5.2. Прогнозирование в модели  $AR(p)$ . Прогнозирование в модели  $ARMA(1, 1)$ .

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов по УСР	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>1</b>	Приближение в гильбертовых пространствах	<b>6</b>						
1.1	Приближение множеством в метрическом пространстве. Элемент наилучшего приближения.	2						
1.2	Пространства с внутренним произведением. Критерий элемента наилучшего приближения подпространством. Теорема об ортогональном разложении.	2						
1.3	Ортогональные системы и ряды Фурье. Белый шум, гауссовский белый шум.	2						Отчет по индивидуальным заданиям
<b>2</b>	Вероятностные модели рыночных цен	<b>8</b>					<b>2</b>	
2.1	Вероятностное описание и представление цен. Стохастический базис. Способы представления цен.	2						
2.2	Гауссовские и условно-гауссовские модели. Стационарные последовательности в широком и узком смысле.	2						
2.3	Модель скользящего среднего MA(q). Авторегрессионная модель AR(p). Модели ARMA(p, q) и ARIMA(p, d, q).	2						
2.4	Нелинейные условно-гауссовские модели. Авторегрессионная модель условной неоднородности ARCH(p). Обобщенная модель GARCH(p, q)	2					2	Защита индивидуальных заданий, собеседование, отчеты по самостоятельной работе вне аудитории с их

								устной защитой
<b>3</b>	<b>Прогнозирование в стационарных моделях</b>	<b>4</b>						
3.1	Оптимальное прогнозирование. Линейное оптимальное прогнозирование.	2						
3.2	Условное математическое ожидание в широком смысле.	2						
<b>4</b>	<b>Спектральное представление и прогнозирование</b>	<b>8</b>					<b>2</b>	
4.1	Постановка задачи прогнозирования в линейных моделях. Регулярные и сингулярные последовательности. Обновляющая последовательность. Критерий регулярности – разложение Вольда.	2						
4.2	Спектральное представление. Стохастическая мера, ортогональная стохастическая мера.	2						
4.3	Теорема о спектральном представлении с помощью спектральной меры.	2						
4.4	Теорема Колмогорова о спектральной плотности и регулярных последовательностях	2					2	Защита индивидуальных заданий, собеседование, отчеты по самостоятельной работе вне аудитории с их устной защитой
<b>5</b>	<b>Прогнозирование в линейных моделях</b>	<b>4</b>					<b>2</b>	
5.1	Общие односторонние скользящие средние. Прогнозирование в модели MA(q).	2						
5.2	Прогнозирование в модели AR(p). Прогнозирование в модели ARMA(1, 1).	2					2	Защита индивидуальных заданий, собеседование, отчеты по самостоятельной работе вне аудитории с их устной защитой
	<b>Всего</b>	<b>30</b>					<b>6</b>	

## **ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ**

### **Перечень основной литературы**

1. Гороховик В.В. Математические основы теории потребления (электронный конспект лекций). Минск: БГУ, 2019.
2. Бусыгин В.П., Желободько Е.В., Цыплаков А.А. Микроэкономика — третий уровень. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2003.
3. Джейли, Дж.А., Рене Ф.Дж. Микроэкономика: продвинутый уровень. Москва: Издательский дом Государственного университета – Высшей школы экономики, 2011.

### **Перечень дополнительной литературы**

1. Кирута А.Я., Рубинов А.М., Яновская Е.Б. Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах. Ленинград: Наука. Ленингр. отд-ние, 1980.
2. фон Нейман Дж. Теория игр и экономическое поведение. Москва: Мир, 1970.
3. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978.
4. Шрейдер, Ю.А. Равенство, сходство, порядок. Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1971.
5. Л. Э. Сукар, Вероятностные графовые модели. Принципы и приложения. Springer ISBN: 978-5-97060-874-6 стр. 338, 2020

## **Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки**

Формой текущей аттестации по дисциплине «*Вероятностные модели рыночных цен*» учебным планом предусмотрен зачет.

Контроль работы студента проходит в форме собеседования, защита индивидуальных заданий, выполнения самостоятельных работ и практических упражнений в аудитории, а также самостоятельной работы вне аудитории с предоставлением отчета с его устной защитой. Индивидуальные задания оставляются согласно содержанию учебного материала.

Зачет по дисциплине проходит в устной или письменной форме.

### **Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов**

#### **Тема 2.** *Вероятностные модели рыночных цен.*

Студент изучает нелинейные условно-гауссовские модели. Авторегрессионная модель условной неоднородности ARCH(p). Обобщенная модель GARCH(p, q), выполняет индивидуальное задание по теме.

*Форма контроля — защита индивидуального задания и собеседование.*

#### **Тема 4.** *Спектральное представление и прогнозирование.*

Студент изучает регулярные и сингулярные последовательности, обновляющую последовательность, спектральное представление, стохастическую меру, ортогональную стохастическую меру, теорему Колмогорова о спектральной плотности и регулярных последовательностях, выполняет индивидуальное задание по теме.

*Форма контроля — защита индивидуального задания и собеседование.*

#### **Тема 5.** *Прогнозирование в линейных моделях.*

Студент изучает общие односторонние скользящие средние линейные модели, прогнозирование в модели MA(q), прогнозирование в модели AR(p), прогнозирование в модели ARMA(1, 1)., выполняет индивидуальное задание по теме.

*Форма контроля — защита индивидуального задания и собеседование.*

## **Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины**

При организации образовательного процесса используется *эвристический и практико-ориентированный подходы*, которые предполагают:

- демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем;
- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры
- анализ ситуации, с использованием профессиональных знаний, собственного опыта, дополнительной литературы и иных источников.

Также *используется метод группового обучения*, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

Все результаты и достижения группируются на основе основных видов деятельности студентов: учебной, научно-исследовательской и иной. Методы обеспечивают появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения. Также они представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимания информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления и являются организацией учебно-познавательной деятельности обучающихся.

### **Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся**

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по изучаемой теме;
- выполнение домашнего задания;
- работы, предусматривающие решение задач и выполнение упражнений;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельную проработку;
- подготовка к практическим семинарским занятиям;
- научно-исследовательские работы;
- подготовка и написание рефератов, докладов, эссе и презентаций на заданные темы;
- подготовка к участию в конференциях и конкурсах.

## Примерный перечень вопросов к зачету

### Тема 1. Приближение в гильбертовых пространствах

1. Приближение множеством в метрическом пространстве.
  2. Элемент наилучшего приближения.
  3. Пространства с внутренним произведением.
  4. Критерий элемента наилучшего приближения подпространством.
  5. Теорема об ортогональном разложении.
- Ортогональные системы и ряды Фурье.
6. Белый шум, гауссовский белый шум.

### Тема 2. Вероятностные модели рыночных цен

7. Вероятностное описание и представление цен.
8. Стохастический базис.
9. Способы представления цен.
10. Гауссовские и условно-гауссовские модели.
11. Стационарные последовательности в широком и узком смысле.
12. Модель скользящего среднего  $MA(q)$ .
13. Авторегрессионная модель  $AR(p)$ . Модели  $ARMA(p, q)$  и  $ARIMA(p, d, q)$ .
14. Нелинейные условно-гауссовские модели.
15. Авторегрессионная модель условной неоднородности  $ARCH(p)$ .
16. Обобщенная модель  $GARCH(p, q)$

### Тема 3. Прогнозирование в стационарных моделях

17. Оптимальное прогнозирование.
18. Линейное оптимальное прогнозирование.
19. Условное математическое ожидание в широком смысле.

### Тема 4. Спектральное представление и прогнозирование

20. Постановка задачи прогнозирования в линейных моделях.
21. Регулярные и сингулярные последовательности.
22. Обновляющая последовательность.
23. Критерий регулярности – разложение Вольда.
24. Спектральное представление.
25. Стохастическая мера.
26. Ортогональная стохастическая мера.
27. Теорема о спектральном представлении с помощью спектральной меры.
28. Теорема Колмогорова о спектральной плотности и регулярных последовательностях.

### Тема 5. Прогнозирование в линейных моделях

29. Общие односторонние скользящие средние.
30. Прогнозирование в модели  $MA(q)$ .
32. Прогнозирование в модели  $AR(p)$ .
33. Прогнозирование в модели  $ARMA(1, 1)$ .

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
1. Статистические методы экономики	Функционального анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 12 от 04.06.2020)
2. Уравнения математической физики	Математической кибернетики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 12 от 04.06.2020)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО  
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на \_\_\_\_ / \_\_\_\_ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
\_\_\_\_\_ (протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 202\_ г.)

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета

\_\_\_\_\_