УДК 519.712.2

В. А. МОЩЕНСКИЙ

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ НЕРАЗРЕШИМОСТИ ПРОБЛЕМЫ ГРАММАТИЧЕСКОГО РАЗБОРА ДЛЯ ГРАММАТИК ТИПА 0

A generative grammar of type 0 is constructed which has unsolvable grammar analysis problem. This construction uses Zeitin's calculus with unsolvable equality word problem.

Известно, что проблема грамматического разбора для грамматик типа 0 алгоритмически неразрешима. Доказательство этого факта в [1, 2] и др. проводится с установлением связи между машинами Тьюринга и грамматиками, откуда следует, что каждое рекурсивно-перечислимое множество слов является языком типа 0 и наоборот [2. С. 285]. Здесь, используя результат Г. С. Цейтина [3], мы построим конкретную грамматику типа 0 и для нее докажем указанный выше факт. Кроме того, на основании этого же результата Г. С. Цейтина будет построен один невычислимый предикат такой, что любой алгоритм, «пытающийся» его вычислить, хотя бы на одном слове работает сколь угодно долго.

1. Ассоциативное исчисление [4] задается алфавитом A и определяющей системой, состоящей из конечного списка выражений вида $a \longleftrightarrow b$ (называемых соотношениями), где a и b – различные слова в алфавите A. Слово c непосредственно выводимо из слова d в ассоциативном исчислении I (символически $d \underset{I}{\vdash} c$), если найдется соотношение $a \longleftrightarrow b$ из I, что слово c получается при помощи замены в слове d некоторого вхождения слова a (или b) на слово b (или a). Слова c и d эквивалентны в ассоциативном исчислении I, если найдется последовательность слов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$ такая, что $x_1 = c$ и $x_n = d$, а $x_i \underset{I}{\vdash} x_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Г. С. Цейтин определил [3] в алфавите $Z = \{a, b, c, d, e\}$ ассоциативное исчисление, скажем Ц, со следующей определяющей системой

$$\left.\begin{array}{l} ac \longleftrightarrow ca \\ ad \longleftrightarrow da \\ bc \longleftrightarrow cb \\ bd \longleftrightarrow db \\ eca \longleftrightarrow ce \\ edb \longleftrightarrow de \\ cdca \longleftrightarrow cdcae \\ caaa \longleftrightarrow aaa \\ daaa \longleftrightarrow aaa \end{array}\right\} \quad (1)$$

Теорема 1 [3]. В ассоциативном исчислении Ц алгоритмически неразрешима проблема эквивалентности слову aaa, т. е. не существует алгоритма, с помощью которого для произвольного слова x в алфавите Z за конечное число действий можно выяснить, эквивалентны ли слова x и aaa в исчислении Ц.

Итак, нет алгоритма, который по любому слову x в алфавите Z за конечное число действий определял, эквивалентно ли оно слову aaa в Ц, но легко установить, что каждое из слов вида xaaa и $ycdcae^m aa$, где x и y – произвольные слова в алфавите {c, d} $(m \geq 1)$, эквивалентны слову aaa в этом исчислении Ц. Ясно, что ни одно слово длины 1 в алфавите Z не эквивалентно слову aaa в рассматриваемом исчислении. Поэтому в дальнейших рассмотрениях фигурируют слова длины не менее 2.

Порождающая грамматика G типа 0 есть четверка $<V, W, S, R>$, т. е. $G = <V, W, S, R>$, где V и W – основной и вспомогательный алфавиты, $V \cap W = \emptyset$, S – начальный символ, $S \in W$, а R есть множество выражений вида $a \to b$ (называемых правилами), причем a и b – различные слова в алфавите $V \cup W$ [1]. При определении языка L(G), порождаемого грамматикой G, роль каждого правила $a \to b$ из R состоит в том, что при построении выводов [1] некоторое вхождение слова a в i-е слова вывода заменяется на слово b. Поэтому согласимся в грамматиках писать a$\longleftrightarrow$b («двойное правило»), если есть два правила a$\to$b и b$\to$a, и тем самым определяющую систему каждого ассоциативного исчисления можно считать принадлежащей совокупности правил грамматики типа 0.

2. По ассоциативному исчислению Ц построим порождающую грамматику $M = \langle Z, W, S, R\rangle$ типа 0, где $W = \{\bar a, \bar b, \bar c, \bar d, \bar e, S, S_1, S_2\}$, а множество R состоит из следующих двойных правил, получаемых из соотношений исчисления Ц:

$$\left.\begin{array}{c}
\bar a\bar c S_1 \longleftrightarrow \bar c\bar a S_1 \\
\bar a\bar d S_1 \longleftrightarrow \bar d\bar a S_1 \\
\bar b\bar c S_1 \longleftrightarrow \bar c\bar b S_1 \\
\bar b\bar d S_1 \longleftrightarrow \bar d\bar b S_1 \\
e\bar c\bar a S_1 \longleftrightarrow \bar c\bar e S_1 \\
\bar e\bar d\bar b S_1 \longleftrightarrow \bar d\bar e S_1 \\
cd\bar c a S_1 \longleftrightarrow \bar c\bar d\bar c\bar a\bar e S_1 \\
ca\bar a\bar a S_1 \longleftrightarrow \bar a\bar a\bar a S_1 \\
da\bar a\bar a S_1 \longleftrightarrow \bar a\bar a\bar a S_1
\end{array}\right\} \qquad (2)$$

и еще дополнительно таких (одинарных и двойных) правил

$$S \to S_2\bar\alpha S_3\alpha \; (\alpha\in Z), \qquad (3)$$

$$S_3 \to \bar\alpha S_3\alpha \; (\alpha\in Z), \qquad (4)$$

$$S_3 \to S_1S_4, \qquad (5)$$

$$\alpha S_1 \longleftrightarrow S_1\bar\alpha \; (\alpha\in Z), \qquad (6)$$

$$S_2\bar a\bar a\bar a S_1S_4 \to aaa. \qquad (7)$$

Пусть Z^+ есть множество всех непустых слов в алфавите Z и L(M) – язык, порождаемый грамматикой M, т. е. $L(M) = \{y/y\in Z^+$ и y выводимо из S$\}$; например, $a^6d = aaaaaad\in L(M)$, так как имеется в M такой вывод: S, $S_2\bar dS_3d$, $S_2\bar d\bar aS_3ad$, $S_2\bar d\bar a\bar aS_3aad$, $S_2\bar d\bar a\bar a\bar aS_3a^3d$, $S_2\bar d\bar a\bar a\bar aS_1S_4a^3d$, $S_2\bar a\bar a\bar aS_1S_4a^3d$, a^6d.

Лемма 1. Язык L(M) состоит из всех тех и только тех слов вида $aaax_m...x_2x_1$, принадлежащих Z^+, для которых слово $x_1x_2...x_m$ эквивалентно слову aaa в ассоциативном исчислении Ц.

Доказательство. Каждый вывод в грамматике M начинается с применения правила (3), которое используется только один раз и дает слово $S_2\bar x_1S_3x_1$. После этого правила можно применять или правила (4) несколько раз, или правило (5) только один раз. Если после правила (3) сразу же использовать правило (5), то получим слово $S_2\bar x_1S_1S_4x_1$, к которому можно применять только правила системы (2). Но ни одно правило системы (2) к слову $\bar x_1S_1$ не применимо и поэтому нельзя будет использовать правило (7), чтобы удалить вспомогательные символы S_2, S_1, S_4. Значит, после применения правила (3) использование сразу же правила (5) не приведет к слову в основном словаре грамматики M.

Поэтому после использования правила (3) следует n раз ($n\geq 1$) подряд применить правило (4), после чего получим слово $S_2\bar x_1\bar x_2 \ldots \bar x_{n+1}S_3x_{n+1} \ldots x_2x_1$; именно подряд, поскольку применение правил системы (2) возможно с появлением символа S_1, а появление S_1 уже исключает применение правил (4). Чтобы из последнего слова удалить вспомогательные символы S_2, S_3 и все $\bar x_i$, имеется только один путь преобразований: сначала применить один раз правило (5), что даст слово

$$T = S_2\bar x_1\bar x_2 \ldots \bar x_{n+1}S_1S_4x_{n+1} \ldots x_2x_1,$$

а затем правила системы (2) с использованием правил (6) и правило (7). В самом деле, применение правил системы (2) возможно только при наличии символа S_1, который возникает по правилу (5). В слове T имеются вспомогательные символы S_2 и S_4, которые могут быть удалены только по правилу (7). Но чтобы применить правило (7), поскольку символы S_2 и S_4 после их возникновения остаются незатрагиваемыми другими правилами, подслово $\bar{x}_1 x_2 \ldots \bar{x}_{n+1} S_1$ слова T при помощи правил системы (2) с использованием правил (6) должно быть преобразовано в слово $\bar{a}\bar{a}\bar{a}S_1$. Следовательно, если получится слово из языка L(M), то оно будет вида $aaax_m \ldots x_2 x_1$, и будет получено тогда и только тогда, когда слово $x_1 x_2 \ldots x_m$ эквивалентно слову aaa в ассоциативном исчислении Ц, ибо система (2) является «грамматической» копией системы (1) (в том смысле, что все ее символы вспомогательные). Лемма 1 доказана.

Теорема 2. Проблема $y \in L(M)$, где слово $y \in Z^+$, алгоритмически неразрешима.

Доказательство. Согласно лемме 1, $y \in L(M)$ тогда и только тогда, когда $y = aaax_n \ldots x_2 x_1$ и слово $x_1 x_2 \ldots x_n$ эквивалентно слову aaa в ассоциативном исчислении Ц. Поэтому алгоритма решения проблемы $y \in L(M)$ не существует согласно теореме 1. Теорема 2 доказана.

Таким образом, построена конкретная грамматика типа 0 с неразрешимой проблемой грамматического разбора.

3. В заключение укажем еще на один факт, вытекающий из ассоциативного исчисления Ц. Для произвольного слова x из Z^+ определим следующий предикат $P: P(x) = 1$, если слово x эквивалентно слову aaa в исчислении Ц, и $P(x) = 0$ в противном случае. Предикат $P(x)$ не является вычислимым согласно теореме 1. Поэтому определим следующий алгоритм A, «пытающийся» вычислять предикат $P(x)$: зафиксируем некоторый алгоритм B применения к словам в алфавите Z соотношений системы (1), удовлетворяющий такому условию Q.

Условие Q. Алгоритм B заканчивает применять соотношения системы (1), если получилось слово aaa (и тогда выдает 1) или слово, к которому ни одно соотношение системы (1) не применимо (в этом случае выдает 0).

Ясно, что каждый алгоритм A, состоящий из алгоритма B, удовлетворяющего условию Q, вычислит некоторые значения предиката P. Но какова бы ни была быстро растущая общерекурсивная функция $f(n)$, найдется хотя бы одно натуральное число m, что при обработке некоторого слова x из Z^+ длины m алгоритм A сделает больше, чем $f(m)$ шагов, ибо в противном случае алгоритм A вычислял бы предикат P, что невозможно.

Список литературы

1. Гладкий А. В. Формальные грамматики и языки. М., 1973.
2. Хомский Н. // Киберн. сб. М., 1962. Вып. 5. С. 279.
3. Цейтин Г. С. // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. LII. 1958. С. 172.
4. Марков А. А. // Там же. XLII. 1954.

Поступила в редакцию 03.04.92.

УДК 514.765

Ю. Д. ЧУРБАНОВ

ЛОКАЛЬНЫЕ Ф-ПРОСТРАНСТВА ПОРЯДКА 5

The paper contains necessary and sufficient conditions for any reductive homogeneous space to be a local Φ-space of order 5.

Дадим следующее

Определение. Пусть G – связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, H – ее замкнутая подгруппа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$. Однородное пространство G/H назовем (по аналогии с [1]) локальным Φ-пространством порядка 5, если в $\mathfrak{g}$ существует такое подпространство $\mathfrak{m}$ и такой автоморфизм φ, что(1) $\varphi^5 = E$, где E – тождественный автоморфизм в $\mathfrak{g}$;

2) $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \varphi(X) = X\}$, $\mathfrak{m} = A\mathfrak{g}$, $A = \varphi - E$;

3) $\varphi \circ Ad(\kappa) = Ad(\kappa) \circ \varphi$ для всех $\kappa \in H$.

Ясно, что каждое однородное Φ-пространство порядка 5 является локальным Φ-пространством порядка 5 [2]. Обратное, вообще говоря, не верно. Примером может служить двумерный тор $T^2 = R^2/Z^2$, который не является однородным Φ-пространством порядка 5, но который можно